提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

高中 数学3

（必修4）

主编 蔡晔

龍門書局 | 龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

高中 数学 3

（必修 4）

主　编　蔡　晔
副　主
分册主
编　　　　　　　　　赵振红
杨鹏宇　李　丽　赵连龙

《数理报》优秀作者编写

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略．疑难与规律详解．高中数学 3(必修 4)/蔡晔主编;王明章分册主编．—北京:龙门书局,2011.5
ISBN 978-7-5088-2946-3

Ⅰ．①提…　Ⅱ．①蔡…　②王…　Ⅲ．①中学数学课—高中—习题集　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 073644 号

责任编辑:潘恭华　高　鹏/封面设计:浩蓝书籍设计

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
www.longmenbooks.com
北京九天志诚印刷有限公司 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2011 年 5 月第　一　版　　开本:B5
2011 年 5 月第二次印刷　　印张:8 3/4
字数:198 000

定　价:13.00 元

前言

新课标教学和新课改理念越来越重视对学生的思维能力、实践能力和创新能力的培养。《考试大纲》告诉我们高考的命题将全面落实新课改理念，把以能力测试为主导的命题指导思想落实到每一道题中，在继承和发展传统命题优势情况下，高考将更加注重对学生各种能力的考查，并真正把对能力的考查放在首要位置。

《提分攻略》系列图书正是在这种背景下应运而生，它包含《疑难与规律详解》和《常考题型训练题典》两大子系列，涉及数学、物理、化学、生物、英语五大学科，供中学不同年级学生和教师使用。《疑难与规律详解》系列丛书集《数理报》优秀一线教师多年教学心得于一体，结合新课标教学理念和考试大纲的要求分学科、分模块、分年级编排成册，总的说来本书有以下特点：

紧扣课标要求，以提高学生思维能力为第一宗旨

应用能力与创新能力的培养以思维能力为核心，本书通过对切实有效的解题方法、规律的讲解、总结和应用让学生在三位一体的科学训练中形成良好的理解、分析和推理能力。

兼具报刊的深度和灵活性以及图书的广度和系统性

一方面，本书取材于数理报，以“新课标”和“考试说明”为指导，将《数理报》多年来积累的精华内容进行重新加工和整合；另一方面，我们针对《数理报》内容随意、系统性差以及知识之间相互重复的缺点进行不断的修订和提升，使之既具有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

疑难问题深入讲解，通法规律全面总结，常见错误深度剖析

本书编写定位于解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳出解决问题的方法规律，并有针对性的进行跟踪训练，旨在帮助广大师生突破教学、学习中的疑难易错点，找到提高思维能力的捷径。

全国各地一线教师骨干和专家通力合作，实力雄厚

本书汇集了来自全国各地的优秀教师多年教学心得与体会，对学生学习中遇到的疑难易错问题把握准确，对解题方法规律的总结和应用全面深入，可谓字字珠玑、题题经典，是学习中不可缺少的良师良伴。

编 者

2011.4.10

目 录

目　录

第二章　平面向量

答案与解析

第一章 三角函数

第一节 任意角与弧度制

疑难解读

初识角

一 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可以构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任何一个与角 α 终边相同的角,都可以表示为角 α 与整数个周角的和.

二 象限角和轴线角的集合

(1)当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

注意:如果角的顶点不与坐标原点重合,或者角的始边不与 x 轴的非负半轴重合,则不能判断这个角在哪一个象限,也就是它不能称做象限角.

(2)当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,角的终边落在坐标轴上时,称做轴线角,这时这个角不属于任何象限.

(3)象限角的集合

①第一象限角的集合为$\{x|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

②第二象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

③第三象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

④第四象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)轴线角的集合

①终边落在 x 轴的非负半轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

②终边落在 x 轴的非正半轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

③终边落在 x 轴上,角的集合为$\{x|=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

④终边落在 y 轴的非负半轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

⑤终边落在 y 轴的非正半轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

⑥终边落在 y 轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

⑦终边落在坐标轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

注意:象限角与轴线角的集合表示并不惟一,也还有其他的表示形式.如终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合也可表示为$\{x|x=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

三 角度与弧度的互化

(1) 将角度化为弧度

$360°=2\pi$ rad;$180°=\pi$ rad;$1°=\frac{\pi}{180}$ rad≈0.01745 rad.

(2)将弧度化为角度

2π rad $=360°$;π rad $=180°$;1 rad $=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°=57°18'$.

