

青年自学读物

解析几何

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

东北工学院
“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社

• 青年自学读物 •

解析几何

(修订本)

东北工学院“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社

一九七八年·沈阳

青年自学读物
解析几何

东北工学院“初等数学”编写组编

•
辽宁人民出版社出版

(沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

•
字数：160,000 开本：787×1092 $\frac{1}{2}$ 印张：8

1973年11月第1版 1978年4月第2版

1978年4月第2次印刷

统一书号：7090·38 定价：0.56元

编 者 的 话

编写这套“初等数学”的目的是帮助读者较系统地学习初等数学的基本知识，掌握准确而较熟练的运算方法，培养应用初等数学知识分析问题与解决问题的能力，提高自学和自己研究问题的能力。

遵照毛主席关于“教材要彻底改革”的指示，我们在编写过程中，力求贯彻政治与业务的统一，理论与实践相结合，以及少而精和便于自学等原则。由于我们水平有限，书中一定会有缺点和错误，诚恳希望革命师生及广大读者批评指正。

这套“初等数学”，分《代数》、《几何》、《三角》、《平面解析几何》四个分册出版，作为辽宁省各工科院校学生的文化补习教材，也适于各条战线的广大青年自学参考。

这套“初等数学”是在辽宁省教育局的领导下，经省内各工科院校共同研究讨论，由东北工学院负责执笔编写的。参加的院校有大连工学院、大连海运学院、大连铁道学院、大连轻工学院、大连水产专科学校、鞍山钢铁大学、阜新煤矿学院、抚顺化工学院、沈阳机电学院。此外，还有哈尔滨工业大学、吉林工业大学、长春地质学院、沈阳气压机厂“七·二一”工人大学、沈阳市沈河区教师学校、沈阳冶金机械学校、沈阳有色金属学校等单位应邀参加了本书的审查工作，谨致谢意。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组

一九七三年六月

再版说明

这套“初等数学”（包括《代数》《几何》《三角》《解析几何》四个分册）是在一九七三年版本的基础上修改编写的。在改编中，我们征求了辽宁省各工科院校师生使用过的意见，并吸收了读者提出的宝贵建议。但由于时间短促，水平有限，修改后又未及送交有关方面审阅，故仍会存在缺点，甚至有错误的地方，恳请读者批评指正。

东北工学院“初等数学”编写组

- 一九七八年一月

目 录

| | |
|--------------------|----|
| 第一章 基本问题 | 1 |
| 第一节 点与坐标 | 1 |
| 1.1 点与坐标的对应关系 | 1 |
| 习题 1—1 | 4 |
| 1.2 两点间距离 | 5 |
| 习题 1—2 | 7 |
| 1.3 线段定比分点 | 7 |
| 习题 1—3 | 10 |
| 第二节 曲线与方程 | 11 |
| 2.1 由曲线求方程——依条件定方程 | 12 |
| 习题 1—4 | 17 |
| 2.2 由方程作图形 | 18 |
| 习题 1—5 | 21 |
| 第三节 曲线的交点 | 22 |
| 习题 1—6 | 25 |
| 内容提要 | 26 |
| 总习题 | 27 |
| 第二章 直线 | 30 |
| 第一节 直线的方程 | 30 |
| 1.1 直线的斜率与截距 | 30 |

| | |
|------------------|-----------|
| 习题 2—1 | 33 |
| 1.2 直线的方程 | 34 |
| 习题 2—2 | 40 |
| 第二节 二元一次方程与直线 | 42 |
| 习题 2—3 | 45 |
| 第三节 两直线间的关系 | 47 |
| 3.1 两直线的夹角 | 47 |
| 3.2 两直线的平行和垂直的条件 | 48 |
| 习题 2—4 | 54 |
| 3.3 点到直线的距离 | 56 |
| 习题 2—5 | 59 |
| 内容提要 | 60 |
| 总习题 | 61 |
| 第三章 二次曲线 | 66 |
| 第一节 抛物线 | 66 |
| 1.1 抛物线及其标准方程 | 66 |
| 1.2 抛物线的性质 | 68 |
| 1.3 其它形式的抛物线方程 | 70 |
| 习题 3—1 | 73 |
| 第二节 椭圆 | 75 |
| 2.1 椭圆及其标准方程 | 75 |
| 2.2 椭圆的性质 | 78 |
| 习题 3—2 | 83 |
| 第三节 双曲线 | 84 |
| 3.1 双曲线及其标准方程 | 84 |

