经纶学典

总主编◎李朝东

修订版

教材解析

JIAOCAIJIEXI

高中数学

选修 2-2

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：周昌良　李树政

人教A版

高中数学

选修 2-2

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

04

教材解析:人教版.高中数学.2-2:选修/李朝东总主编.
--兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.9

ISBN 978-7-5422-3008-9

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第173824号

责任编辑:伏文东
封面设计:杭永鸿

教材解析·高中数学
选修2-2 人教A版
李朝东 总主编
甘肃少年儿童出版社出版发行
(730030 兰州市读者大道568号)
0931-8773255
山东鸿杰印务集团有限公司
开本880毫米×1230毫米 1/16 印张10.75 字数215千
2011年9月第1版 2011年9月第1次印刷
印数:1~5 000

ISBN 978-7-5422-3008-9 定价:21.00元

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

<table>
<tr><td rowspan="3">读者简介</td><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>出生年月</td><td></td></tr>
<tr><td>所在学校</td><td colspan="2"></td><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>联系方式</td><td colspan="5">(H)：　　(O)：
手机：　　E－mail：</td></tr>
<tr><td colspan="2">本书情况</td><td>学科</td><td></td><td>版本</td><td></td><td>年级</td></tr>
</table>

您对本书栏目的评价： 1. 教材梳理： 全面□　一般□　不全面□ 2. 教材拓展： 难□　合理□　易□ 3. 典型题解： 全面□　不全面□ 4. 针对性练习： 难□　合理□　易□ 5. 拓展阅读： 需要□　不需要□ 6. 五年高考回放： 需要□　不需要□	您对本书体例形式的评价： 1. 栏目设置： 过多□　适中□　过　少□ 2. 题空： 过大□　正好□　过　小□ 3. 版式： 美观□　一般□　不美观□ 4. 封面： 美观□　一般□　不美观□	您的购买行为： 1. 您购买本书的途径： 广　告□　教师推荐□ 家长购买□　学校统一购买□ 自己购买□　同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因(可多选)： 广告宣传□　包装形式□ 内　容□　图书价格□ 封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www. jing-lun. cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所(南京市租用 16－02#信箱)　　邮编：210016

目录

MULU

第一章　导数及其应用

第二章　推理与证明

目录

MULU

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题
1.1.2 导数的概念

A 教材梳理

知识点一　函数的平均变化率

一般地，函数 $y=f(x)$，x_1、x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$表示，我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率．习惯上用 Δx 表示 x_2-x_1，即 $\Delta x=x_2-x_1$，可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个"增量"，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2．类似地，

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$，

于是，平均变化率可表示为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

注意：(1)对于式子$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$，$\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$的值可正、可负，但 $\Delta x=x_2-x_1$ 的值不能取0，因为 Δx 是"增量"，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$的值可以取0(如函数$f(x)$为常数函数时，$\Delta y=0$).

(2)在式子$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$中，$\Delta y$ 与 Δx 是相对应的"增量"，即当 $\Delta x=x_2-x_1$ 时，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

(3)在式子$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$中，当 x_1 取定值，Δx 取不同的数值时，函数的平均变化率不同．当 Δx 取定值，x_1 取不同的数值时，函数的平均变化率也不同.

(4)求函数平均变化率通常用"两步法"：一是作差，二是作商，即先求出 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$和 $\Delta x=x_2-x_1$，再对所求得的差作商，即得$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

(5)函数$f(x)$的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$表示函数图象上$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$两点连线的斜率.

知识点二　平均速度

设物体运动路程与时间的关系是 $s=f(t)$，在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，物体的平均速度是

$$\bar{v}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

注意：在匀速直线运动中，比值$\frac{\Delta s}{\Delta t}$是恒定的．在非匀速直线运动中，比值$\frac{\Delta s}{\Delta t}$不是恒定的．要精确地描述非匀速直线运动，就要知道物体在每一时刻运动的快慢程度，即瞬时速度.

知识点三　瞬时速度

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的，把物体在某一时刻的速度叫做瞬时速度.

设物体运动的路程与时间之间的关系是 $s=f(t)$，当 Δt 趋近于0时，函数 $f(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$趋近于常数，我们把这个常数称为 t_0 时刻的瞬时速度.

即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.

注意：(1)瞬时速度实质是平均速度当 $\Delta t\to 0$ 时的极限值.

(2)瞬时速度的计算必须先求出平均速度$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，再对平均速度取极限.

(3)Δt 趋近于0，是指时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意

小的时间间隔,但始终不能为零.

