

单樽数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版


# 单樽老师 教你学数学

## 平面几何中的小花

单樽◎著

当读书不只是为了考试  
你才会真正爱上数学  
单樽老师娓娓道来  
与你分享他所理解的数学之美



 华东师范大学出版社

 江苏教育出版社  
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单樽数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

# 单樽老师 教你学数学


.....

## 平面几何中的小花

单樽◎著



 华东师范大学出版社

 江苏教育出版社  
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

## 图书在版编目(CIP)数据

平面几何中的小花/单搏著. —上海: 华东师范大学出版社, 2010

(单搏老师教你学数学)

ISBN 978 - 7 - 5617 - 8051 - 0

I. ①平… II. ①单… III. ①平面几何—高中—教学参考资料 IV. ①634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 171449 号

## 单搏老师教你学数学 平面几何中的小花

著 者 单 搏  
策划组稿 倪 明 孔令志  
审读编辑 倪 明  
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社  
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062  
网 址 [www.ecnupress.com.cn](http://www.ecnupress.com.cn)  
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105  
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887  
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口  
网 店 <http://ecnup.taobao.com/>

印 刷 者 崇明裕安印刷有限公司  
开 本 890 × 1240 32 开  
印 张 6.75  
字 数 155 千字  
版 次 2011 年 3 月第一版  
印 次 2011 年 3 月第一次  
书 号 ISBN 978 - 7 - 5617 - 8051 - 0/G · 4707  
定 价 16.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)



## 单墀

我国著名的数学传播、普及和数学竞赛专家。1964年毕业于扬州师范学院数学系，在中学、大学任教40多年。1983年获理学博士学位（我国首批18名博士之一），1991年获全国优秀教师称号，1991年7月起享受政府特殊津贴，1992年被评为国家有突出贡献的中青年专家，1995年被评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任，中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长，国家教委理科试验班专家组组长，南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究，很多成果达到国际先进水平。1989年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练，1990年作为领队，率队参赛IMO均获总分第一，为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

## 总 序

科学昌明,既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘,也需要普及工作者耕耘播种、热心培育。

普及工作很重要。如果将科学研究比作金字塔的塔尖,那么普及工作就是金字塔的底。底宽,塔才高。

科学研究不容易。从事研究,需要才能、努力与机遇。能够从事研究的人不多,好像阳春白雪,曲高和寡。他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化,才能广为人知,才能使更多的人关心、了解、理解,才能引起公众的兴趣,吸引更多的新人一同参加研究。Fermat 大定理就是一个典型的例子。虽然只有 Wiles 一个人给出了证明,看懂证明的不过十几个人或几十个人,但对大定理感兴趣的人成千上万。他们都是普及读物的读者。

普及工作使千万人受益,我就是其中之一。

在学生时代,我读过不少数学普及读物。如刘薰宇的《数学园地》,孙泽瀛的《数学方法趣引》,许苑舫的《几何定理和证题》,Casey 的《近世几何学初编》,日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》,前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等,以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等。还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等。这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想,眼界大开,而且使我对数学产生了浓厚的兴趣,甚至立志要当一名数学家。

但当数学家的梦想却难以实现。因为那时政治运动频仍。读书,被认为“走白专道路”,会横遭批判。史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫。

“四人帮”倒台后，我才有幸到中国科学技术大学作研究生。在1983年成为首批18名国产博士之一。但这一年我已年届不惑，从事数学研究的黄金时期业已过去。我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文，不如做普及工作对社会更有贡献。

对普及工作，我有浓厚的兴趣，也有一定的基础：

1. 由于做过一些研究工作，能够了解较新的材料，能够较为准确地把握数学及有关史料。

2. 由于当过多年教师，文字也还通顺，能够注意趣味性与深入浅出。

1977年恢复高考后，一度出现读书的热潮。这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》，受到普遍的好评。稍后，上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿，我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》，在1980年出版。以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》（与葛军合作）、《不定方程》（与余红兵合作）、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等。

由于文革后，大家渴望读书。而此前的书大多毁于“文革”劫火。因此新出的书颇受欢迎，其中也包括了写的小册子。

冯克勤先生说：“不要小看了这些小册子，它们将数学的美带给大众。”（冯克勤《评审意见》）

杨世明、杨学校先生说：“直到1980年，大家才盼来单薄的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法，而

且激发了研究兴趣。今天初等不等式研究中的许多骨干，都曾从该书获益。单墀的《几何不等式》一书，无疑是这一阶段的标志性的著作。”（杨世明，杨学枝《初等不等式在中国》，载《中学数学研究》2007年第1期）。

