工科类本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数

陈绍林 唐道远 卞兰芸 李海霞 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

GB 工科类本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数

陈绍林 唐道远 卞兰芸 李海霞 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈绍林,唐道远,卞兰芸,李海霞编著.—武汉:武汉大学出版社,2011.4

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-08538-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①陈…　②唐…　③卞…　④李…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第025267号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉中科兴业印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:11　字数:229千字　插页:1

版次:2011年4月第1版　　2011年4月第1次印刷

ISBN 978-7-307-08538-1/O·444　　定价:18.00元

21世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容简介

本书是根据国家教育部关于工科类本科数学基础课程教学的要求编写的,也是作者多年讲授线性代数课程的经验总结。

本书共5章,包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型。“线性代数”课程的特点是概念多,公式多,逻辑性强。本书保持了线性代数经典的内容和传统的体系,叙述通俗易懂,论证简明扼要。为便于学生自学,各章除编入适当的例题和适量的习题外,书末还附有两套综合练习,供学生复习阶段自检使用。本书可以作为工科类各专业的本、专科生“线性代数”课程的教材,也可以供工科类各专业本科生、硕士生及高等学校相关教师参考。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来,人们在认识世界和改造世界的过程中,数学作为一种精确的语言和一个有力的工具,在人类文明的进步和发展中,甚至在文化的层面上,一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平,由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议,策划,组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会,在一定范围内,联合多所高校合作编写数学课程系列教材,为高等学校从事数学教学和科研的教师,特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台,联合编写教材,交流教学经验,确保教材的编写质量,同时提高教材的编写与出版速度,有利于教材的不断更新,极力打造精品教材。

本着上述指导思想,我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有:武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广,为了便于区分,我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别,如:数学类本科生教材,注明:SB;理工类本科生教材,注明:LGB;文科与经济类教材,注明:WJ;理工类硕士生教材,注明:LGS,如此

等等,以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作,力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材,为高等教育的发展贡献力量!

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前　言

线性代数是代数学的一个分支，主要处理离散的线性关系问题。线性关系即指数学对象之间的关系是以一次形式来表达的。含有 n 个未知量的一次方程称为线性方程，关于变量是一次的函数称为线性函数，线性关系问题简称为线性问题，解线性方程组的问题是最简单的线性问题。作为一个独立的分支，线性代数在20世纪才形成，但这一学科的历史却源远流长。最古老的线性问题是线性方程组的解法，在中国古代的数学著作《九章算术》"方程"一章中，就已经有了比较完整的叙述，其中所述方法相当于对方程组的增广矩阵的行施行初等变换，消去未知量的方法。线性代数的含义随数学的发展而不断扩大，线性代数的理论和方法渗透到了数学的许多分支。线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用。现在，由于电子计算机技术的飞速发展和广泛应用，线性代数已经成为广大科技工作者不可或缺的数学工具。因而《线性代数》是我国理工科院校各专业本科生及专科生必修的重要基础课程，线性代数也是硕士研究生入学考试必考的内容之一，约占数学考试内容的20%。

依照国家教育部关于工科类本科数学基础课程教学的基本要求，为适应教材建设和教学实际的需要，我们编写了《线性代数》新教材。全书共分5章，依次为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型。"线性代数"这门数学课程的特点是概念多，公式多，逻辑性强，这一学科是理工科学生进行抽象思维、逻辑推理训练最强的一门课程。根据作者多年讲授线性代数课程的实践，针对学生中普遍感觉该课程内容抽象、不易理解和掌握的状况，新编教材在保持线性代数的经典内容和传统体系的基础上，力求做到叙述通俗易懂，论证简明扼要。为便于学生自学，各章除编入适当的例题和适量的习题（其中选用部分历年研究生入学考试的经典试题）外，书末还附有两套综合练习，供学生复习阶段自检使用。

本书由陈绍林、唐道远、卞兰芸、李海霞集体编写。其中李海霞负责第1章、卞兰芸负责第2章、陈绍林负责第3章、第4章、唐道远负责第5章。全书由陈绍林、唐道远统稿，刘金舜主审。

在编写过程中，我们参阅了国内外相关教材和专著，参考文献中未能全部列出，

在此对相关作者深表感谢！并对一直关心和支持本教材出版的同仁和老师们表示衷心的感谢！由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请专家、同仁和读者批评指正。

作　者

2011 年 1 月

目　录

第 1 章　行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,在数学的其他分支中也有重要作用.本章中心议题为行列式.围绕这个议题,先介绍二阶、三阶行列式,再给出 n 阶行列式的定义及性质,最后作为行列式的应用,给出解线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

将方程组(1-1)的式②乘以 a_{11} 减去式①乘 a_{21} 即可消去未知数 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

用类似的方法消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_2a_{12}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1-1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于记忆上述公式,引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

(符号“$\triangleq$”表示规定或记号)这样规定的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式,其中横的为行,竖的为列,二阶行列式有两行两列.数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-3)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-3)的 (i,j) 元.

上述式(1-3)定义的二阶行列式,可以用对角线法则来记忆.如图 1.1 所示,把

a_{11}到 a_{22}的实线称为主对角线，a_{12}到 a_{21}的虚线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差（左上右下两元素乘积取正号，右上左下两元素乘积取负号）.

