王海敏 主编

经济应用数学

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

经济应用数学

王海敏 主编

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 王海敏主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2011.2

ISBN 978-7-81140-273-5

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)020956 号

经济应用数学

王海敏 主编

责任编辑 许 静
责任校对 张振华
封面设计 刘 韵
责任印制 汪 俊
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷 杭州印校印务有限公司
开　　本 880mm×1230mm 1/32
印　　张 9
字　　数 248 千
版 印 次 2011 年 2 月第 1 版 2011 年 2 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-81140-273-5
定　　价 25.00 元

前　　言

本书是为成人教育学院（校）财经类、管理类专业的学生而编写的公共数学基础课教材。

本书遵循“必需、够用”的原则，对传统微积分内容进行了取舍。全书共分七章，涵盖函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微分学。

在内容的编排上，我们注意了以下几点：

1. 力求做到科学性和通俗性相结合，由浅入深，循序渐进。读者只要有高中数学的基础知识就能顺利阅读本书。

2. 运用富有启发性的实际例子引入微积分的概念，展示微积分的基本思想。

3. 适度淡化了一些概念的严格数学定义和一些定理的严格数学推导，强化了用图形解释相关概念和定理结果的清晰性。

4. 强调了微积分的运算以及它对初等连续模型的应用。用较多的例题阐述解题的基本方法和技巧，并尽可能地联系经济领域的实际。

5. 为了帮助学生掌握微积分的方法和培养解决应用问题的能力，除每节后面给出习题之外，在每章的后面还配置了包含各种题型的复习题。

本书由浙江工商大学统计与数学学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定。第一章由袁中扬执笔，第二章由韩兆秀执笔，第三章由韩兆秀、袁中扬执笔，第四、七章由裘渔洋执笔，第五、六章由王海敏执笔，全书最后由王海敏统稿定稿.

本书编写过程中参考了大量的国内外教材;浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助,尤其是许静老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血;浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2010 年 11 月于浙江工商大学

目　录

第 1 章　函　数

高等数学的核心内容是微积分，它与以前所学的初等数学有很大的区别. 初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程. 所谓函数关系就是变量间的对应关系.

本章先对高等数学的研究对象 —— 函数及相关知识进行简要复习和必要的补充. 本部分内容是研究微积分最必要的基础知识.

§1.1　函　数

一、集合的概念

集合是数学中的一个原始的概念，一般可把集合理解为具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某班全体同学组成了一个集合；全体实数组成了一个集合；数 1,2,3,4,5 组成了一个集合；某个车间某天生产的全部产品也组成了一个集合等. 组成一个集合的事物叫做这个集合的**元素**. 习惯上集合用大写字母 A,B,C 等表示，而元素用小写字母 a,b,c 等.

含有有限多个元素的集合称为**有限集**，含有无限多个元素的集合称为**无限集**. 事物 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$，读作"a 属于 A". 否则记作 $a \notin A$，读作"a 不属于 A".

所谓给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方式不外两种：一种是**列举法**，就是把集合中所有的元素都列举出来，写在大括号内. 例如，集合 A 由数 1,2,3,4,5 组成，则可记为

$$A = \{1,2,3,4,5\}.$$

另一种是**描述法**，就是把集合中的元素的共同特性描述出来，通常记为

$$M = \{x \mid x \text{ 所具有的特性 } p\}.$$

这里，所谓“x 所具有的特性 p”，实际上就是 x 作为 M 的元素应满足的充分必要条件. 例如，xOy 平面上第一象限内点的全体所组成的集合 M，可记为

$$M = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}.$$

以后用到的集合主要是数集，如没有特别声明，提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $a \in A$，则必有 $a \in B$，就称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$(读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$(读作 B 包含 A).

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x^2 + y^2 = -1$ 的实数集就是一个空集. 规定空集是任何集合 A 的子集. 显然 A 是它自己的子集，即 $A \subset A$.

若两集合 A 和 B 有 $A \subset B$，同时 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$.

既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合称作集合 A 和集合 B 的**交集**，记为 $A \cap B$.

所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**并集**，记为 $A \cup B$.

所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**差集**，记为 $A - B$ 或 $A \backslash B$.

例如，若 $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{1,3,5,7\}$，则 $A \cap B = \{1,3\}$，$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$，$A - B = \{2,4\}$.

二、区间、邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a,b 都是实数，且 $a < b$，数集

$\{x \mid a < x < b\}$叫做**开区间**，记作(a,b)；数集$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$叫做**闭区间**，记作$[a,b]$；数集$\{x \mid a < x \leqslant b\}$和数集$\{x \mid a \leqslant x < b\}$都叫做**半开区间**，分别记作$(a,b]$和$[a,b)$.

