LINEAR ALGEBRA

崔丽鸿　姜广峰　编

《线性代数》导学备考一书通

化学工业出版社

崔丽鸿　姜广峰　编

《线性代数》导学备考一书通

化学工业出版社
·北京·

“线性代数”是大学数学教育的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必考科目。

本书分为三大部分：基础篇、提高篇和应试篇。基础篇包括：复习引导、基本概念、基本题型；提高篇包括：考点归纳、考点解读、命题趋势、难点剖析、点击考点＋方法归纳；应试篇包括：线性代数复习点睛、2011年研究生入学考试真题及答案、三套模拟考试题及部分答案。

本书的特色是新颖、全面、精准、实用、高效，可作为各类大中专在校学生的参考书，考研学子的备考复习书，高校教师的习题课参考书，考研辅导人员的考案参考书。

图书在版编目（CIP）数据

《线性代数》导学备考一书通/崔丽鸿，姜广峰编．—北京：化学工业出版社，2011.2

ISBN 978-7-122-10359-8

Ⅰ．线… Ⅱ．①崔…②姜… Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 001850 号

责任编辑：满悦芝　郭乃铎　　　文字编辑：韩亚南

责任校对：宋　夏　　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 18½　字数 453 千字　2011 年 4 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：36.00 元

前言

本书编写目的

“线性代数”是大中专院校理工、农、林、医及经济、管理类等专业的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必考科目。为使广大莘莘学子高效学习、顺利应试，基于本课程特点和考试要求、硕士研究生入学考试的要求以及对后继课程的要求，结合我们多年来的教学经验以及对命题方向的了然于胸，精心编写了本书，力求做到，学子学习“线代”，只需一书在手，疑云全消，轻松闯关，考试全通。

本书编写脉络

总体上，本书编排分为三大部分：基础篇、提高篇和应试篇。

（一）**基础篇**　与一般的线性代数教材顺序一致，分为 6 章，每章循序渐进，重视基础，按章节归纳，主要划分为：①复习引导；②基本概念；③基本题型。基础篇适合“初级学习”阶段，“初级学习”阶段往往将整体知识分割成了部分，所掌握的知识是零碎的，分散的，但又比教材概括、精炼，此部分所设计的题型相对基本和分类明晰，按部就班和稳扎稳打，总结出 65 个基本题型。

（二）**提高篇**　按照各类考试要求划分为 7 章，每章内容有：①考点归纳、考点解读、命题趋势、难点剖析；②点击考点＋方法归纳。提高篇适合于“高级学习”阶段，“高级学习”阶段往往将“分散的、纵横交织”的各知识点整合为系统知识，充分挖掘各个知识点之间的内在联系，把握各种概念、定理的本质特征，此部分所设计的题型更为综合和灵活丰富，前后贯穿和直击考点，总结出 69 个考点。

（三）**应试篇**　为了便于读者进一步复习巩固，编者潜心编排了①线性代数复习点睛；②2011 年研究生入学考试真题及答案；③三套模拟考试题及答案。

本书鲜明特色

本书编写力求突出以下特色。

（一）**新颖**　本书编排尤其注重阶梯化训练，符合认知规律。以真题为线索，精心设计层次试题，涵盖 20 年所有考研真题，力求最大限度地对线性代数题型进行科学、等值训练。

（二）**全面**　基本点、重点、难点、考点、疑点等点点到位，考点解读、题型归类、命题趋势等全面梳理，做到没有漏洞。

（三）**精准**　以考研大纲为依据，以历年真题为依托，透视命题规律，阐释复习和考研要点。力求准确阐释每一个考点，使考生明确考研总体方向。考点精准，解析详细透彻，方法归纳详尽准确，突出重点，减少复习的盲目性。

（四）**实用**　对考研的重点、难点知识及方法进行系统归纳提炼，尽可能使每道题有分析、解答过程和温馨提示。通过对典型试题的解析，弄清每道小题的解题思路，从而找到答题的关键点，体现“宝典”精神。