(4)Δt、Δs 在变化中都趋近于 0,但它们的比值却趋近于一个确定的常数.

知识点四　导数

一般地,函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x)$,或 $y'|_{x=x_0}$,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

注意:(1)Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量,所以 Δx 可正、可负,但不能为零. 当 $\Delta x>0$(或 $\Delta x<0$)时,$\Delta x\to 0$ 表示 $x_0+\Delta x$ 从右边(或从左边)趋近于 x_0,Δy 是相应函数的改变量,Δy 可正、可负,也可以为零.

(2)求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的步骤如下:

①求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

②求平均变化率:$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

③取极限,求得 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

B 教材拓展

拓展点一　“函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数”“导函数”“导数”三者之间的区别与联系

1. 函数在一点处的导数:就是在该点的函数值的改变量与自变量的改变量的比的极限,它是一个数值,不是变数.

2. 导函数:如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导,就说 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导,这时对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0,都对应着一个导数 $f'(x_0)$,这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数,我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数,记作 $f'(x)$ 或 y',即

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

3. 导函数也简称导数.

4. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值. $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$. 所以求函数在某一点处的导数,一般是先求出函数的导函数,再计算这点的导函数值.

拓展点二　变换率在实际问题中的应用

变化率在科技、生物、医学、化学反应、经济事务中随处可见. 如气球充气问题:

例:我们知道,在给气球充气时,开始充气时膨胀较快,随后膨胀将逐渐缓慢下来,气球膨胀实际上就是气球半径增大,表面积增大,体积增大. 假设气球是不可压缩的,即气体体积不变,试问:

(1)如何描述气球的表面积相对于半径的增长率?

(2)如何描述气球的体积相对于半径的增长率?

解:以 r 表示气球的半径,S 表示气球的表面积,V 表示气球的体积,则 $S=4\pi r^2$,$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3(r>0)$.

(1)气球表面积 S 相对于 r 的增长率就是函数 $S=4\pi r^2(r>0)$ 的瞬时变化率.

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{4\pi(r+\Delta r)^2-4\pi r^2}{\Delta r}=\frac{8\pi r\Delta r+4\pi(\Delta r)^2}{\Delta r}=8\pi r+4\pi\Delta r,$$

当 Δr 趋于 0 时,$4\pi\Delta r$ 将趋于 0,故气球表面积增长率为 $8\pi r$.

即随着 r 的增长,气球表面积增长率逐渐增大,故随着气球不断充气,表面积增长率不断增大.

(2)气球体积 V 相对于半径 r 的增长率就是函数 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 的瞬时变化率.

$$\frac{\Delta V}{\Delta r}=\frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3r^2\Delta r+3r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3}{\Delta r}$$

$$=4\pi r^2+4\pi r\Delta r+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^2.$$

当 Δr 趋于 0 时,$4\pi r\Delta r+\dfrac{4}{3}\pi(\Delta r)^2$ 将趋于 0,故气球的体积相对于半径的增长率为 $4\pi r^2$.

即随着 r 的增长,气球体积增长率逐渐增大,故随着气球不断充气,气球体积的增长率不断增大,且其增长率恰好等于气球表面积.

C 典型题解

▶问题一　求函数的平均变化率

例题 1　以初速度为 $v_0(v_0>0)$ 作竖直上抛运动的物体,t 时刻的高度为 $s(t)=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$($g$ 为常数),求物体从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 间的平均速度.

[**解析**]　本题主要考查如何求平均速度,解题的关键是求出位移的增量.

[**答案**]　$\because \Delta s=v_0(t_0+\Delta t)-\dfrac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-v_0t_0+\dfrac{1}{2}gt_0^2=$

$(v_0-gt_0)\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$，$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0-gt_0-\frac{1}{2}g\Delta t$.

$\therefore$ 物体从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 间的平均速度为$\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0-gt_0-\frac{1}{2}g\Delta t$.

［点评］ 求物体运动的平均速度实质上是求函数的平均变化率.

例题 2 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$附近的平均变化率哪一个大.

［解析］ 本题主要考查函数平均变化率，先将正弦函数在每个自变量的附近的平均变化率求出，然后进行大小比较.

［答案］ 当自变量从 0 变到 Δx 时，函数的平均变化率为 $k_1=\frac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$.

当自变量从$\frac{\pi}{2}$变到 $\Delta x+\frac{\pi}{2}$时，函数的平均变化率为 $k_2=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x}=\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$.

由于是在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$的附近的平均变化率，可知 Δx 较小，但 Δx 既可化为正，又可化为负.