还有一些数学教师见到我客气地说：“我们都是读您的书长大的。”

这些评论当然是过奖的溢美之词，但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情。

近年来，急功近利的风气在学校蔓延。要根治这种歪风，还得提倡读书。要使广大青少年“热爱知识，渴求学问”（卡耐基《林肯传》，人民文学出版社，2005年第16页）。

首先，得多出一些好书，供大家阅读。

读书是天下第一件好事，读好书是人生第一件乐事，好读书，读好书，进步就迅速。有些学生学数学，只做题，从不看书。这种做法是难以进步的。

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集。这7种小册子修订后，重新出版，希望能有较多的读者，特别是青少年读者。希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣。

## 前 言

数学大花园里,几何是最美丽的部分.我们从平面几何中撷取几朵小花,供大家欣赏,其中有我们近期遇到的问题,也有著名的经典结果.

各节之间没有特别紧密的联系.内容较为接近的,归入一章.本来没有章名,后来写了两首歪诗,权当章名.一首是:

“数学花园大,  
几何算一家.  
春日兴致好,  
请来看小花.”



# 目 录

总序 / 1

前言 / 1

## 1 数学花园大 / 1

1.1 帕普斯定理 / 1

1.2 帕斯卡定理 / 2

1.3 无穷远点 / 4

1.4 德沙格定理 / 6

## 2 几何算一家 / 7

2.1 对称 / 7

2.2 多么奇妙的一颗星 / 8

2.3 面积问题(一) / 9

2.4 面积问题(二) / 12

2.5 中心对称 / 13

2.6 部分与整体相似 / 14

2.7 对角线的中点与面积 / 15

2.8 处处留心皆学问 / 16

2.9 圆规作图 / 18

2.10 闭折线的长 / 19

2.11 正方形中的四个点 / 21

2.12 跳出框框 / 24

2.13 海外称王 / 27

2.14 整齐与对称 / 28

### 3 春日兴致好 / 31

- 3.1 昂蒂费尔师傅的奇遇 / 31
- 3.2 重心 / 33
- 3.3 塞瓦定理 / 35
- 3.4 爱因斯坦认为优雅的证明 / 37
- 3.5 三角形的五心 / 38
- 3.6 垂心的一个性质 / 39
- 3.7 逐步推广 / 40
- 3.8 垂心乎? (1) / 42
- 3.9 垂心乎? (2) / 44
- 3.10 位似、欧拉线 / 45
- 3.11 九点圆 / 47
- 3.12 西摩松线 / 48
- 3.13 欧拉公式 / 49
- 3.14 拿破伦定理 / 51
- 3.15 蝴蝶定理 / 53
- 3.16 平方差与根轴 / 55

### 4 请来看小花 / 57

- 4.1 完全不用三角 / 57
- 4.2 掩卷一思 / 58
- 4.3 意料之外 / 59
- 4.4 平行四边形 / 60
- 4.5 边界形状 / 62
- 4.6 求角的值(一) / 64
- 4.7 求角的值(二) / 67
- 4.8 求角的值(三) / 67
- 4.9 求角的值(四) / 69
- 4.10 一道习题的编制 / 71

- 4.11 相切的圆串 / 72
- 4.12 阿基米德的一个定理 / 75
- 4.13 平分周长 / 76
- 4.14 学校选址(一) / 77
- 4.15 学校选址(二) / 80
- 4.16 黄蓉分饼(一) / 83
- 4.17 黄蓉分饼(二) / 84
- 4.18 垂心? / 86
- 4.19 寻找简单的证明 / 89
- 5 学海无涯 / 92
  - 5.1 加法定理 / 92
  - 5.2 余弦 / 93
  - 5.3 角平分线与外接圆 / 94
  - 5.4 又是角平分线 / 96
  - 5.5 注意几何意义 / 98
  - 5.6 得用三角 / 102
  - 5.7 2000年中国数学奥林匹克试题 / 103
- 6 乐作舟 / 106
  - 6.1 吴伟朝先生的问题 / 106
  - 6.2 圆的位似中心 / 108
  - 6.3 马尔法蒂问题 / 110
  - 6.4 叶中豪先生的问题 / 110
  - 6.5 国际会议上的问题 / 112
  - 6.6 孙斌勇的问题 / 113
  - 6.7 寺庙里的几何题(一) / 115
  - 6.8 寺庙里的几何题(二) / 118
  - 6.9 寺庙里的几何题(三) / 124
  - 6.10 五圆定理与四圆定理 / 134