以上这些区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 这些区间都可以通过数轴上的线段表示出来，分别如图 1-1(a)，(b)，(c)，(d). 此外，还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大) 及 $-\infty$(读作负无穷大)，则$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数的集合；$(a,+\infty)$ 表示大于 a 的所有实数的集合(图 1-1(e))；$(-\infty,b]$ 表示不大于 b 的所有实数的集合(图 1-1(f)). 以上所述的各个区间在数轴上表示出来，分别如图 1-1 所示. 今后在不需要辨明所论区间是否包括端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就统称为"区间"，且通常用字母 I 表示.

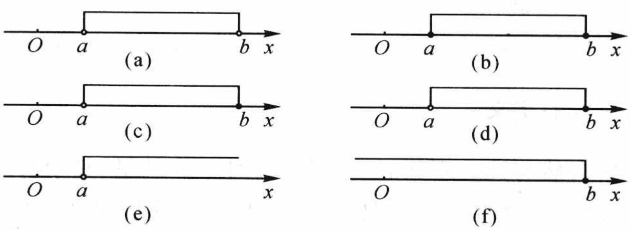

图 1-1

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**，如图 1-2 所示.

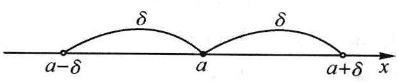

图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心

a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\overset{o}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a **的左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a **的右 δ 邻域**.

例 1 用区间表示下列点集.

(1) $\{x\,|\,1\leqslant|x-1|<2\}$； (2) $\{x\,|\,|x+1|>0\}$

解 (1) 由 $|x-1|<2$ 可得 $-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$；由 $|x-1|\geqslant 1$ 可得 $x-1\geqslant 1$ 或 $x-1\leqslant -1$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$. 因此

$$\{x\,|\,1\leqslant|x-1|<2\}=(-1,0]\cup[2,3).$$

(2) 由绝对值性质可知 $|x+1|\geqslant 0$，且 $|x+1|=0$ 的充要条件是 $x+1=0$，因此

$$\{x\,|\,|x+1|>0\}=\{x\,|\,x+1\neq 0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

三、函数的定义

在观察自然与社会现象时，会遇见各种不同的量，其中有些量在所考察的过程中始终保持不变，取一固定的数值，这种量称为**常量**；有些量在所考察的过程中发生变化，取不同的数值，这种量称为**变量**.

在同一个实际问题中，变量往往不止一个，它们的变化也不是孤立的，而是存在着确定的依赖关系. 例如某厂每日最多生产某产品 1000 件，固定成本为 150 元，单位变动成本为 8 元，则每日的产量 x 与每日的总成本 y 之间的依赖关系为

$$y=150+8x,\ x\in[0,1000].$$

这种两个或多个变量在相互关联变化着的现象就是函数现象. 函数是最重要的数学概念之一，这个术语最早是由莱布尼兹(Leibniz) 于 1672 年引入的，它用来表示一个量对另一个量的依赖关系. 在理论研究时，为了不必用具体的式子来表达函数，瑞士科学家欧拉(Euler) 提出用字母 f 来表达一个函数，记号 $y=f(x)$ 表示 y 的值依赖于 x 的值的意思.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，x 的变域是数集 D. 如果对每一个 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则 f，有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x) \text{ 或 } f: D \to \mathbf{R},$$

数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 又叫做因变量.

当 x 在 D 内取一固定值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取 D 中的一切数值时，对应的函数值全体组成的数集称为这个函数的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数的定义域通常约定是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 另外，在实际问题中，函数的定义域是由实际意义确定的.

这里，我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个**基本要素**. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么这两个函数就是相同的.

如函数 $y = \sqrt{x^2}$ 与 $s = |t|$ 是相同的函数，因为它们的定义域、对应法则都相同. 而函数 $y = x - 1$ 与 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$，尽管两者的对应法则相同，但两者的定义域不同，它们不是相同的函数.

例 1 求函数 $y = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{x - 3} + \lg(5 - x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ x - 3 \neq 0, \\ 5 - x > 0 \end{cases}$$

解之即得所求的定义域为

$$D = \{x \mid 2 \leqslant x < 5, \text{且 } x \neq 3, x \in \mathbf{R}\} = [2,3) \cup (3,5).$$

例 2 已知 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$，求 $f(2)$，$f(a)$，$f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$.

解 $f(2)=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$, $f(a)=\dfrac{1}{1+a^2}$,

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2},$$

$$f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

例 3 已知 $f(e^x-1)=x^2+1$，求 $f(x)$ 的定义域.

解 令 $e^x-1=u$，那么 $x=\ln(1+u)$，代入原式，有

$$f(u)=\ln^2(1+u)+1,$$

即

$$f(x)=\ln^2(1+x)+1,$$

从而知 $D_f=(-1,+\infty)$.

函数的表示方法很多，常用的有三种，即解析法（或称公式法）、列表法和图像法.

应该注意到，在函数的定义中，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示函数关系，在很多问题中常常会遇到这种情况，就是在定义域的不同范围内，函数关系用不同的式子来表示，这种函数叫做**分段函数**.

下面举几个分段函数的例子.

(1) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-3 所示.