四 扇形的弧长公式及面积公式

扇形的弧长公式:$l=|\alpha|r$(扇形的圆心角为 α 弧度,半径为 r);

扇形的面积公式:$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

规律透视

任意角与弧度制考点剖析

考点一 考查任意角的概念

例1 下列各命题正确的是 ( )

A. 终边相同的角一定相等

B. 第一象限的角都是锐角

C. 锐角都是第一象限的角

D. 小于 $90°$ 的角都是锐角

解析:本题可利用各种角的定义,利用排除法予以解答,也可利用角的定义,直接判断.

方法1:对于A,$-60°$ 和 $300°$ 是终边相同的角,它们并不相等,则应排除A;

对于B,$390°$ 是第一象限的角,但它不是锐角,则应排除B;

对于D,$-60°$ 是小于 $90°$ 的角,但它不是锐角,则应排除D.

综上,应选C.

方法2:因为锐角的集合是 $\{\alpha \mid 0°<\alpha<90°\}$,第一象限角的集合是 $\{\alpha \mid k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$,当 $k=0$ 时两集合相等,所以锐角是第一象限的角. 故选C.

答案:C

点评:弄清常见角的范围是解题的关键. 要想否定一个命题,只需举出一个反例即可. 解法1就是恰当地举出一个反例,将A、B、D三个选项予以排除,从而确定C选项.

考点二　考查终边相同的角

例2　如果 6α 与 $30°$ 角的终边相同,求适合不等式 $-180°<\alpha<180°$ 的角 α 的集合.

分析:利用终边相同的角的表示得到 6α 与 $30°$ 角的关系,然后利用赋值法求解.

解:由题意知 $6\alpha=30°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$,所以 $\alpha=5°+k\cdot 60°$,因为 $-180°<5°+k\cdot 60°<180°$,即 $-\frac{37}{12}<k<\frac{35}{12}$.

因为 k 是正整数,所以 $k=-3,-2,-1,0,1,2$.

分别代入 $\alpha=5°+k\cdot 60°$ 得满足条件的 α 的集合为 $\{-175°,-115°,-55°,5°,65°,125°\}$.

点评:(1)寻求符合条件的集合中的元素,可先把集合写出来,然后通过对 k 进行从大到小或从小到大赋值寻找,这样不会漏解. (2)终边相同的角不一定相等,但相等的角终边一定相同;终边相同的角有无数多个,它们相差 $360°$ 的整数倍.

考点三　判断角的终边所在的象限

例3　若 α 角为锐角,则 $k\cdot\pi+\alpha\ (k\in \mathbf{Z})$ 所在的象限是　　(　　)

A. 第一象限　B. 第一、二象限

C. 第一、三象限　D. 第一、四象限

解析:本题中 $k\cdot\pi+\alpha$ 不是 $2k\pi+\alpha$ 的形式,因此我们应设法化成 $2k\pi+\alpha$ 的形式,这就需要把整数 k 分解为奇数和偶数进行讨论.

因为 α 为锐角,所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

当 $k=2n(n\in \mathbf{Z})$ 时,$k\cdot\pi+\alpha=2n\pi+\alpha$,此时为第一象限角;

当 $k=2n+1(n\in \mathbf{Z})$ 时,$k\cdot\pi+\alpha=2n\cdot\pi+\pi+\alpha$,此时为第三象限角,故选C.

答案:C

点评:要判断角的终边所在的象限,必须将角化成 $\alpha+k\cdot 360°(0°\leqslant\alpha<360°,k\in \mathbf{Z})$ 或 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in \mathbf{Z})$ 的形式,找出与此角终边相同的角 α,再根据 α 所在的象限来判断此角的位置.

考点四　弧度制与角度制的换算问题

例4　(1)设 $\alpha_1=-570°$,$\alpha_2=750°$,用弧度制表示它们,并指出它们各自所在的象限;

(2)设 $\beta_1=\frac{3}{5}\pi$,$\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$,用角度制表示它们,并在 $-720°\sim 0°$ 范围内找出与它们有相同终边的所有角.

分析:利用弧度与角度的互化公式,用待定系数法去找一个 k,将 α_1、α_2 化为 $2k\pi+\alpha(k\in \mathbf{Z})$ 的形式,而 β_1、β_2 化为 $k\cdot 360°+\alpha(k\in \mathbf{Z})$ 的形式.

解:(1)因为 $180°=\pi$ rad,

所以 $-570°=\frac{\pi}{180}\times(-570)=-\frac{19}{6}\pi$,

所以 $\alpha_1=-\frac{19}{6}\pi=-2\times 2\pi+\frac{1}{6}\pi$,

所以 α_1 在第二象限.

同理,$\alpha_2=\frac{\pi}{180}\times 750=\frac{25}{6}\pi=2\times 2\pi+\frac{\pi}{6}$,

所以 α_2 在第一象限.