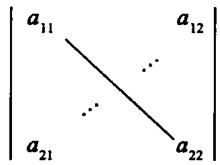

图 1.1

利用二阶行列式的记号，式（1-2）中 x_1,x_2 的分子也可以写成二阶行列式，分别记为 D_1、D_2，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

方程组（1-1）的解式（1-2）可以写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

于是有了下述的求方程组（1-1）解的法则，如果方程组（1-1）的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

则解为 $x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2)$，其中 $D_j(j=1,2)$ 为行列式 D 的第 j 列被方程组（1-1）右端常数项替换后的行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2=0 \\ 3x_1-1x_2=6 \end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-19\neq 0$，$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=-30$，$D_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=24$，所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{30}{19},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{24}{19}.$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-4}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}$$

式(1-5)称为数表(1-4)所确定的三阶行列式.

这样,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_1+a_{13}x_1=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_1+a_{23}x_1=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_1+a_{33}x_1=b_3 \end{cases} \tag{1-6}$$

若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1-6)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 为行列式 D 的第 j 列被方程组(1-6)右端常数项替换后的行列式.

上述定义的三阶行列式是一个实数,式(1-5)中的每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其中三项取正号,三项取负号,共 6 项,其计算遵循图 1.2 中的法则:先将行列式的第一列、第二列依次摆在行列式第三列的右边成第四列、第五列,如图 1.2 所示.

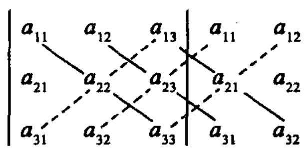

图 1.2

其中实线上三元素的乘积的项(即从左上到右下三元素乘积)取正号,而虚线上三元素的乘积的项(即从右上到左下三元素乘积)取负号,D 就是这六项的和.

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按计算三阶行列式的法则

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$D=1\times1\times(-1)+(-1)\times2\times1+(-1)\times2\times1-(-1)\times1\times1-1\times2\times1-(-1)\times2\times(-1)=-8.$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix}x+1 & 2 & -1\\ 2 & x+1 & 1\\ -1 & 1 & x+1\end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$D=(x+1)^3-2-2-(x+1)-(x+1)-4(x+1)=(x+1)^3-6(x+1)-4$$

由 $(x+1)^3-6(x+1)-4=0$，解得 $x_1=-2, x_2=1+\sqrt{3}, x_3=1-\sqrt{3}$.

上述计算行列式的法则只适合于二阶与三阶行列式，四阶以上的高阶行列式下面先给出定义.

§1.2 n 阶行列式的定义

1.2.1 全排列及逆序数

在给出 n 阶行列式的定义之前，先介绍排列和逆序.

例 1 用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个数字不重复的三位数?

这个答案是 $3!=6$ 个.

这六个不同的三位数是 123，132，213，231，312，321.

通常把考察的对象称为元素，例 1 中就是把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法问题.

一般地，把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法? 这里给出如下定义.

定义 1.2 把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列(简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数记为 P_n，P_n 可以作如下计算:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；如此继续下去，直到最后只剩一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法，由乘法原理得到

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

如例 1 中 $P_3=3\times2\times1=3!=6$.

对于 n 个不同的元素的 n 级全排列规定一个标准排列(例如 n 个不同的自然数，可以规定由小到大的排列为标准排列).

定义 1.3 在 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准排列不

同时，就称为有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数.

定义 1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数或零的排列称为偶排列，标准排列为偶排列.

如排列 54321 中 54 为一个逆序，该排列的逆序数为 8. 故该排列为偶排列.

对于一个 n 级排列的逆序数，可以这样求：

设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 n 个自然数的一个排列，考虑 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$，若比 i_k 大且排在 i_k 左边的元素有 t_k 个，就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k，所有元素的逆序数之总和

$$\tau = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k \tag{1-7}$$

为该排列的逆序数.

因此，一个排列的逆序数由其中每一个元素的逆序个数相加得到.

例 2 求排列 34215 的逆序数.

解 3 排在最前面，3 前面没有数，故其逆序数为 0，$t_1=0$.

4 前面只有 3，也没有比 4 大的数，故其逆序数为 0，$t_2=0$.

2 前面比 2 大的数有二个(3，4)，故其逆序数为 2，$t_3=2$.

1 前面比 1 大的数有三个(3，4，2)，故其逆序数为 3，$t_4=3$.

5 最大，前面没有比 5 大的，故其逆序数为 0，$t_5=0$.

于是该排列的逆序数为 $\tau=0+0+2+3+0=5$.

1.2.2 n 阶行列式的定义

二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-8}$$

(1)每一项都是不同行不同列两个元素的乘积；

(2)正、负项各一半；

(3)行标为标准排列，则列标为偶排列的项取正号，而列标为奇排列的项取负号.

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-9}$$

从中可以看出：

(1)三阶行列式共 3！ =6 项；

(2)式(1-9)右边的每一项恰是位于不同行不同列三个元素的乘积，故式(1-9)右边的任意项除正、负号外可以统写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 或 $a_{p_11}a_{p_22}a_{p_33}$；