（五）**高效**　使读者在短期内掌握各种解题方法和技巧，做到知识的融会贯通和触类旁

通，以考研"标准答案"为准，解题科学、规范，帮读者养成规范答题的良好习惯，使读者在考场答题中万无一失！

（六）**落实**　编制质优的模拟试题和答案，给出2011年研究生入学考试真题及答案，点睛线性代数学习中的精华，作为读者自我检验的落实，以便查漏补缺。

本书适用范围

本书可作为各类大中专在校学生的参考书，考研学子的备考复习书，高校教师的习题课参考书，考研辅导人员的考案参考书。本书是学习线性代数的同步指导书，也是备考硕士研究生的辅导书。

我们相信，莘莘学子一定会从书中获得事半功倍的效益！

崔丽鸿　姜广峰

2011年1月

目录

基础篇

第一章　行列式 …… 1
复习导学 …… 1
1. 行列式的概念 …… 1
【基本题型 1】　按定义计算行列式 …… 2
【基本题型 2】　按对角线法则计算二、三阶行列式 …… 2
2. 行列式的性质 …… 2
【基本题型 3】　按行列式的性质计算行列式 …… 2
3. 行列式按行（或列）展开定理 …… 4
【基本题型 4】　有关余子式、代数余子式及其重要结论的题目 …… 4
【基本题型 5】　按照性质和按行展开定理计算较低阶的行列式 …… 6
【基本题型 6】　有关用行列式表示的多项式 $f(x)$ 性质的题目 …… 7
4. 常用的特殊行列式 …… 8
【基本题型 7】　一般的 n 阶行列式的计算 …… 9
第二章　矩阵 …… 17
复习导学 …… 17
1. 矩阵的概念 …… 17
2. 矩阵相等 …… 17
3. 矩阵运算 …… 17
4. 矩阵运算的性质 …… 18
5. 转置矩阵 …… 18
【基本题型 1】　矩阵的基本运算 …… 18
6. 特殊矩阵及其性质 …… 19
【基本题型 2】　有关特殊矩阵的运算 …… 20
7. 方阵 …… 20
【基本题型 3】　有关方阵的性质 …… 20
【基本题型 4】　矩阵运算规律与数运算规律的区别 …… 20
8. 伴随矩阵 …… 21
9. 逆矩阵 …… 21
【基本题型 5】　利用伴随矩阵法求较低阶矩阵的逆 …… 21
【基本题型 6】　判定或证明抽象矩阵可逆并求逆 …… 22
【基本题型 7】　求抽象矩阵的逆 …… 23
【基本题型 8】　有关伴随矩阵的命题 …… 23
10. 分块矩阵 …… 25
【基本题型 9】　分块矩阵的计算 …… 25
【基本题型 10】　分块矩阵的运用 …… 27
11. 初等变换 …… 28
12. 初等矩阵 …… 29
13. 初等矩阵的应用 …… 30
【基本题型 11】　将矩阵写成初等矩阵乘积形式 …… 30
【基本题型 12】　利用初等变换法求矩阵的逆 …… 31
14. 矩阵的秩 …… 32
【基本题型 13】　按定义求矩阵的秩 …… 32
15. 矩阵秩的基本结论 …… 32
【基本题型 14】　利用秩的基本结论解题 …… 32