(2)$\frac{3}{5}\pi=(\frac{180}{\pi})°\times\frac{3}{5}\pi=108°$,与它终边相同的角可表示为 $k\cdot 360°+108°$,$k\in \mathbf{Z}$,

由 $-720°\leqslant k\cdot 360°+108°<0°$,

得 $-2\frac{3}{10}\leqslant k<-\frac{3}{10}$,所以 $k=-2$ 或 -1.

即在 $-720°\sim 0°$ 范围内与 β_1 有相同终边的角是 $-612°$ 和 $-252°$.

同理 $\beta_2=-420°$，且在 $-720°\sim0°$ 范围内与 β_2 有相同终边的角是 $-60°$.

点评：角度与弧度进行互化，关键是对转化公式的理解和应用；判断一个角所在象限，关键是在 $[0,2\pi)$ 内找到与该角终边相同的角. 在同一个角的表达式中，不能角度与弧度混合用.

考点五　有关弧度数的计算问题

例 5　圆弧长度等于其内接正三角形边长，则其圆心角的弧度数为　　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

解析：可根据弧度的计算公式进行求解，关键先求出圆弧的长度，即正三角形的边长.

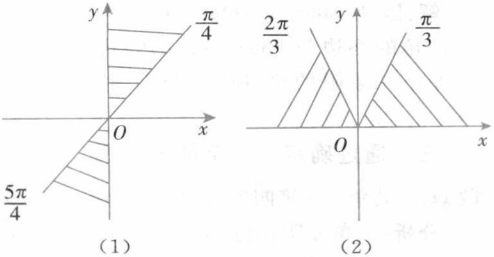
设圆的半径为 r，则其内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}r$. 由弧度角的定义可得 $\frac{\sqrt{3}r}{r}=\alpha$，即圆心角的弧度数为 $\sqrt{3}$.

答案：C

点评：利用弧度数计算公式求角的弧度数，关键是求出角所对的弧长，弧度数不一定用 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$…表示，也可以用 $\sqrt{3}$，1…表示.

考点六　考查范围角的表示问题

例 6　如图 1-1-1，用弧度制表示下列终边落在阴影部分的角的集合.



(1)　　　　(2)

图 1-1-1

分析：先在 $[0,2\pi)$ 或 $[-\pi,\pi)$ 内写出终边所在区域角的范围，然后用终边相同的角的公式表示，最后求满足条件的角的集合的并集，并用最简单的式子表示.

解：(1) 如图 1-1-1(1) 所示，在 $[0,2\pi)$ 范围内，满足条件角的集合为 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$. 则所求角的集合为：$\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|2k\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 如图 1-1-1(2) 所示，在 $[0,2\pi)$ 范围内，满足条件的集合为 $[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi]$. 则所求角的集合为：$\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

点评：当两区域的边界互为反向延长线时，只用一个式子“$k\pi+\alpha\leqslant x\leqslant k\pi+\beta$”就可以表示. 如第(1)题也可以先写出区域的边界 $k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，再根据逆时针形成角可得：$\{\alpha|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

考点七　对弧长与扇形面积公式的考查

例 7　已知一弧所对的圆周角为 30°，圆的半径为 10 cm，求弧长和弧所在的弓形面积.

分析：求弧长需要运用弧长公式 $l=\theta R$，注意 θ 为弧所对的圆心角的弧度数，而弓形面积可运用扇形面积减去对应的三角形面积来求解.

解：设弧长为 l，圆心角为 α，弓形面积为 S，依题意有 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$，$r=10$，

所以 $l=\alpha\cdot r=\frac{10}{3}\pi(\text{cm})$，

$S_{弓}=S_{扇}-S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times10\times\frac{10}{3}\pi-\frac{1}{2}\times10^2\times\sin60°=50(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})(\text{cm}^2)$.

点评：解答弧长和扇形面积的问题，需牢记弧长公式及扇形面积公式，还应注意公式的变形使用：① $|\alpha|=\frac{l}{r}$，$r=\frac{l}{|\alpha|}$，② $S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$，$|\alpha|=\frac{2S}{r^2}$. 求弓形面积时，要注意当弓形的弧为劣弧时，$S_{弓形OAB}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}$；当弓形的弧为优弧时，$S_{弓形OAB}=S_{扇形OAB}+S_{\triangle OAB}$.

例 8　一个扇形的周长为20 cm,当扇形的圆心角为多少弧度时,这个扇形的面积最大?并求出最大值.

分析:根据扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$,将其转化为关于半径(或圆心角)的函数表达式,再利用求函数最值的方法求解.

