青年自学读物

解析几何

JIEXI JIHE

东北工学院
“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社

·青年自学读物·

解析几何

（修订本）

东北工学院“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社

一九七八年·沈阳

青年自学读物
解析几何
东北工学院“初等数学”编写组编
•
辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行
朝阳六六七厂印刷
•
字数：160,000 开本：787×1092 1/32 印张：8
1973年11月第1版 1978年4月第2版
1978年4月第2次印刷
统一书号：7090·38 定价：0.56元

编者的话

编写这套“初等数学”的目的是帮助读者较系统地学习初等数学的基本知识，掌握准确而较熟练的运算方法，培养应用初等数学知识分析问题与解决问题的能力，提高自学和自己研究问题的能力。

遵照毛主席关于**“教材要彻底改革”**的指示，我们在编写过程中,力求贯彻政治与业务的统一,理论与实践相结合,以及少而精和便于自学等原则。由于我们水平有限,书中一定会有缺点和错误，诚恳希望革命师生及广大读者批评指正。

这套“初等数学”，分《代数》、《几何》、《三角》、《平面解析几何》四个分册出版，作为辽宁省各工科院校学生的文化补习教材，也适于各条战线的广大青年自学参考。

这套“初等数学”是在辽宁省教育局的领导下，经省内各工科院校共同研究讨论，由东北工学院负责执笔编写的。参加的院校有大连工学院、大连海运学院、大连铁道学院、大连轻工学院、大连水产专科学校、鞍山钢铁大学、阜新煤矿学院、抚顺化工学院、沈阳机电学院。此外，还有哈尔滨工业大学、吉林工业大学、长春地质学院、沈阳气压机厂“七·二一”工人大学、沈阳市沈河区教师学校、沈阳冶金机械学校、沈阳有色金属学校等单位应邀参加了本书的审查工作，谨致谢意。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组

一九七三年六月

再版说明

这套“初等数学”（包括《代数》《几何》《三角》《解析几何》四个分册）是在一九七三年版本的基础上修改编写的。在改编中，我们征求了辽宁省各工科院校师生使用过的意见，并吸收了读者提出的宝贵建议。但由于时间短促，水平有限，修改后又未及送交有关方面审阅，故仍会存在缺点，甚至有错误的地方，恳请读者批评指正。

东北工学院“初等数学”编写组

一九七八年一月

目　录

恩格斯指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系……。"解析几何就是以坐标法为桥梁，使形和数结合起来，用代数方法研究几何问题的一门数学学科．在这里，空间形式的几何性质可以通过数量关系显示出来；而数量关系的一些代数规律又可以借助几何图形得到解释．因此，解析几何主要是研究这两个方面的问题，即如何由曲线建立它的方程以及如何由方程讨论曲线的性质．

第一章　基本问题

第一节　点与坐标

1·1　点与坐标的对应关系

1．有向线段

我们以前所迂到的线段是没有方向的．例如，三角形的边、元的弦、球的直径等等都是没有方向的线段，它们的大小是用正数表出．

今后我们讨论到的线段，有的是有方向．例如，数轴上的线段、表示力的线段等等．有方向的线段叫做*有向线段*．有向线段 AB 如果由 A 到 B 的方向是正的，则 BA 就是负的．

故

$$AB = -BA.$$

若有向线段 AB 在数轴上，AB 与数轴同方向时，它就是正的；反方向时，它就是负的．有向线段除了用数表示大小外，还要用正或负表示方向．例如

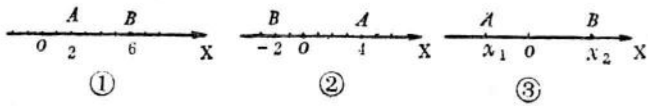

图 1—1

在图 1—1 ①中，$AB = OB - OA = 6 - 2 = 4$；

在图 1—1 ②中，$AB = AO + OB = -OA + OB$

$$= OB - OA = (-2) - 4 = -6.$$

一般地，在图 1—1 ③中，

$\because \quad AB = AO + OB = -OA + OB$,

$\therefore \quad AB = OB - OA = x_2 - x_1$.