16. 用初等变化法求矩阵 A 的秩 …… 33
【基本题型 15】 用初等变换法求矩阵的秩 ……………… 33
第三章 向量 …………………………… 36
复习导学 …………………………… 36
1. n 维向量的概念 ………………… 36
2. n 维向量的线性运算 ……………… 36
3. 向量、向量组与矩阵 ……………… 36
【基本题型 1】 向量的线性运算 …… 37
4. 一个向量与一个向量组之间的线性表示 …………………………… 37
【基本题型 2】 利用构成矩阵的秩来判定一个向量能否由另一向量组线性表示 …………………… 38
5. 向量组的线性相关与线性无关 …… 39
【基本题型 3】 有关抽象向量组的线性相关性的证明 …… 39
【基本题型 4】 有关分量具体的向量组的线性相关性的判定 ………………… 39
6. 线性相关性的重要性质及定理 …… 40
【基本题型 5】 有关线性相关性的概念和重要定理的题目 …………………… 40
7. 两个向量组的线性表示及其等价 …… …………………………………… 43
8. 两个向量组线性相关性的性质定理 … …………………………………… 43
【基本题型 6】 有关两个向量组之间的线性表示及其相关性的判定 ………… 43
9. 向量组的极大无关组 ……………… 44
10. 向量组的秩 ……………………… 45
11. 两个向量组秩之间的关系 ……… 45
12. 向量组的秩和矩阵的秩的关系 … 45
13. 用初等变换法求向量组的秩和极大无关组 …………………………… 45
【基本题型 7】 求一个向量组的极大无关组并表示其余向量 …………………… 45
【基本题型 8】 有关等价的向量组的证明 ………………… 46
【基本题型 9】 求向量组的秩 ……… 47
【基本题型 10】 有关抽象向量组或矩阵秩的不等式的证明 …………………… 47
【基本题型 11】 关于抽象向量组和矩阵秩的等式的证明 …………………… 48
14. 向量的内积、长度、夹角 ……… 51
15. Schmidt 正交化、单位化 ……… 51
16. 正交矩阵 ………………………… 52
17. 向量空间的定义、基与维数 …… 52
【基本题型 12】 求解空间的一组标准正交基 …………… 52
【基本题型 13】 有关向量空间的维数 …………………… 53
18. 向量在基下的坐标 ……………… 53
【基本题型 14】 求向量在基下的坐标 …………………… 53
19. 两个向量组之间的过渡矩阵 …… 54
【基本题型 15】 求两组基之间的过渡矩阵 ……………… 54
第四章 线性方程组 ……………………… 56
复习导学 …………………………… 56
1. m 个方程 n 个未知量的线性方程组的一般形式 ………………………… 56
2. 齐次线性方程组的基础解系 ……… 56
【基本题型 1】 有关基础解系的概念 … …………………………………… 56
3. 线性方程组解的性质和结构 ……… 57
【基本题型 2】 有关方程组解的性质和结构 ……………… 57
4. 线性方程组解的判定 ……………… 60
【基本题型 3】 有关解的判定定理 …………………… 60
5. 线性方程组求解的初等变换法 …… 62
【基本题型 4】 求（非）齐次方程组的基础解系和通解

…………………………62
6. 线性方程组求解的克莱姆法则……63
【基本题型5】 按照克莱姆法则求方程组的解……………64
7. 线性方程组的求解和讨论…………66
【基本题型6】 含参数方程组解的讨论…………………………66
【基本题型7】 求齐次线性方程组的基础解系、通解……68
【基本题型8】 求非齐次方程组的通解…………………………69
【基本题型9】 已知齐次方程组的解，反求系数矩阵………70
第五章 特征值与相似对角化…………72
复习导学………………………………72
1. 特征值和特征向量的定义…………72
【基本题型1】 有关特征值和特征向量定义的题目………72
2. 特征值和特征向量的计算步骤……72
【基本题型2】 求具体矩阵的特征值和特征向量…………73
3. 特征值和特征向量的性质…………73
【基本题型3】 有关特征值和特征向量性质的题目………74
【基本题型4】 求抽象矩阵的特征值和特征向量…………75
4. 相似矩阵的概念……………………77
5. 相似矩阵的性质……………………77
【基本题型5】 有关相似矩阵性质的题目…………………77
6. 矩阵可以对角化的条件……………78
【基本题型6】 有关两方阵相似的判定…………………………79
7. 矩阵对角化的方法…………………79
【基本题型7】 有关矩阵可对角化的判定…………………80
【基本题型8】 已知矩阵的特征值和特征向量，反求矩阵…………………………82
8. n 阶实对称矩阵 A 的主要结论……83
【基本题型9】 有关实对称矩阵的性质…………………………83
9. 用正交相似变换化实对称矩阵 A 为对角矩阵的方法步骤………………85
【基本题型10】 求正交矩阵 Q，将实对称矩阵化为对角阵…………………………85
【基本题型11】 有关特征值、特征向量的性质及其应用 ……………………87
第六章 二次型…………………………90
复习导学…………………………………90
1. 二次型的概念…………………………90
【基本题型1】 写出二次型的矩阵…………………………90
【基本题型2】 已知二次型的秩，反求其参数……………91
2. 线性变换………………………………92
3. 矩阵的合同……………………………92
【基本题型3】 判断两个矩阵是否合同…………………………92
4. 二次型的标准形………………………93
【基本题型4】 二次型的最大值问题…………………………93
5. 进一步的结论…………………………94
【基本题型5】 已知二次型线性变换前后的形式，反求其中的参数……………94
6. 化二次型为标准形的配方法………94
【基本题型6】 用配方法化二次型化为标准形或规范形…………………………95
7. 化二次型为标准形的正交变换法……………………………………………96
【基本题型7】 求正交变换，将二次型化为标准形或规范形…………………………96
8. 正定二次型和正定矩阵……………99
【基本题型8】 判定二次型或矩阵的正定性……………99