解:设扇形的半径为 r,则弧长为 $l=(20-2r)$ cm,于是扇形面积

$$S=\frac{1}{2}(20-2r)r=-(r-5)^2+25,$$

当 $r=5$ 时,$l=10$,$\alpha=\frac{10}{5}=2$(弧度),

故当 $\alpha=2$时 S 有最大值20.

点评:利用扇形周长公式和面积公式以及弧长公式是解决这种问题的基本工具,要熟练掌握弧长、圆心角、半径、扇形面积之间的关系.高考对于此内容偶尔涉及,难度不大,多与其他知识一起考查.

【规律解读】

1.要确定角 α 所在的象限,只要把 α 表示为 $\alpha=2k\pi+\beta(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi)$,由 β 所在象限即可判定出 α 所在的象限.在已知角的范围求复合角的范围时,通常要用不等式的性质来解决,切记不要扩大角的范围.

2.在扇形的有关计算中,要充分揭示图形的性质及联系,抓住圆心角、半径、弧长、面积这些量中知二求其余的关键.使用弧度制下的弧长、扇形面积公式有诸多优越性,但是如果已知的角是以度为单位的,则必须化成弧度数后再计算,从而避免计算过程及结果出错.

跟踪练习

1.(原创题)与 $-525°$ 的终边相同的角可表示为　(　　)

A. $525°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

B. $165°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

C. $195°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

D. $-195°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

2.设扇形的周长为8 cm,面积为4 cm^2,则扇形的圆心角的弧度数是________.

角的终边所在象限的判断

一　特殊值法

例 9　已知 α 是第三象限的角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限是　(　　)

A.第一或第二象限

B.第二或第三象限

C.第一或第四象限

D.第二或第四象限

解析:因为 α 是第三象限的角,所以可取第三象限内的特殊角,验证 $\frac{\alpha}{2}$ 角所在的象限进行判断求出.

取第三象限内的角 $\alpha=240°$,则 $\frac{\alpha}{2}=120°$ 为第二象限的角,故排除C;若取 $\alpha=600°$,则 $\frac{\alpha}{2}=300°$ 为第四象限的角,故选D.

答案:D

点评:对于给出备选答案的题目,可以通过选取角 α 的特殊值,轻松求出 $\frac{\alpha}{n}$ 的值,结合选项排出一些选择项,确定正确答案.

二　利用终边相同的角的表示方法判断

例 10　判断5868°是哪个象限的角.

分析:将角5868°表示成 $\alpha+k\cdot360°$(其中 $0°\leqslant\alpha<360°,k\in\mathbf{Z}$)的形式,即可得出结论.

解:因为 $5868°=108°+16\times360°$,所以108°的角的终边与5868°的角的终边相同,而108°是第二象限的角,所以5868°是第二象限的角.

三　通过确定角的范围来判断

例 11　若角 α 在第四象限,求角 2α 所在的象限.

分析:由角 α 所在范围的表示法,确定 2α 的表示法,然后得出 2α 所在的范围.

解:因为 α 是第四象限角,

所以 $k\cdot360°-90°<\alpha<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $2k\cdot360°-180°<2\alpha<2k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

故角 2α 在第三象限或第四象限或 y 轴的非正半轴上.

点评:先利用象限角的概念写出角的范围,然后利用不等式的性质求解.

四 利用等分象限角来判断

例 12 如果 α 是第二象限,求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

分析: 求 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的象限,可先将各个象限 n 等分,这样它们与坐标轴把周角分成了 $4n$ 个区域,从 x 轴的正半轴起,按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次标上 1、2、3、4,1、2、3、4,…. 如果 α 在第几象限,则标号为几的就是 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的象限.

解: 如图 1-1-2,由 α 是第二象限知 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限就是图中标号为 2 的区域,即一、二、四象限.

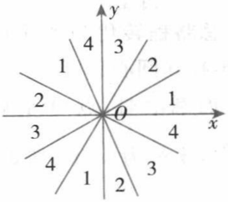


图 1-1-2

点评: 本题我们也可以先将 α 的范围用不等式表示出来,再利用不等式的性质得出所讨论角的范围,最后对 k 的取值范围进行讨论,确定出所在的象限,但不如采用这种方法来得简洁明快.

五 利用对称思想来判断

例 13 若 α 是第四象限角,则 $3\pi-\alpha$ 的终边在 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

解析: 因为 $3\pi-\alpha$ 的终边与 $\pi-\alpha$ 的终边相同,而 $\pi-\alpha=-\alpha+\pi$,因为 α 是第四象限角且 $-\alpha$ 和 α 的终边关于 x 轴对称,所以 $-\alpha$ 的终边在第一象限,$-\alpha+\pi$ 的终边是 $-\alpha$ 的终边按逆时针方向旋转 π 而得到的,因此 $\pi-\alpha$ 的终边在第三象限,故选 C.