当 $\Delta x>0$ 时，$k_1>0$，$k_2<0$，此时有 $k_1>k_2$；

当 $\Delta x<0$ 时，$k_1-k_2=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x-\cos\Delta x+1}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{\Delta x}$.

$\because \Delta x<0$，$\therefore \Delta x-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而有$\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)<-1$，

$\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1<0$，$\therefore k_1-k_2>0$，即 $k_1>k_2$.

综上所述，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 附近的平均变化率大于在 $x=\frac{\pi}{2}$附近的平均变化率.

［点评］ 看平均变化率哪一个大，实际是比较大小的问题，应按作差法或作商法的步骤进行判断.

▶问题二 有关物体的瞬时速度问题

例题 3 子弹在枪筒中的运动可以看作是匀变速运动，如果它的加速度是 $a=5\times10^5\ \mathrm{m/s^2}$，子弹从枪口射出时所用的时间为 $t_0=1.6\times10^{-3}$s. 求子弹射出枪口时的瞬时速度.

［解析］ 本题主要考查物体的瞬时速度，解决此题的关键是写出运动方程，求出物体的平均速度.

［答案］ 运动方程为 $s=\frac{1}{2}at^2$.

$\because \Delta s=\frac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at_0^2=at_0\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$.

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=at_0+\frac{1}{2}a\Delta t$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=at_0$.

由题意知 $a=5\times10^5\ \mathrm{m/s^2}$，$t_0=1.6\times10^{-3}$ s，

$\therefore at_0=8\times10^2=800(\mathrm{m/s})$.

即子弹射出枪口时的瞬时速度为 800 m/s.

［点评］ 要学会用导数的方法解决相关的物理问题.

例题 4 火箭竖直向上发射，熄火时向上速度达到 100 m/s. 试问熄火多长时间后火箭速度为零？（$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$）

［解析］ 本题主要考查瞬时速度的求法，关键是列出$\frac{\Delta h}{\Delta t}$的式子，化简后令 $\Delta t=0$ 求解.

［答案］ 火箭的运动方程为 $h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2$.

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left(100t-\frac{1}{2}gt^2\right)}{\Delta t}=\frac{100\Delta t-gt\cdot\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

$h'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t\right)=100-gt$.

令 $h'(t)=0$，即 $100-gt=0$，解得 $t=\frac{100}{9.8}\approx10.2$(s). 故火箭熄火后约 10.2 s 后速度变为零.

［点评］ 路程对时间变化的极限值就是物体运动的瞬时速度.

▶问题三 定义法求函数的导数

例题 5 设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，试求下列极限的值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

［解析］ 本题主要考查求函数的导数，关键在于等价变形. 在导数的定义中，增量 Δx 的形式是多种多样的，但不论 Δx 选择哪种形式，Δy 也必须选择相对应的形式. 利用函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的条件，可以将已给定的极限式恒等变形转化为导数定义的结构形式.

［答案］ (1)原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-(-\Delta x)}$

$= -\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2)原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$

$=\dfrac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0)$.

[点评] 概念是分析、解决问题的重要依据,只有熟练掌握概念本身的属性,把握其内涵与外延,才能灵活地应用概念解题.

例题 6 已知 $f'(x_0)=-2$,求 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{k}$ 的值.

[解析] 本题主要考查导数的概念,关键是如何将待求的极限值转化为导数的形式,从而运用已知条件求得极限值.

[答案] $\because f'(x_0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left[x_0+\left(-\frac{1}{2}k\right)\right]-f(x_0)}{-\frac{1}{2}k}=-2$.

$\therefore \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{k}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{2}k}$

$=-\dfrac{1}{2}f'(x_0)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-2)=1$.

[点评] 定义法求导数,要注意定义的形式,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,使得分母中的变化量 Δx 与分子中自变量的改变量相同,若本题改为 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+2k)-f(x_0)}{k}$,求导数时应变为 $2\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+2k)-f(x_0)}{2k}$.

▶问题四 与导数有关的问题及导数的应用

例题 7 已知 $f(x)=\sqrt{x+2}$,求 $f'(2)$.

[解析] 本题主要考查导数的定义,先求出 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,再求出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

[答案] $\because \Delta y=\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}$

$=\dfrac{(x+\Delta x+2)-(x+2)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$.

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$,

$\therefore f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+2}}=\dfrac{1}{4}$.

[点评] (1)$f'(2)$ 即求函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数.

(2)运用定义法求导数,在解题时要注意运算技巧,遇到根式时,常常需要进行分子(或分母)有理化.