| | |
|-----------------------|-----|
| 3.2 双曲线的性质 | 87 |
| 习题 3—3 | 96 |
| 第四节 坐标轴的平移和旋转 | 96 |
| 4.1 坐标轴的平移及其应用 | 98 |
| 习题 3—4 | 106 |
| 4.2 坐标轴的旋转及其应用 | 108 |
| 习题 3—5 | 115 |
| 4.3 一般二次方程 | 116 |
| 习题 3—6 | 122 |
| 内容提要 | 123 |
| 总习题 | 125 |
| 第四章 极坐标和参数方程 | 132 |
| 第一节 极坐标 | 132 |
| 1.1 极坐标系 | 132 |
| 1.2 曲线与极坐标方程 | 135 |
| 1.3 直角坐标与极坐标的关系 | 144 |
| 1.4 圆锥曲线的极坐标方程 | 148 |
| 习题 4—1 | 152 |
| 第二节 参数方程 | 155 |
| 2.1 参数方程概念 | 155 |
| 2.2 一些常用曲线的参数方程 | 164 |
| 习题 4—2 | 171 |
| 内容提要 | 173 |
| 总习题 | 175 |
| 第五章 空间解析几何 | 179 |

| | |
|---------------------|-----|
| 第一节 空间直角坐标 | 179 |
| 1.1 空间直角坐标 | 179 |
| 1.2 两点间的距离 | 182 |
| 1.3 线段定比分点 | 183 |
| 习题 5—1 | 185 |
| 第二节 空间直线 | 186 |
| 2.1 直线的方向角与方向数 | 186 |
| 2.2 二直线平行与垂直条件和夹角公式 | 189 |
| 2.3 直线方程 | 192 |
| 习题 5—2 | 195 |
| 第三节 平面 | 196 |
| 3.1 平面方程 | 196 |
| 3.2 点到平面的距离 | 199 |
| 习题 5—3 | 200 |
| 第四节 曲面与空间曲线 | 202 |
| 4.1 球面与柱面 | 202 |
| 4.2 曲线方程 | 205 |
| 4.3 几个二次曲面 | 209 |
| 习题 5—4 | 215 |
| 内容提要 | 217 |
| 总习题 | 219 |
| 习题答案 | 222 |

恩格斯指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系……。”解析几何就是以坐标法为桥梁，使形和数结合起来，用代数方法研究几何问题的一门数学学科。在这里，空间形式的几何性质可以通过数量关系显示出来；而数量关系的一些代数规律又可以借助几何图形得到解释。因此，解析几何主要是研究这两个方面的问题，即如何由曲线建立它的方程以及如何由方程讨论曲线的性质。

第一章 基本问题

第一节 点与坐标

1.1 点与坐标的对应关系

1. 有向线段

我们以前所迁到的线段是没有方向的。例如，三角形的边、圆的弦、球的直径等等都是没有方向的线段，它们的大小是用正数表出的。

今后我们讨论到的线段，有的是有方向。例如，数轴上的线段、表示力的线段等等。有方向的线段叫做有向线段。有向线段 AB 如果由 A 到 B 的方向是正的，则 BA 就是负的。

故

$$AB = -BA.$$

若有向线段 AB 在数轴上, AB 与数轴同方向时, 它就是正的; 反方向时, 它就是负的. 有向线段除了用数表示大小外, 还要用正或负表示方向. 例如

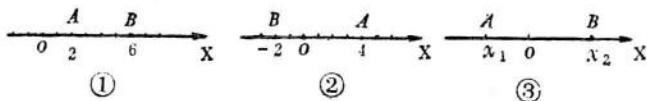


图 1-1

在图 1-1 ①中, $AB = OB - OA = 6 - 2 = 4$;

在图 1-1 ②中, $AB = AO + OB = -OA + OB$

$$= OB - OA = (-2) - 4 = -6.$$

一般地, 在图 1-1 ③中,

$$\because AB = AO + OB = -OA + OB,$$

$$\therefore AB = OB - OA = x_2 - x_1.$$

上面这个线段公式是以后推导公式常用的, 要记住它.

今后线段与有向线段都是用 AB 表示. 在与方向无关的地方, 如 AB 是三角形的边、 AB 是圆的弦、 AB 是两点间的距离等, 这时 AB 所表示的是线段. 在与方向有关的地方, 如 AB 在数轴上或与数轴平行的直线上、 AB 表示力或速度等, 这时 AB 所表示的是有向线段.

2. 点与坐标对应关系

坐标法在代数中已经学过, 这里只简单复习一下.