答案: C

点评: 对称是角与角的终边常见的关系,而对称思想是高中数学的重要内容,是高考的热点问题,同学们在学习过程中不仅要掌握好对称的有关规律,同时还要注意运用对称的思想去解决问题. 当然对本题我们也可以采用特殊值的方法进行判断.

【规律解读】

角的终边所在象限的判断,除把角表示为 $\alpha=2k\pi+\beta\ (k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi)$,由 β 所在象限判定 α 所在的象限外,还可以利用图形、特殊值法或利用不等式的性质来解决.

跟踪练习

3. 若 $\alpha=2k\pi-\frac{5}{4}, k\in\mathbf{Z}$,则角 α 所在的象限是 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知 α 是第三象限的角,则角 $-\alpha$ 的终边在 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

角的对称问题

例 14 若 α 与 β 的终边关于 x 轴对称,则有 ( )

A. $\alpha+\beta=90°$

B. $\alpha+\beta=90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

C. $\alpha+\beta=2k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$

D. $\alpha+\beta=180°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

解析: 根据终边对称,将一个角用另一个角表示,然后再找两角关系.

因为 α 与 β 的终边关于 x 轴对称,所以 $\beta=2k\cdot180°-\alpha, k\in\mathbf{Z}$,故选 C.

答案: C

【规律解读】

对称是角与角的终边一种常见的关系,常用的有以下四种:

(1) α 与 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha+\beta=2k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$;

(2) α 与 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$;

(3) α 与 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$;

(4) α 与 β 的终边在一条直线上,则 $\alpha-\beta=k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$.

跟踪练习

5．若角 α 的终边与角 β 的终边关于原点对称，则有　　　　(　　)

A. $\alpha=\beta$

B. $\alpha-\beta=\pi$

C. $\alpha-\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha-\beta=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$

6. 已知角 α 的终边与 $60°$ 角的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha\in(-720°,720°)$，求角 α 取值的集合.

实际生活中的应用问题

一　时钟问题

例 15　自上午 8 时整上学到中午 11 时 40 分放学，时钟的时针和分针各转了多少度？上午 8 时整和中午 11 时 40 分时，两针所成的最小正角各是多少度？

分析：时针每 12 小时转一圈，分针每一小时转一圈，可以先算出时针、分针每小时转了多少度，再求解. 同时考虑到时针、分针均按顺时针方向旋转，所以应为负角.

解：因为时针每小时转 $-360°\div12=-30°$，又上午 8 时整到中午 11 时 40 分经过了 3 小时 40 分钟，而 3 小时 40 分钟 $=3\frac{2}{3}$ 小时，所以，时针转过的角度为 $-30°\times3\frac{2}{3}=-110°$，分针转过的角度数为 $-360°\times3\frac{2}{3}=-1320°$. 若以时钟指针指在 12 时整时为角的始边，则 8 时整时，时针与分针各指在“8”上和“12”上，此时，两针成 $120°$ 角，经过 $3\frac{2}{3}$ 小时后，两针所成的角度为 $30°\times3\frac{2}{3}=110°$. 故在 11 时 40 分时，两针所成的最小正角为 $110°$.

点评：此类问题应从任意角的概念出发，研究时针与分针所构成的角，应特别注意正角、负角的概念，并且要注意时针、分针转过的周数的换算关系.

二　质点运动的问题

例 16　如图 1-1-3，已知一长为 4 dm，宽为 3 dm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚，翻滚到第四面时被一小木块挡住，使木块底面与桌面成 $30°$ 角，求点 A 走过的路程的长度及走过的弧所在的扇形的总面积.

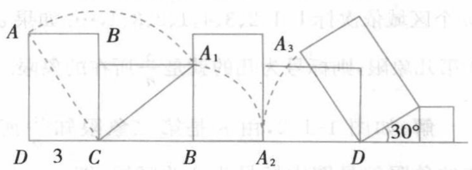


图 1-1-3

分析：把总路程转化为各弧长的和，再转化为各自的半径和圆心角的弧度数.

解：第一面翻滚时，点 A 的路程为 $\overset{\frown}{AA_1}$，其圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，半径为 5 dm，所走过的弧长为 $\frac{5}{2}\pi$ dm，所在的扇形的面积为 $\frac{25}{4}\pi$ dm^2.

第二面翻滚时，点 A 的路程为 $\overset{\frown}{A_1A_2}$，其圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，半径为 3 dm，所走过的弧长为 $\frac{3}{2}\pi$ dm，所在的扇形的面积为 $\frac{9}{4}\pi$ dm^2.