- 6.11 俄罗斯杀手 / 135
- 7 逍遥自在 / 140
  - 7.1 一道波兰竞赛题 / 140
  - 7.2 直角三角形内一点 / 141
  - 7.3 平方和 / 143
  - 7.4 六点共圆 / 144
  - 7.5 三线共点与三点共线 / 146
  - 7.6 比 / 147
  - 7.7 何时  $OH = 2R$ ? / 149
  - 7.8 直线与圆相切 / 150
  - 7.9 圆内接四边形对边之差 / 151
  - 7.10 等角共轭点 / 153
  - 7.11 凸六边形 / 155
  - 7.12 直线与圆相切 / 157
  - 7.13 三个四边形的面积 / 159
  - 7.14 俄罗斯竞赛题(一) / 160
  - 7.15 俄罗斯竞赛题(二) / 162
- 8 任我游 / 166
  - 8.1 逆平行线 / 166
  - 8.2 共轭重心(一) / 168
  - 8.3 共轭重心(二) / 170
  - 8.4 塔克圆 / 171
  - 8.5 莱莫恩圆 / 172
- 9 已觉此处景物好 / 175
  - 9.1 四点间的距离 / 175
  - 9.2 笛卡儿关于圆的定理 / 177
  - 9.3 德沙格定理的证明 / 179
  - 9.4 五点确定二次曲线 / 181

- 9.5 帕斯卡定理的证明 / 183
- 10 更有好景 / 187
  - 10.1 格点多边形 / 187
  - 10.2 直线的条数 / 188
  - 10.3 两人博弈 / 189
  - 10.4 同色的等腰三角形 / 190
  - 10.5 折纸穿针 / 191
  - 10.6 先猜后证 / 193
  - 10.7 距离为有理数 / 194
  - 10.8 覆盖 / 196
- 11 在前头 / 198
  - 11.1 问题征解(一) / 198
  - 11.2 问题征解(二) / 198

## 1

## 数学花园大

## 1.1 帕普斯定理

数学,是一门博大精深的学问.学习它的最好方法是自己去发现它.

很多几何定理,可能就是在随便画画当中产生的.

如果你有直尺,随意画两条直线  $l_1$ 、 $l_2$  (图 1.1). 然后在  $l_1$ 、 $l_2$  上轮流地各取三个点. 即  $A_1$ 、 $A_3$ 、 $A_5$  在  $l_1$  上;  $A_2$ 、 $A_4$ 、 $A_6$  在  $l_2$  上. 这六个点构成一个自身相交的六边形(闭折线), 即如图连结  $A_1A_2$ 、 $A_2A_3$ 、 $A_3A_4$ 、 $A_4A_5$ 、 $A_5A_6$ 、 $A_6A_1$ .  $A_1A_2$  与  $A_4A_5$  相交于  $D$ , 我们简记作

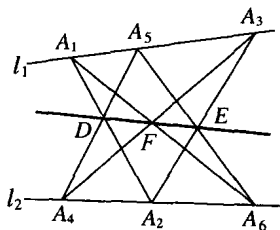


图 1.1

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D.$$

同样,  $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$ ,  $A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$ .

$D$ 、 $E$ 、 $F$  三点的位置有什么特点?

它们似乎在一条直线上. 用直尺比划一下, 果真如此!

这是偶然的吗?

如果你再画一个图, 情况仍然如此. 于是你就发现了一个定理:

**定理** 在直线  $l_1$  上任取三点  $A_1, A_3, A_5$ , 在直线  $l_2$  上任取三点  $A_2, A_4, A_6$ ,  $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$ ,  $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$ ,  $A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$ , 那么  $D, E, F$  三点共线.

不过这一定理早已有人发现过. 它称为帕普斯定理. 帕普斯 (Pappus, 公元 3 世纪) 是希腊数学家.

虽然你发现的定理早已有人发现, 不必为此沮丧. 我国大数学家华罗庚在自学的过程中就常常重复别人的发现 (如复变函数中的柯西定理). 他觉得自己能独立发现这些定理, 正说明自己与历史上著名的数学家有同样的水平, 因而对前途充满了信心.