上面这个线段公式是以后推导公式常用的，要记住它．

今后线段与有向线段都是用 AB 表示．在与方向无关的地方，如 AB 是三角形的边、AB 是元的弦、AB 是两点间的距离等，这时 AB 所表示的是线段．在与方向有关的地方，如 AB 在数轴上或与数轴平行的直线上、AB 表示力或速度等，这时 AB 所表示的是有向线段．

2．点与坐标对应关系

坐标法在代数中已经学过，这里只简单复习一下．

在平面上画两条互相垂直的直线：横的叫做 x 轴（或横轴），规定向右的方向为正方向；纵的叫做 y 轴（或纵轴），规定向上的方向为正方向．两轴的交点 O 叫做坐标原点，简称原点．两轴上的长度单位一般说来是相等的（也可以是不相等的）．这样，就建立了一个平面直角坐标系．

建立了坐标系之后，平面上任意一点的位置，就可以用一对有顺序的数来表示．例如，A 为图 1—2 中平面上一个点，我们从 A 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，交 x 轴于 E，则 $OE=3$；交 y 轴于 F，则 $OF=4$．3 和 4 分别叫做 A 点的横坐标和纵坐标．这一对有顺序的数 3 和 4 叫做 A 点的坐标，写为 A（3，4）．

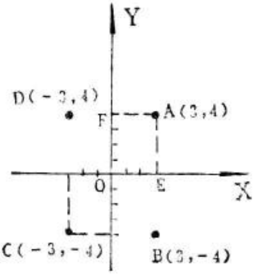

图 1—2

反过来，对于任意一对有顺序的数，例如（-3，-4），我们可以在平面上确定一点 C，使 C 点的横坐标和纵坐标分别为 -3 和 -4．

一般地，在建立了坐标系之后，对于平面上的任意一点，存在一对表示这个点的顺序的数；反过来，对于任意一对有顺序的数，也存在一个以这一对数为坐标的点．这样，平面上的点和一对有顺序的数之间就建立了一一对应的关系．

通过坐标系，把平面上的点与一对有顺序的数（即点的坐标）联系起来的方法，叫做坐标法．

例　在图 1—2 的坐标系 XOY 中，求点 A（3，4）关于 x 轴、y 轴以及原点 O 的对称点的坐标．

解：从平面几何里一个点关于轴对称和关于中心对称的概念，容易知道：点$B(3,-4)$是点$A(3,4)$关于x轴的对称点；点$D(-3,4)$是点$A(3,4)$关于y轴的对称点；点$C(-3,-4)$是点$A(3,4)$关于原点O的对称点。

由上例的启发，我们可总结出下面的结果：

点(a,b)与点$(a,-b)$关于x轴是对称的；

点(a,b)与点$(-a,b)$关于y轴是对称的；

点(a,b)与点$(-a,-b)$关于原点是对称的。

【习　题　1—1】

1．标出模具俯视图（图1—3）上各元孔中心的坐标，并指出对称性。

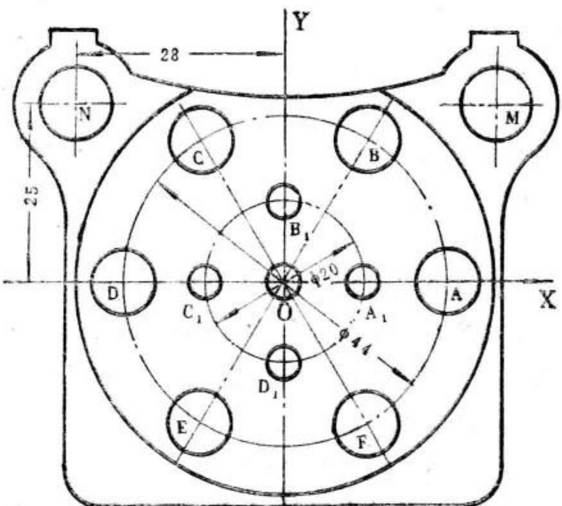

图　1—3

2．在直角坐标系中，描出下列各点，并指出哪些点关于 x 轴对称？哪些点关于 y 轴对称？哪些点关于原点对称？

(1,3)，(1,-3)，(-1,3)，(-1,-3)，

(0,-4)，(4,0)，(-4,0)，(0,4)．

1·2 两点间距离

建立了坐标系，就可用两点的坐标来表示两点间的距离．

已知两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$（图 1—4），求这两点间的距离公式．

过 $M_1(x_1, y_1)$ 作 y 轴的平行线，过 $M_2(x_2, y_2)$ 作 x 轴的平行线，两条线交于 M．由图 1—4，知 M 点的坐标为 (x_1, y_2)．由于 M_1M_2 是直角 $\triangle M_1MM_2$ 的斜边，根据勾股弦定理得

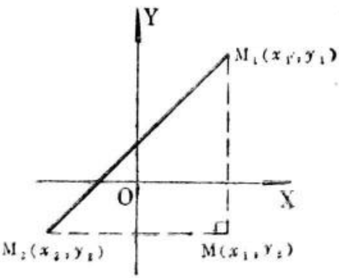

图 1—4

$$M_1M_2=\sqrt{(M_2M)^2+(MM_1)^2}. \quad \cdots (1)$$

而 $\qquad M_2M=x_1-x_2,\quad MM_1=y_1-y_2.$

代入（1）式中，就得两点间的距离公式：

$$M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

距离公式是解析几何里的一个基本公式，它是用代数方法研究几何问题的一个简单例子．

例 1　机床齿轮箱外壳的轴孔中心坐标是 $A(120,210)$，$B(265,530)$，$C(350,315)$（图 1—5），求 A，B 两孔中心距及 A，C 两孔的中心距．