例题 8 利用导数的定义,求函数 $y=\dfrac{1}{x^2}+2$ 在点 $x=1$ 处的导数.

[解析] 本题考查了函数的导数,解决本题的关键是利用导数的定义求出原函数的导数,再把 $x=1$ 代入导函数.

[答案] $\because \Delta y=\left[\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}+2\right]-\left(\dfrac{1}{x^2}+2\right)$

$=\dfrac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}$,

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2x-\Delta x}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=-\dfrac{2}{x^3}$,

$\therefore$ 函数在 $x=1$ 处的导数为 -2.

[点评] (1)用定义求导数必须严格按照三个步骤进行.

(2)求函数在某一点的导数有两种方法:一种是直接求出函数在该点的导数,另一种是先求出导函数,再求出导函数在该点的函数值,此方法是常用方法.

例题 9 已知 $f(x)=x^2$,$g(x)=x^3$,求满足 $f'(x)+2=g'(x)$ 的 x 值.

[解析] 本题主要考查了导数的求法,解决本题的关键是求出 $f'(x)$ 和 $g'(x)$,然后解方程.

[答案] 由导数的定义知,

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$,

$g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2$.

$\because f'(x)+2=g'(x)$,$\therefore 2x+2=3x^2$.

即 $3x^2-2x-2=0$,解得 $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ 或 $x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

[点评] 本题将求导数与解方程联系在一起,关键在于准确地求出 $f'(x)$,$g'(x)$.

例题 10 已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=3q^2+1$,求当产量 $q=30$ 时的边际成本.

[解析] 本题主要考查导数在经济领域内的应用.设成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=c(q)$,当产量为 q_0 时,产量的变化量 Δq 对成本的影响可用增量比 $\dfrac{\Delta c}{\Delta q}=\dfrac{c(q_0+\Delta q)-c(q_0)}{\Delta q}$ 刻画.如果 Δq 无限趋近于0时,$\dfrac{\Delta c}{\Delta q}$ 无限趋近于常数 A,经济学上称 A 为边际成本,它表明当产量为 q_0 时,增加单位产量需付出的成本为 A,它是实际付出成本的一个近似值.

[答案] $\because \Delta c=3(30+\Delta q)^2+1-(3\times 30^2+1)=180\Delta q+3(\Delta q)^2$,

$\therefore \dfrac{\Delta c}{\Delta q}=\dfrac{180\Delta q+3(\Delta q)^2}{\Delta q}=180+3\Delta q.$

$\therefore A=\lim\limits_{\Delta q\to 0}\dfrac{\Delta c}{\Delta q}=\lim\limits_{\Delta q\to 0}(180+3\Delta q)=180.$

$\therefore$ 当产量 $q=30$ 时的边际成本为180.

[点评] 导数在生产、生活中应用广泛,要注意学以致用.

D 针对性练习

[基础题]

1. 当自变量从 x_0 变到 x_1 时,函数值的增量与相应自变量的增量之比是函数 ( )
   A. 在区间 $[x_0,x_1]$ 上的平均变化率
   B. 在 x_0 处的变化率
   C. 在 x_1 处的导数
   D. 在区间 $[x_0,x_1]$ 上的导数
2. 一物体的运动方程是 $s=3+t^2$,则在一小段时间 $[2,2.1]$ 内相应的平均速度为 ( )
   A. 0.41 B. 3
   C. 4 D. 4.1
3. 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-3\Delta x)}{4\Delta x}$ 等于 ( )
   A. $\dfrac{4}{3}a$ B. $-\dfrac{4}{3}a$
   C. $\dfrac{3}{4}a$ D. $-\dfrac{3}{4}a$
4. 函数 $y=3x^2+6x$ 的导数是 ( )
   A. 6 B. $6x^2+6$
   C. $3x+6$ D. $6x+6$
5. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数为1,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{2x}$ 等于 ( )
   A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1
   C. 2 D. $\dfrac{1}{4}$
6. 如果某物体作运动方程为 $s=2(1-t^2)$ 的直线运动(s 的单位为m,t 的单位为s),那么其在1.2 s末的瞬时速度为 ( )
   A. -4.8 m/s B. -0.88 m/s
   C. 0.88 m/s D. 4.8 m/s

[综合提升]