在平面上画两条互相垂直的直线：横的叫做 x 轴（或横轴），规定向右的方向为正方向；纵的叫做 y 轴（或纵轴），规定向上的方向为正方向。两轴的交点 O 叫做坐标原点，简称原点。两轴上的长度单位一般说来是相等的（也可以是不相等的）。这样，就建立了一个平面直角坐标系。

建立了坐标系之后，平面上任意一点的位置，就可以用一对有顺序的数来表示。例如，

A 为图 1—2 中平面上一个点，我们从 A 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，交 x 轴于 E ，则 $OE = 3$ ；交 y 轴于 F ，则 $OF = 4$ 。3 和 4 分别叫做 A 点的横坐标和纵坐标。这一对有顺序的数 3 和 4 叫做 A 点的坐标，写为 $A(3, 4)$ 。

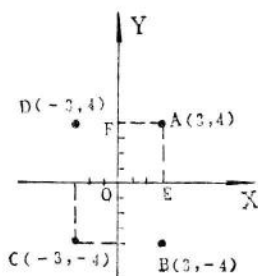


图 1—2

反过来，对于任意一对有顺序的数，例如 $(-3, -4)$ ，我们可以在平面上确定一点 C ，使 C 点的横坐标和纵坐标分别为 -3 和 -4 。

一般地，在建立了坐标系之后，对于平面上的任意一点，存在一对表示这个点的顺序的数；反过来，对于任意一对有顺序的数，也存在一个以这一对数为坐标的点。这样，平面上的点和一对有顺序的数之间就建立了一一对应的关系。

通过坐标系，把平面上的点与一对有顺序的数（即点的坐标）联系起来的方法，叫做坐标法。

例 在图 1—2 的坐标系 XOY 中，求点 $A(3, 4)$ 关于 x 轴、 y 轴以及原点 O 的对称点的坐标。

解：从平面几何里一个点关于轴对称和关于中心对称的概念，容易知道：点 $B(3, -4)$ 是点 $A(3, 4)$ 关于 x 轴的对称点；点 $D(-3, 4)$ 是点 $A(3, 4)$ 关于 y 轴的对称点；点 $C(-3, -4)$ 是点 $A(3, 4)$ 关于原点 O 的对称点。

由上例的启发，我们可总结出下面的结果：

点 (a, b) 与点 $(a, -b)$ 关于 x 轴是对称的；

点 (a, b) 与点 $(-a, b)$ 关于 y 轴是对称的；

点 (a, b) 与点 $(-a, -b)$ 关于原点对称的。

【习 题 1—1】

1. 标出模具俯视图(图 1—3)上各元孔中心的坐标，并指出对称性。

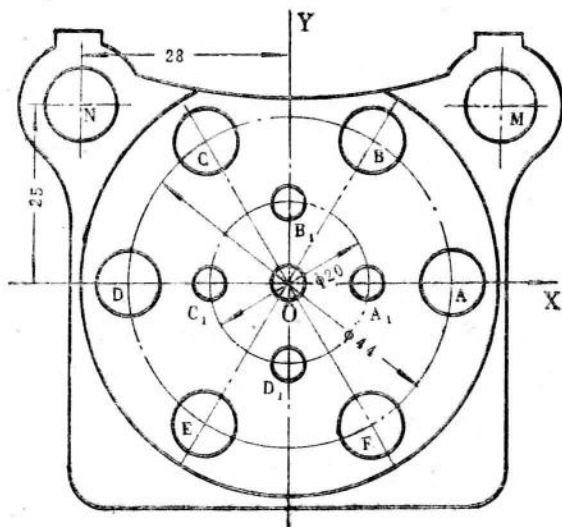


图 1—3

2. 在直角坐标系中, 描出下列各点, 并指出哪些点关于 x 轴对称? 哪些点关于 y 轴对称? 哪些点关于原点对称?

(1,3), (1,-3), (-1,3), (-1,-3),
(0,-4), (4,0), (-4,0), (0,4) .

1.2 两点间距离

建立了坐标系, 就可用两点的坐标来表示两点间的距离.

已知两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ (图 1-4), 求这两点间的距离公式.

过 $M_1(x_1, y_1)$ 作 y 轴的平行线, 过 $M_2(x_2, y_2)$ 作 x 轴的平行线, 两条线交于 M . 由图 1-4, 知 M 点的坐标为 (x_1, y_2) . 由于 M_1M_2 是直角 $\triangle M_1MM_2$ 的斜边, 根据勾股定理得

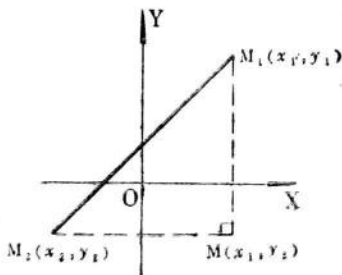


图 1-4

$$M_1M_2 = \sqrt{(M_2M)^2 + (MM_1)^2} \dots (1)$$

而 $M_2M = x_1 - x_2$, $MM_1 = y_1 - y_2$.

代入 (1) 式中, 就得两点间的距离公式:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

距离公式是解析几何里的一个基本公式, 它是用代数方法研究几何问题的一个简单例子.

例 1 机床齿轮箱外壳的轴孔中心坐标是 $A(120, 210)$, $B(265, 530)$, $C(350, 315)$ (图 1-5), 求 A, B 两孔中心距及 A, C 两孔的中心距.