从本节至 1.4 节, 我们将介绍三个几何定理 (帕普斯定理是第一个). 这些定理是著名的, 因此学习几何的人都应当知道. 这些定理是优美的, 我们应当多加欣赏. 这些定理有不少应用, 但在中学阶段 (包括数学竞赛) 却很少用到. 不过, 如果能够用上, 问题多半迎刃而解 (这就好像核武器, 几乎派不上用场, 但二战末期偶尔一用, 日本鬼子就举手投降了). 这些定理的证明往往都不容易, 但在有关书中不难查到. 所以这里我们也不急于给出证明. 不过, 如果你有兴趣看到本书最后几节, 也会找出一种证明.

## 1.2 帕斯卡定理

人只不过是一根苇草, 是自然界最脆弱的东西; 但他是一根能思想的苇草. 我们全部的尊严就在于思想. 由于思想, 人囊括了宇宙, 思想形成人的伟大.

——B. 帕斯卡《思想录》

如图 1.2, 任作一个圆. 在圆上任取六点  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ . 设  $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$ ,  $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$ ,  $A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$ , 则有  $D, E, F$  三点共线.

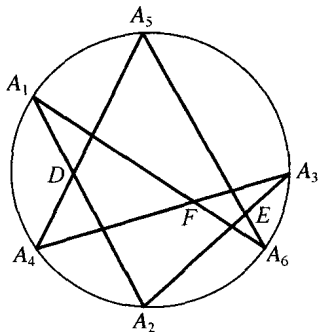


图 1.2

类似的结论, 对于椭圆、双曲线、抛物线也同样成立. 而在双曲线蜕化成两条相交直线(或抛物线蜕化成两条平行直线)时, 上述结论就变成帕普斯定理.

于是, 我们有如下定理:

**定理** 如果一个六边形内接于一条二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线), 那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

这一定理称为帕斯卡定理.

帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662), 是一位天才. 在 16 岁左右(约 1639 年)就发现了上述定理.

帕斯卡是概率论的奠基人之一. 他 18 岁时, 发明并制造了历史上第一架计算机. 25 岁左右, 发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理. 他还是一位杰出的文学家, 他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏. 但从 31 岁起, 他的主要精力用于神学, 沉湎于宗教狂热之中.

帕斯卡定理中的六边形, 可以是图 1.2 中自身相交的六边形, 也可以是图 1.3 中的常见的简单多边形.

帕斯卡定理有种种特殊的情况. 例如  $A_1$  与  $A_2$  重合,  $A_5$  与  $A_6$  重合, 就得到(图 1.4):

圆内接四边形  $A_1A_3A_4A_5$  对边  $A_1A_5$ 、 $A_3A_4$  的交点  $F$ ,  $A_1$  处切线与  $A_4A_5$  的交点  $D$ ,  $A_5$  处切线与  $A_1A_3$  的交点  $E$ , 三点共线.



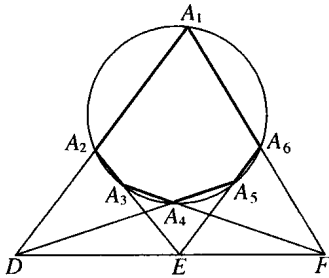


图 1.3

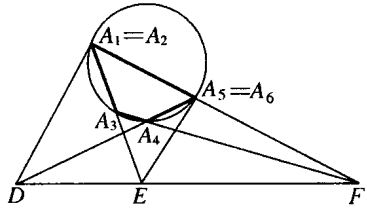


图 1.4

如果图 1.3 中  $A_1$  与  $A_2$  重合,  $A_3$  与  $A_4$  重合,  $A_5$  与  $A_6$  重合, 就得到(图 1.5):

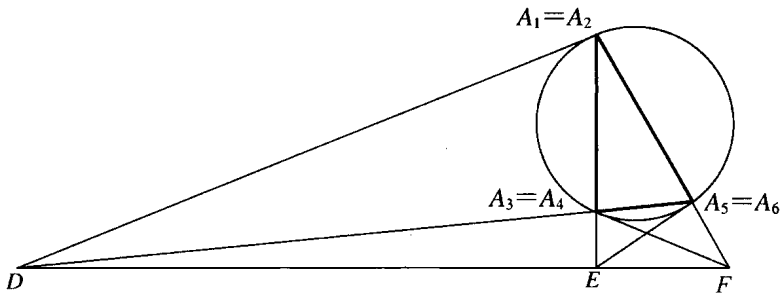


图 1.5

圆内接三角形, 每一顶点处的切线与对边的交点, 这三点共线.

1970 年代, 国内曾有人在杂志上发表了一些“新”定理, 以为是“前贤所未曾发现的”. 其实都是帕斯卡定理的特殊情况.

### 1.3 无穷远点

数学的统一性及简单性都是极为重要的. 因为数学的