第三面翻滚时，点 A(图中的点 A_2)在桌面上不动；第四面翻滚时，点 A 的路程为 $\overset{\frown}{A_2A_3}$，其圆心角为 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，半径为 4 dm，所走过的路程为 $\frac{4}{3}\pi$ dm，所在扇形的面积为 $\frac{8}{3}\pi$ dm^2，所以总路程为 $\frac{5}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$ (dm).

点评：学习数学，就要善于从实际问题中抽象出数学模型，进而用数学相关知识解决问题.

【规律解读】
解决此类问题的关键是将实际问题转化为数学问题——求圆心角的弧度数与扇形的弧长.

跟踪练习

7. 在时钟上，自零时开始，到分针与时针第一次重合，分针与时针各转的弧度数是多少？

8. 直径为 10 cm 的滑轮上有一条长为 6 cm 的弦，P 为此弦的中点. 若滑轮以每秒 5 rad 的角速度旋转，则经过 5 秒钟后，P 点转过的弧长与面积各等于多少？

追本溯源

例 17 (课本原题)写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素写出来.

评析: 由于 $y=x$ 的图象是第一、三象限的平分线，故在 $0°\sim360°$ 间所对应的两个角分别为 $45°$ 及 $225°$，$S=\{\beta|\beta=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=225°+k\cdot360,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，然后分别令 $k=-2,-1,0,1,2,3$ 即可得到适合条件的元素 β.

链接 1: 与 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中的角同终边，且在 $0°\sim360°$ 之间的角为________.

解析: 令 $k=1$，则 $\alpha=360°-263°=97°$，因此，所要求的角是 $97°$ 角.

答案: $97°$.

链接 2: 终边与坐标轴重合的角的集合是 ( )

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot270°,k\in\mathbf{Z}\}$

解析: 终边为 x 轴的角的集合为 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，终边为 y 轴的角的集合为 $P=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，终边为坐标轴的角的集合为 $S=M\cup P=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=2k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

答案: C.

例 18 (课本习题)已知 α 是第一象限的角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限是 ( )

A. 第一象限

B. 第三象限

C. 第一或第二象限

D. 第一或第三象限

评析: 写出第一象限内的角的集合，得到 $\frac{\alpha}{2}$ 角的范围，然后对 k 分偶数与奇数进行讨论.

链接 3: 如果 α 是第一象限角，求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

解: ∵ α 是第一象限角，

∴ $k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

∴ $\frac{k}{3}\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<\frac{k}{3}\cdot360°+30°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n$ 时，

则有 $n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+30°,n\in\mathbf{Z}$,

∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

当 $k=3n+1$ 时，

$n\cdot360°+120°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+150°,n\in\mathbf{Z}$，∴ $\frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角.

当 $k=3n+2$ 时，

$n\cdot360°+240°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+270°,n\in\mathbf{Z}$,

∴ $\frac{\alpha}{3}$ 为第三象限角.

链接 4: (全国Ⅲ理)已知 α 为第三象限的角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ( )

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限

解析: ∵ α 为第三象限角，

∴ $2k\pi-\pi<\alpha<2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

当 k 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限;当 k 为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限,

$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 在第二或第四象限.

答案:D

误区破解

误区一 对有关角的概念理解不清而致误

例 1 已知 α 是第二象限的角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是( )

A. 第一象限角

B. 第一或第二象限角

C. 第一或第三象限角

D. 第二或第三象限角

错解:A.

剖析:本题的错误原因是对象限角的概念模糊,错认为第二象限角是 $(\frac{\pi}{2},\pi)$.

正解:因为 α 是第二象限的角,

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$,

故 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,

当时 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时,$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2}$,此时为第一象限角;

当时 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时,$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$,此时为第三象限角,故选 C.

点评:要判断角的终边所在的象限,必须将角化成 $k\cdot360^\circ+\alpha$(其中 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant360^\circ,k\in\mathbf{Z}$)的形式,再根据 α 所在的象限来判断,本题即把 k 分成奇数和偶数加以讨论完成.

误区二 由于以偏概全而致误

例 2 如果 α 为小于 360° 的正角,且这个角的 7 倍角的终边与这个角的终边重合,则这样的角 α 是否存在?

错解:由已知得 $7\alpha=\alpha$,解得 $\alpha=0$. 又由于 α 为小于 360° 的正角,故满足这样的 α 不存在.