解：利用两点间距离公式，得

$$AB=\sqrt{(265-120)^2+(530-210)^2}$$
$$=\sqrt{145^2+320^2}$$
$$=\sqrt{21025+102400}$$
$$=\sqrt{123425}$$
$$=351\text{（毫米）},$$
$$AC=\sqrt{(350-120)^2+(315-210)^2}$$
$$=\sqrt{230^2+105^2}$$
$$=\sqrt{63925}$$
$$=253\text{（毫米）}.$$

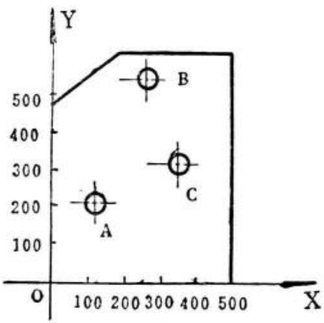

图 1—5

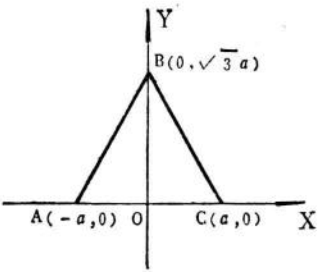

图 1—6

例 2　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3}a)$，$C(a,\ 0)$（图 1—6）．求证这个三角形是等边三角形．

证明：$CA=\sqrt{(-a-a)^2+(0-0)^2}=2a$，

$BC=\sqrt{(a-0)^2+(0-\sqrt{3}a)^2}=2a$，

$AB=\sqrt{[0-(-a)]^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2a$．

$\therefore$ $AB=BC=CA$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形．

【习 题 1—2】

1．求下列两点间距离：

$(2,1)$，$(5,1)$；$\left(-\frac{1}{2},1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

$(-1,6)$，$(2,1)$；$(1,1)$，$(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$．

2．在 y 轴上找一点，使它与点 $(4,-6)$ 的距离为5．

3．已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(1,4)$，$B(-5,0)$，$C(-2,-1)$．求这个三角形的周长．

4．证明顶点为$(1,4)$，$(4,1)$，$(5,5)$ 的三角形是一个等腰三角形．

5．甲船在一港口的东50浬，北30浬．乙船在同一港口的东17浬，南26浬．求两船间的距离．

1·3 线段定比分点

已知一线段两端点坐标，求分割此线段为一定比的分点坐标的公式，就是所谓定比分点公式．

设 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 是平面上某线段两端点的坐标，在线段 P_1P_2 上取一点 P，使 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ $(\lambda\neq-1)$，现在求 P 点的坐标(x,y)(图 1—7)．

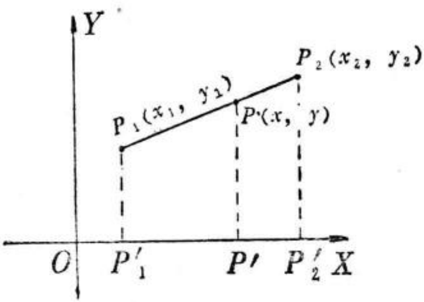

图 1—7

解：从 P_1，P，P_2向 x 轴作垂线，设垂足分别为 P_1'，P'，P_2'，由几何中关于平行线截线定理知：

$$\frac{P_1'P'}{P'P_2'}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda, \tag{1}$$

而 $P_1'P'=x-x_1$，$P'P'_2=x_2-x$，代入（1）式，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

$$x+\lambda x=x_1+\lambda x_2,$$

$$\therefore\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同样可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此得线段定比分点公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

如果 P 点在 P_1P_2的延长线上，这时 P_1P 与 PP_2的方向不同，所以比值 λ 是负的.

特别，当 $\lambda=1$ 时，P 就成为线段 P_1P_2 的中点，因此得中点公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

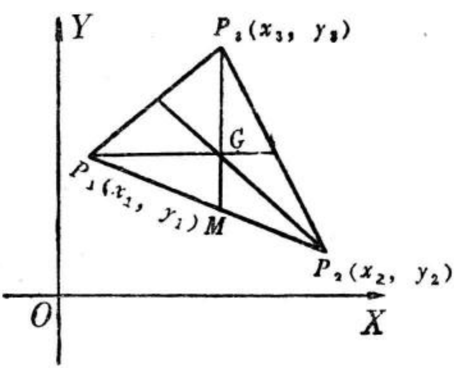

图 1—8

例 1　设三角形$P_1P_2P_3$的顶点坐标分别为 $P_1(x_1,$