7. 设函数 $f(x)$ 可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于 ( )
   A. $f'(1)$ B. $3f'(1)$
   C. $\dfrac{1}{3}f'(1)$ D. $f'(3)$
8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于 ( )
   A. $-\dfrac{1}{a}$ B. $\dfrac{2}{a}$
   C. $-\dfrac{1}{a^2}$ D. $\dfrac{1}{a^2}$
9. 已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,$f(3)=2$,$f'(3)=-2$,则 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-3f(x)}{x-3}$ 的值是 ( )
   A. 4 B. 6
   C. 8 D. 不存在
10. 设函数 $f(x)=ax+3$,若 $f'(1)=3$,则 a 等于 ( )
    A. 2 B. -2
    C. 3 D. -3
11. 某物体作匀速运动,其运动方程是 $s=vt$,则该物体在运动过程中其平均速度与任何时刻的瞬时速度的关系是_______.
12. 已知 $a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$,$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 则 a、b、c、d、e 有相等关系的是_______.
13. 如果一个质点从固定点 A 开始运动,位移函数为 $y=f(t)=t^3+3$,求 $t=4$ 时,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ 的值.

14. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，a，b 为常数，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-b\Delta x)}{\Delta x}$.

15. 已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=4q^2+q-6$，求当产量 $q=10$ 时的边际成本.（注：边际成本是指在一定产量水平下，增加或减少一个单位产量所引起成本总额的变动数）

16. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-a,a)(a>0)$ 内为偶函数且可导，试讨论 $y=f'(x)$ 在 $(-a,a)$ 内的奇偶性.

[参考答案]

1. A 解析：根据平均变化率的定义可知，当自变量从 x_0 变到 x_1 时，函数值的增量与相应自变量的增量之比就是函数在区间 $[x_0,x_1]$ 上的平均变化率.

2. D 解析：$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{3+2.1^2-(3+2^2)}{2.1-2}=4.1$.

3. C 解析：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-3\Delta x)}{4\Delta x}$

$$=\frac{3}{4}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{-3\Delta x}$$

$$=\frac{3}{4}f'(x_0)=\frac{3}{4}a.$$

4. D 解析：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)-3x^2-6x}{\Delta x}$$

$$=6x+6.$$

5. A 解析：$\because f'(1)=1$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=1$.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=\frac{1}{2}.$$

6. A 解析：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2[1-(1.2+\Delta t)^2]-2(1-1.2^2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(-4.8-2\Delta t)=-4.8(\mathrm{m/s}).$$

7. C 解析：原式 $=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(1)$.

8. C 解析：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{(x-a)\cdot xa}$$

$$=-\lim_{x\to a}\frac{1}{ax}=-\frac{1}{a^2}.$$

9. C 解析：$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-3f(x)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)+6-3f(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[2+\frac{-3(f(x)-2)}{x-3}\right]$$

$$=2-3\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=2-3f'(3)=8.$$

10. C 解析：$\because f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)+3-(ax+3)}{\Delta x}=a,$$

$\therefore f'(1)=a=3.$

11. 相等　解析：$v_0=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t_0+\Delta t)-vt_0}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v\cdot\Delta t}{\Delta t}=v.$

12. a,d,e

13. 解：$\because \Delta y=(\Delta t+4)^3+3-(4^3+3)$

$=(\Delta t)^3+12(\Delta t)^2+48\Delta t,$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{(\Delta t)^3+12(\Delta t)^2+48\Delta t}{\Delta t}=(\Delta t)^2+12\Delta t+48.$

$\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}[(\Delta t)^2+12\Delta t+48]=48.$

14. 解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-b\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-b\Delta x)]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[a\cdot\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}-(-b)\cdot\dfrac{f(x_0-b\Delta x)-f(x_0)}{-b\Delta x}\right]$

$=a\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}+b\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-b\Delta x)-f(x_0)}{-b\Delta x}$

$=af'(x_0)+bf'(x_0).$

15. 解：$\because \Delta c=4(10+\Delta q)^2+(10+\Delta q)-6-(4\times 10^2+10-6)=4(\Delta q)^2+80\Delta q+\Delta q=4(\Delta q)^2+81\Delta q,$

$\therefore \dfrac{\Delta c}{\Delta q}=\dfrac{4(\Delta q)^2+81\Delta q}{\Delta q}=4\Delta q+81.$

$\therefore$ 边际成本 $A=\lim\limits_{\Delta q\to 0}\dfrac{\Delta c}{\Delta q}=\lim\limits_{\Delta q\to 0}(4\Delta q+81)=81.$

$\therefore$ 当产量 $q=10$ 时的边际成本为 81.

16. 解：$f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(-1)\cdot\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}\right]$

$=-f'(x).$

$\therefore f'(x)$为奇函数.