解：利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(265-120)^2 + (530-210)^2} \\ &= \sqrt{145^2 + 320^2} \\ &= \sqrt{21025 + 102400} \\ &= \sqrt{123425} \\ &= 351 \text{ (毫米)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(350-120)^2 + (315-210)^2} \\ &= \sqrt{230^2 + 105^2} \\ &= \sqrt{63925} \\ &= 253 \text{ (毫米)}. \end{aligned}$$

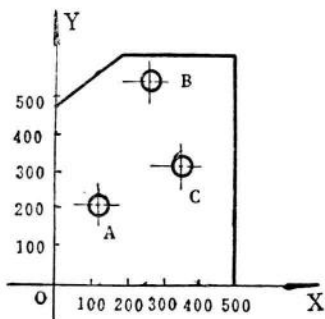


图 1-5

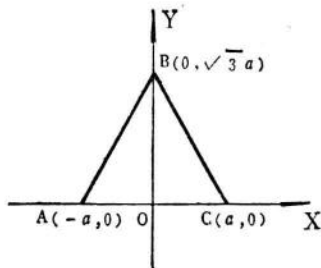


图 1-6

例 2 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a, 0)$, $B(0, \sqrt{3}a)$, $C(a, 0)$ (图 1-6)。求证这个三角形是等边三角形。

$$\begin{aligned} \text{证明: } CA &= \sqrt{(-a-a)^2 + (0-0)^2} = 2a, \\ BC &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-\sqrt{3}a)^2} = 2a, \\ AB &= \sqrt{[0-(-a)]^2 + (\sqrt{3}a-0)^2} = 2a. \end{aligned}$$

$\therefore AB = BC = CA$, 即 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

【习 题 1—2】

1. 求下列两点间距离:

$$(2,1), (5,1); \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$(-1,6), (2,1); (1,1), (\cos \theta_1, \sin \theta_1).$$

2. 在 y 轴上找一点, 使它与点 $(4, -6)$ 的距离为 5.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(1,4), B(-5,0), C(-2, -1)$. 求这个三角形的周长.

4. 证明顶点为 $(1,4), (4,1), (5,5)$ 的三角形是一个等腰三角形.

5. 甲船在一港口的东 50 哩, 北 30 哩. 乙船在同一港口的东 17 哩, 南 26 哩. 求两船间的距离.

1.3 线段定比分点

已知一线段两端点坐标, 求分割此线段为一定比的分点坐标的公式, 就是所谓定比分点公式.

设 $P_1(x_1, y_1)$,
 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上
某线段两端点的坐标, 在线段 P_1P_2 上取
一点 P , 使 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$
($\lambda \neq -1$), 现在求
 P 点的坐标 (x, y) (图
1—7).

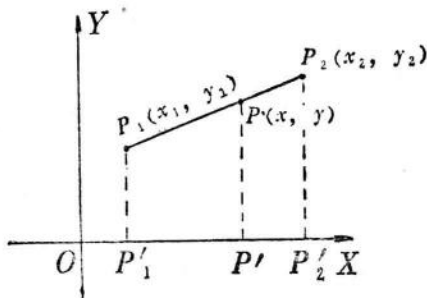


图 1—7

解：从 P_1, P, P_2 向 x 轴作垂线，设垂足分别为 P_1', P', P_2' ，由几何中关于平行线截线定理知：

$$\frac{P_1'P'}{P'P_2'} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda, \quad (1)$$

而 $P_1'P' = x - x_1, P'P_2' = x_2 - x$ ，代入 (1) 式，得

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x_2 - x} &= \lambda, \\ x - x_1 &= \lambda(x_2 - x), \\ x + \lambda x &= x_1 + \lambda x_2, \\ \therefore x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \end{aligned}$$

同样可得

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

因此得线段定比分点公式：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

如果 P 点在 P_1P_2 的延长线上，这时 P_1P 与 PP_2 的方向不同，所以比值 λ 是负的。

特别，当 $\lambda = 1$ 时， P 就成为线段 P_1P_2 的中点，因此得中点公式：

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}$$

例 1 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标分别为 $P_1(x_1,$

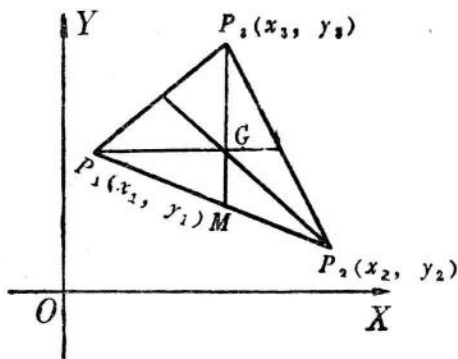


图 1-8