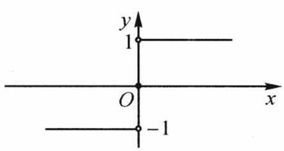

图 1-3

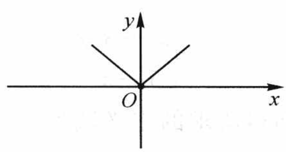

图 1-4

(2) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

其图形如图 1 - 4 所示.

(3) 狄立克莱函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in 有理数\\ 0, & x\in 无理数\end{cases}$$

(4) 取整函数

$$y=[x],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 其图形如图 1 - 5 所示.

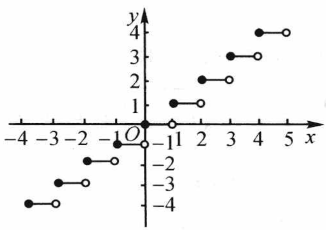

图 1 - 5

例如$[\sqrt{5}]=2$,$[0.3]=0$,$[0]=0$,$[-0.6]=-1$,$[-\frac{4}{3}]=-3$等.

对于分段函数需注意以下几点:

(1) 虽然在自变量的不同变化范围内计算函数值的算式不同,但定义的是一个函数;

(2) 它的定义域是各个表示式定义域的并集;

(3) 求自变量 x_0 的函数值时,先看 x_0 属于哪一个表示式的定义域,然后按此表示式计算 x_0 所对应的函数值.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -2\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ 3-x, & 0<x<3\end{cases}$,

求其定义域及 $f(-1)$,$f(2)$ 的值.

解 其定义域为 $D(f)=[-2,0)\cup\{0\}\cup(0,3)=[-2,3)$.

当 $x=-1$ 时,$f(x)=x+1$,故 $f(-1)=-1+1=0$.

当 $x=2$ 时，$f(x)=3-x$，故 $f(2)=3-2=1$.

例 5 设 $f(x)=(2|x+1|-|3-x|)x$，将 $f(x)$ 用分段函数表示.

解 当 $x<-1$ 时，$f(x)=-x(2x+2-x+3)=-x^2-5x$；
当 $-1\leqslant x<3$ 时，$f(x)=x(2x+2-3+x)=3x^2-x$；
当 $x\geqslant 3$ 时，$f(x)=x(2x+2-x+3)=x^2+5x$，因此

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-5x, & x<-1\\ 3x^2-x, & -1\leqslant x<3\\ x^2+5x, & x\geqslant 3\end{cases}.$$

习题 1.1

1. 下列各组函数是否相同，为什么？

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$；(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；　(4) $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$；

(5) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

2. 求下列函数的(自然)定义域.

(1) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4x}$；　(2) $y=\lg(5-x)+\lg(x-3)$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　(4) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

3. 求下列分段函数的定义域.

(1) $y=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3\\ x^2-1, & 3\leqslant |x|<4\end{cases}$；

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x-3, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2x+1, & 1<x<+\infty\end{cases}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-1\\ 1+x^2, & -1\leqslant x<2\\ \sin x, & x\geqslant 2\end{cases}$，求 $f(-2)$，

$f(-1)$，$f(\sqrt[3]{3})$，$f(\pi)$，$f(a-1)$.

5. 设 $f(x)=\lg 3$，求 $f(x+1)-f(x-2)$.

§ 1.2　具有某种特性的函数

研究函数的目的是为了了解它所具有的特性，以便掌握它的变化规律. 下面我们介绍具有不同特性的几类函数.

一、单调函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

在几何上，单调增加的函数，它的图形是随着 x 的增加而上升的曲线；单调减少的函数，它的图形是随着 x 的增加而下降的曲线.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的（图 1－6）. 再如 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的（图 1－7）.

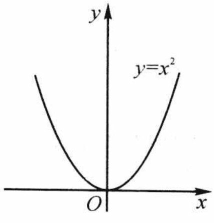

图 1－6

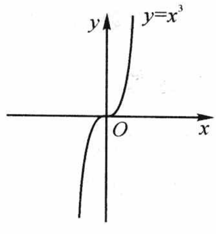

图 1－7

二、奇(偶)函数

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一

$x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点中心对称. 如图 1-8 所示.

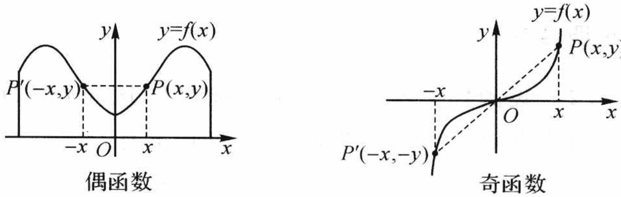

图 1-8

例如,$f(x) = x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. 再如 $f(x) = x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

例 1 判断 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 的奇偶性.

解 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$,有

$$f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

三、有界函数

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 M,使得对任意的 $x \in D$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界,或称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**. 否则成为**无界函数**.

不难看出,有界函数 $y = f(x)$ 的图形必介于两条平行线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间(如图 1-9).