E 课后答案点拨

[练习(第6页)]

在第3 h和5 h时，原油温度的瞬时变化率分别为-1和3. 它说明在第3 h附近，原油温度大约以1 ℃/h的速率下降；在第5 h时，原油温度大约以3 ℃/h的速率上升.

F 拓展阅读

导数的产生

导数是由速度问题和切线问题抽象出来的数学概念，又称变化率. 它产生的实际背景有两个：一是曲线切线的斜率，二是变速直线运动质点的瞬时速度. 定义导数这个概念所用到的数学思想方法就是极限，导数的定义式是增量比的极限，也就是两个无穷小量之比的极限. 它的数学含义是函数的变化率.

如一辆汽车在10 h内走了600 km，它的平均速度是60 km/h，但在实际行驶过程中，是有快慢变化的，不都是60 km/h. 为了较好地反映汽车在行驶过程中的快慢变化情况，可以缩短时间间隔，设汽车所在位置x与时间t的关系为$x=f(t)$，那么汽车在由时刻t_0变到t_1这段时间内的平均速度是$\dfrac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$，当$t_1$与$t_0$很接近时，汽车行驶的快慢变化就不会很大，平均速度就能较好地反映汽车在t_0到t_1这段时间内的运动变化情况，自然就把极限$\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$作为汽车在$t_0$时刻的瞬时速度，这就是通常所说的速度.

物理学、几何学、经济学等学科中的一些重要概念都可以用导数来表示. 如导数可以表示运动物体的瞬时速度和加速度，可以表示曲线在一点处的切线的斜率，还可以表示经济学中的边际和弹性.

1.1.3　导数的几何意义

A 教材梳理

知识点一　导数的几何意义

函数$y=f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)$的几何意义，就是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率k，即

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

注意：(1)若曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处的导数不存在，但有切线，则切线与x轴垂直.

(2)若$f'(x_0)>0$,则切线的倾斜角为锐角;若$f'(x_0)<0$,则切线的倾斜角为钝角;若$f'(x_0)=0$,则切线与x轴平行.

知识点二　导函数

如果$f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都是可导的,则称$f(x)$在区间(a,b)内可导. 在区间(a,b)内,$f'(x)$构成一个新函数,我们把这个函数称为函数$f(x)$的导函数,简称为导数.

注意:(1)函数在一点处的导数,就是该点的函数值的改变量与自变量的改变量的比值的极限. 它是一个数值,不是变数.

(2)函数的导数,是对某一区间内任意一点x而言的,就是函数$f(x)$的导数$f'(x)$.

(3)函数$y=f(x)$在x_0处的导数,就是导函数$f'(x)$在点$x=x_0$处的导数值.

知识点三　利用导数求曲线的切线方程

1. 利用导数的几何意义求曲线的切线方程的步骤

第一步:求出函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$;

第二步:根据直线的点斜式方程,得切线方程为

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

注意:若在点$(x_0,f(x_0))$处切线l的倾斜角为$\frac{\pi}{2}$,此时切线平行于y轴,导数不存在,不能用上述方法求切线的方程,可根据切线的定义直接得切线方程为$x=x_0$.

2. 几种常见曲线的切线方程

(1)过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

特例,当$a=b=0$时,即圆心在坐标原点,此时,过点P_0的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

(2)过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(3)过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(4)过抛物线$y^2=2px$上的一点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为$y_0y=p(x+x_0)$.

B 教材拓展

拓展点　导数的物理意义

如果把函数$y=f(x)$看作是物体的运动方程(也叫做位移公式,自变量x表示时间),那么导数$f'(x_0)$表示运动物体在x_0时刻的速度,即在x_0时刻的瞬时速度. 即

$$v_{x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

C 典型题解

▶问题一　导数几何意义的直接应用

例题 1　下列说法正确的是　　(　　)

A. 若$f'(x_0)$不存在,则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处没有切线

B. 若曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有切线,则$f'(x_0)$必存在

C. 若$f'(x_0)$不存在,则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率不存在

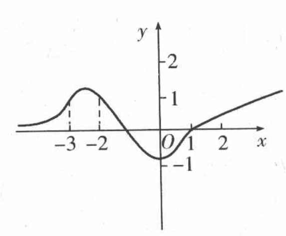
D. 若曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率不存在,则曲线在该点处没有切线

[解析]　本题主要考查导数的几何意义,函数$f(x)$在一点$x=x_0$处的导数$f'(x_0)$的几何意义是在这一点处切线的斜率. $f'(x_0)$不存在,并不能说明在这一点处不存在切线,而是说明在这一点处的切线斜率不存在,即若在这一点处的切线斜率不存在,曲线在该点处也可能有切线. 所以函数$f(x)$在某点可导是相应曲线上过该点存在切线的充分不必要条件. 故选 C.