剖析:错误在于没有理解终边相同的角不一定相等,而是相差 $k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

正解:由题意,有 $7\alpha=k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$,即 $\alpha=k\cdot360^\circ$. 又由于 $0^\circ<\alpha<360^\circ$,即 $0^\circ<k\cdot60^\circ<360^\circ$. $k\in\mathbf{Z}$,则 k 取 1,2,3,4,5,所以 α 的值可取 $60^\circ,120^\circ,180^\circ,240^\circ,300^\circ$.

点评:正确表示终边相同的角的集合是解题的关键. 所有与角 α 终边相同的角,都可以写成 $k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的形式.

误区三 在表示角的范围中产生错误

例 3 写出图 1-1-4 中阴影部分区域所表示的角的集合.

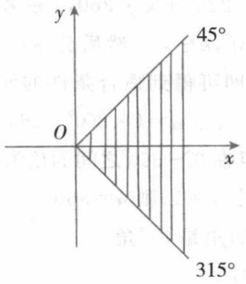


图 1-1-4

错解 1:$\{\alpha|k\cdot360^\circ+315^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

错解 2:$\{\alpha|2k\pi+45^\circ<\alpha<2k\pi+315^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

剖析:本题的错误一是上述解法中角的大小没有弄清,出现矛盾不等式;二是没有使用统一的单位,角度与弧度的混用;三是表示角的范围出现了错误,表示的是相反区域.

正解:因为 315° 的角与 -45° 的角的终边相同,所以图中区域所表示的角的集合为:$\{\alpha|-45^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<45^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$ 或 $\{\alpha|2k\pi-\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

点评:在写角的范围时,要注意逆时针方

向旋转角越来越大，另外还要注意单位的统一，避免出现角度和弧度混用的情况.

误区四　忽视了角的旋转方向致错

例 4　自行车大链轮有 48 个齿，小链轮有 20 个齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过了多少弧度？

错解：当大链轮转过一周时，转过 48 齿，这时小链轮也必须同步转过 48 齿，有$\frac{48}{20}=\frac{12}{5}$周，也就是小链轮转过$\frac{12}{5}$周.

故小链轮转过的弧度数为$\frac{12}{5}\times 2\pi=\frac{24\pi}{5}$.

剖析：车轮按顺时针方向旋转，所以转过的角度应是负角.

正解：以上同错解.

故小链轮转过的弧度数为$\frac{12}{5}\times(-2\pi)=-\frac{24\pi}{5}$.

点评：对于车轮、钟表等的旋转问题，要注意旋转的方向，以确定转过的角度的符号.

跟踪练习

9.（原创题）时钟从 2 时 50 分走到 4 时 10 分，这时分针旋转过的弧度数为　（　　）

A. $\frac{8}{3}\pi$　　B. $-\frac{8}{3}\pi$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $-\frac{8}{3}$

10. 若 α、β 的终边相同，则 $\alpha-\beta$ 的终边在　（　　）

A. x 轴上　　B. x 轴的非负半轴上

C. y 轴上　　D. y 轴的非负半轴上

11. 终边在 $y=-x$ 上的角的集合是　（　　）

A. $\{\alpha|\alpha=k\times180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\times180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\times360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\times360^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

12. 已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$，求 $A\cap B$.

第二节　任意角与三角函数

疑难解读

三角函数解读

一　三角函数的定义

在平面直角坐标系内，通过任意角 α 的终边上一点 $P(x,y)$ 和 P 点到坐标原点的距离 r $(r>0)$，定义了三种函数：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

由三角函数的定义可知，①一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关，即角 α 与 $\beta=2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的同名三角函数值相等；② $|x|\leqslant r$，$|y|\leqslant r$，故有 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，$|\cos\alpha|\leqslant 1$，这是三角函数中最常用的也是最基本的一组不等关系.

二　三角函数在各象限的符号

三角函数的符号是根据三角函数定义和各象限内的坐标符号导出的，从原点到角的终边上任意一点的距离 r 总是正值，根据三角函数的定义可知：正弦的符号取决于纵坐标 y 的符号；余弦的符号取决于横坐标 x 的符号；正切是 x、y 同号为正，异号为负. 三角函数在各象限内的符号可用以下口诀记忆：一全正，二正弦，三正切，四余弦.

三　三角函数线

正弦线、余弦线、正切线均为有向线段，是三角函数值的几何形式，借助其直观性，可比较一些三角函数值的大小或证明某些三角不等式. 用有向线段表示三角函数值，则有向线段的长度表示三角函数的绝对值，有向线段的方向表示三角函数值的正负号.

四　同角三角函数的基本关系式

同角三角函数基本关系式主要涉及两个方面：一是平方关系，二是商数关系. 在学习时应突出“同角”两个字，在使用时，一要注意同角三角函数的基本关系式将“同角”的三种重要的三角函数直接或间接地联系起来，而跟角的表达形式无关（如 $\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha=1$）；二是要注意这些关系式都是对于使它们有意义的那些角而言的（如 $\tan\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 中要求 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$）.