[答案]　C

[点评]　函数在某点可导是相应曲线过该点存在切线的充分条件,而不是必要条件,因此求曲线上过某点的切线方程时,如果这点的导数不存在,可由切线的定义来确定其切线方程,如函数$y=\sqrt[3]{x}$在点$P(0,0)$处的导数不存在,但切线方程为$x=0$.

例题 2　如图,试描述函数$y=f(x)$在$x=-3,-2,0,1$附近的变化情况.



[解析]　本题直接考查导数的几何意义. 结合曲线在各点的切线斜率来判断.

[答案]　由函数$y=f(x)$图象知,当$x=-3$时,曲线的切线斜率大于零,所以函数在$x=-3$附近单调递增. 同理,函数$f(x)$在$x=-2,0,1$附近分别单调递减、几乎没有变化和单调递增.

[点评] 注意体会这种“以直代曲”的思想,它是后面即将学到的微积分中的重要思想方法.

▶问题二 利用导数的几何意义求切线方程问题

例题 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$上的一点 $P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$处的切线方程.

[解析] 本题主要考查导数的几何意义和切线的求法,解决此问题的关键是求出曲线在点 $P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$处的切线的斜率,即 $f'(4)$.

[答案] $\because f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}+\frac{7}{4}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4+\Delta x}-\frac{1}{4}\right)-(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{4(4+\Delta x)}-\frac{\Delta x}{\sqrt{4+\Delta x}+2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]$$

$$=-\frac{5}{16}.$$

$\therefore$ 所求的切线斜率为 $-\frac{5}{16}$.

故所求的切线方程为 $5x+16y+8=0$.

[点评] 本题是求曲线的切线方程问题,要求过曲线上的点 $P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$处的切线方程,根据直线方程的点斜式可知,只需求出切线的斜率,由导数的几何意义知其斜率为 $f'(4)$,因此需求出函数在点 $P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$处的导数.

例题 4 若抛物线 $y=4x^2$ 上的点 P 到直线 $y=4x-5$ 的距离最短,求点 P 的坐标.

[解析] 本题主要考查导数的几何意义,关键设出切点,运用相等斜率求出点 P 的坐标.

[答案] 由点 P 到直线 $y=4x-5$ 的距离最短知,过点 P 的切线与直线 $y=4x-5$ 平行,设 $P(x_0,y_0)$,

则 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{4(x+\Delta x)^2-4x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x)$

$=8x$,

由$\begin{cases}8x_0=4,\\ y_0=4x_0^2,\end{cases}$得$\begin{cases}x_0=\frac{1}{2},\\ y_0=1.\end{cases}$故所求的点为 $P\left(\frac{1}{2},1\right)$.

[点评] 求最值问题的基本思路:①目标函数法:通过设变量构造目标函数,利用函数求最值;②数形结合法:根据问题的几何意义,利用图形的特殊位置求最值,本题采用的是第二种思路.

例题 5 已知曲线 $C:y=x^3$.

(1)求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程;

(2)第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他的公共点?

[解析] 本题考查了为什么要用割线的极限位置来定义切线,而不说“与曲线只有一个公共点的直线叫做切线”.

[答案] (1)将 $x=1$ 代入曲线 C 的方程得 $y=1$,

$\therefore P(1,1)$为切点.

$\because y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2,$$

$\therefore$ 切线的斜率为 3.

$\therefore$ 过点 P 的切线方程为 $y-1=3(x-1)$,

即 $3x-y-2=0$.

(2)由$\begin{cases}y=3(x-1)+1,\\ y=x^3,\end{cases}$得$(x-1)^2(x+2)=0$,

解得 $x_1=1,x_2=-2$.

从而求得公共点为 $P(1,1),P'(-2,-8)$.

说明切线与曲线 C 的公共点除了切点 P 外,还有另外的点.

[点评] 本题回答了一个问题:直线与曲线相切是否表示二者一定只有一个公共点.曲线 $y=f(x)$在点 P 处的切线:(1)与点 P 的位置有关;(2)要依据割线 PQ 是否存在极限位置来判定与求解.

例题 6 过曲线 $y=x^2$ 上哪一点的切线,

(1)平行于直线 $y=4x-5$?

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$?

(3)倾斜角为 135°?

[解析] 本题主要考查导数的几何意义和两直线平行、垂直的条件.解题的关键是设出切点的坐标,求出切线的斜率.

[答案] $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$,设 $P(x_0,y_0)$是满足条件的点.

(1)$\because$ 切线与直线 $y=4x-5$ 平行,

$\therefore 2x_0=4,x_0=2,y_0=4$,即 $P(2,4)$是满足条件的点.

(2)∵ 切线与直线 $2x-6y+5=0$ 垂直，

$\therefore 2x_0\cdot\frac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\frac{3}{2}$，$y_0=\frac{9}{4}$，

即 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)∵ 倾斜角为 $135°$，

∴ 其斜率为 -1. 即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\frac{1}{2}$，$y_0=\frac{1}{4}$，

即 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

[点评] 求出 $f'(x)$ 是关键的一步，设出切点的坐标是充分利用已知条件的前提.

例题 7 求抛物线 $y=x^2$ 过点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 的切线方程.

[解析] 本题考查切线方程求法. 显然点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 不在曲线 $y=x^2$ 上，要求过点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 的切线方程，需在 $y=x^2$ 上设出切点，求出切线斜率.

[答案] 设此切线过抛物线上的点 (x_0,x_0^2). 由导数的几何意义知此切线的斜率为 $2x_0$.

又∵ 此切线过点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 和点 (x_0,x_0^2)，

$$\therefore \frac{x_0^2-6}{x_0-\frac{5}{2}}=2x_0.$$

即 $x_0^2-5x_0+6=0$.

解得 $x_0=2$ 或 3.

即切线过抛物线 $y=x^2$ 上的点 $(2,4)$ 或 $(3,9)$.

∴ 所求切线方程为

$y-4=4(x-2)$ 或 $y-9=6(x-3)$.

即 $y=4x-4$ 或 $y=6x-9$.

[点评] (1)利用导数几何意义求切线方程有两类常见题型：一是切点在曲线上且已知，二是已知点不在曲线上，可设出切点，利用斜率找出等式，求出切点横坐标，再由曲线方程求出纵坐标，从而确定切线方程.

(2)本题常见错误解法是直接求出 $y=x^2$ 在 $x=\frac{5}{2}$ 处的切线斜率 $k=5$，而得出错解 $y-6=5\left(x-\frac{5}{2}\right)$. 错因是未判断点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 是否在已知曲线上.

▶问题三 导数几何意义的综合应用

例题 8 求证：过曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任意一点的切线在两坐标轴上的截距之和为常数.

[解析] 本题主要考查导数的几何意义，关键是理解直线在两坐标轴上的截距的概念，先求切线方程，后求截距代入求解.

[答案] 设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任意一点，设过该点的切线斜率为 k，

则过该点的切线方程为 $l:y-y_0=k(x-x_0)$，

由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，得 $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$，

$$\Delta y=(\sqrt{a}-\sqrt{x_0+\Delta x})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2$$

$$=\Delta x-2\sqrt{a(x_0+\Delta x)}+2\sqrt{ax_0},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\frac{-2\sqrt{a}(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}{\Delta x}$$

$$=1-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}$，即 $k=1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}$，

从而横、纵截距分别为 $\sqrt{ax_0}$ 与 $a-\sqrt{ax_0}$，

又 $\sqrt{ax_0}+(a-\sqrt{ax_0})=a$（常数），

∴ 问题得证.

[点评] 运用导数求切线方程，正确求导是解决问题的关键.

例题 9 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线，l_2 为该曲线的另一条切线，且 $l_1\perp l_2$.

(1)求直线 l_2 的方程；

(2)求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

[解析] 本题主要考查导数的几何意义及两直线的位置关系：关键求出 l_2 与曲线的切点，并写出 l_2 的方程，先求出 l_1 的方程，由于 $l_1\perp l_2$，求出 l_2 与曲线的切点，求出 l_2 的斜率 k_2，从而求出 l_2 的方程.

[答案] (1)∵ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-2-(x^2+x-2)}{\Delta x}$$

$=2x+1$，

∴ 直线 l_1 的斜率为 3，

∴ 直线 l_1 的方程为 $y=3(x-1)$，即 $y=3x-3$.

设直线 l_2 过曲线 $y=x^2+x-2$ 上的点 $P(x_0,x_0^2+x_0-2)$，则直线 l_2 的方程为 $y-(x_0^2+x_0-2)=(2x_0+1)(x-x_0)$.

∵ $l_1\perp l_2$，∴ $2x_0+1=-\frac{1}{3}$，$x_0=-\frac{2}{3}$.

∴ 直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{22}{9}$.