五　同角三角函数的基本关系式的记忆法则

(1)对角线上对应的函数互为倒数；

(2)每一个顶点对应函数等于相邻顶点对应函数的乘积；

(3)阴影三角形中，上面二个顶点对应的函数的平方和等于下面一个顶点的平方.

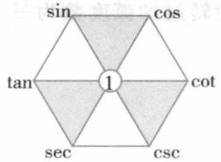


图 1-2-1

例如：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

规律透视

回归定义巧解三角问题

考点一　求值

例 1　已知角 α 的终边落在射线 $5x+12y=0$，$(x\leqslant 0)$上，则 $\cos\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}$ 的值为________.

解析： 因为角的终边在直线上，故可利用三角函数的定义求解.

在角 α 的终边上取点 $P(-12,5)$，则 $r=13$，$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，所以 $\cos\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=-\frac{12}{13}-\frac{12}{5}-\frac{13}{5}=-\frac{77}{13}$.

答案： $-\frac{77}{13}$.

点评：角 α 的三角函数值与点 P 的位置无关，因此我们可以在终边上任意取点，但当 P 取定值时，相应的 r 也已确定，这时只要利用 r 的几何意义求出 r，利用定义可求得 α 的三角函数值.

考点二 判断角的终边所在的象限

例 2 已知 $\frac{\sin\alpha+\csc\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}<0$，求 α 所在的象限.

分析：由于给出的已知式比较复杂，利用三角函数值在各象限的符号进行判断比较麻烦，我们可以试用三角函数的定义解之.

解：在 α 角终边上取一点 P，其坐标为 (x,y)，$|PO|=r$，

则有 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$.

由已知 $\frac{\sin\alpha+\csc\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}<0$，得 $\frac{\frac{y}{r}+\frac{r}{y}}{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}<0$.

考查此式，因为 $r>0$，不管 y 是正是负，都有 $x<0$，所以 $\cos\alpha<0$ 且 $y\neq0$，所以 α 是第二、第三象限角.

点评：三角函数值的符号与其角的终边所在的象限可以互相确定. 在解题中要注意三角函数定义的灵活运用. 三角函数的定义是一切三角函数问题的根本，所以几乎所有的问题都可以从三角函数定义上找到根源，利用三角函数的定义进行转化. 本题已知角的一些三角函数关系式的符号，求角所在的象限，一方面可以将已知条件中的角的多个三角函数式转化为一个三角函数值，再通过它的符号确定角的象限；另一方面，也可以用定义将所有的三角函数值全部转化为点的坐标，通过点的坐标来确定点的象限，即角的终边的象限，这样更具体且更容易操作.

考点三 比较大小

例 3 已知 θ 是锐角，试比较 $\sin\theta+\cos\theta$ 与 1 的大小.

分析：利用我们现有的三角函数知识还无法比较大小，但借助于三角函数的定义，则问题迎刃而解.

解：在角 θ 的终边上任取一点 $P(x,y)$，则 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

因为 θ 是锐角，所以 $x>0$，$y>0$，

于是 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$

$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}}=\sqrt{1+\frac{2xy}{x^2+y^2}}>1$.

点评：本题借助于三角函数的定义，将 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 凑配成 $\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{1+\frac{2xy}{x^2+y^2}}$ 是解决问题的关键.

考点四 证明恒等式

例 4 求证：$\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

分析：利用三角函数的定义，将 α 的三角函数用 x、y、r 表示出来，为了证题的方便，可对被证式两边的式子分别变形，同时推向第三个式子，进而证得等式成立.

证明：设 $M(x,y)$ 为 α 终边上异于原点的一点，$|OM|=r$，由三角函数的定义有 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，左边 $=\frac{x+r+y}{x+r-y}=\frac{(x+r+y)(x+r+y)}{(x+r-y)(x+r+y)}=\frac{(x+r+y)^2}{(x+r)^2-y^2}=\frac{2r^2+2xr+2xy+2ry}{2x^2+2xr}=\frac{(r+y)(x+r)}{x(x+r)}=\frac{r+y}{x}$，

右边 $=\frac{1+\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{r+y}{x}$，所以原等式成立.

点评：在上面的证法中，如果设点 M 为角 α 终边与单位圆的交点，则 $r=1$，解法更简洁.

【规律解读】

要善于利用三角函数的定义及三角函数的符号规律解题，并且注意掌握解题时必要的分类讨论及三角函数值符号的正确选取. 三角函数的定义域只要抓住分母不等于零这一关键，不必死记.