提高篇

第七章 行 列 式 …… 103
考点归纳 …… 103
考点解读 …… 103
★ 命题趋势 …… 103
★ 难点剖析 …… 103
1. n 阶行列式的计算 …… 103
2. 抽象型行列式的计算 …… 105
3. 证明行列式 $|A|=0$ 的方法 …… 105
4. 分块矩阵的行列式 …… 105
点击考点＋方法归纳 …… 105
有关行列式计算的题目 …… 105
【考点 1】 元素具体的含文字的低阶行列式的计算 …… 105
【考点 2】 含在矩阵方程中的方阵的行列式的计算 …… 107
【考点 3】 抽象矩阵的行列式求值 …… 108
【考点 4】 高阶行列式的计算 …… 112
有关行列式的证明题 …… 114
【考点 5】 抽象行列式等于零或不等于零的判定或证明 …… 114
【考点 6】 分块矩阵的行列式 …… 116
第八章 矩阵 …… 117
考点归纳 …… 117
考点解读 …… 117
★ 命题趋势 …… 117
★ 难点剖析 …… 117
1. 两个矩阵可乘的条件 …… 117
2. 矩阵乘法不满足交换律和消去律 …… 117
3. 解矩阵方程 …… 117
4. 与初等变换有关的命题 …… 118
5. 与伴随矩阵有关的命题 …… 118
6. 矩阵秩的计算与证明 …… 118
7. 分块矩阵的运算 …… 119
点击考点＋方法归纳 …… 120
有关逆矩阵的题目 …… 120
【考点 1】 隐含矩阵可逆，求逆矩阵 …… 120
【考点 2】 判定或证明矩阵可逆 …… 121
有关矩阵的乘法运算 …… 123
【考点 3】 可交换矩阵的运算 …… 123
【考点 4】 求方阵的幂 A^n …… 124
【考点 5】 解矩阵方程 …… 126
有关矩阵的初等变换和初等矩阵的命题 …… 131
【考点 6】 求初等变换中的变换矩阵 …… 131
【考点 7】 求由初等变换得到的矩阵的有关性质 …… 131
与伴随矩阵、转置矩阵等有关的命题 …… 133
【考点 8】 利用伴随矩阵万能公式求其逆、行列式等 …… 133
有关矩阵的秩 …… 136
【考点 9】 求元素具体但含参数的矩阵的秩或其反问题 …… 136
【考点 10】 求抽象矩阵的秩 …… 138
【考点 11】 矩阵秩的证明 …… 140
【考点 12】 有关秩为 1 的矩阵 …… 142
第九章 向量 …… 144
考点归纳 …… 144
考点解读 …… 144
★命题趋势 …… 144
★难点剖析 …… 144
1. 关于向量组的线性相关有如下等价命题 …… 144
2. 关于向量组的线性无关有如下等价命题 …… 144
3. 与向量组个数和维数有关的线性相关性结论 …… 145
4. 关于线性表示的有关结论 …… 145

5. 关于向量组的秩的有关结论 …… 145
6. 关于向量组的基或其他 ………… 145
点击考点＋方法归纳………………… 146
有关向量组的计算题型……………… 146
【考点 1】 已知向量组间的线性表示关系，确定其中的参数 ………………………… 146
【考点 2】 已知向量组的线性相关性，确定其中的参数，并求一个极大无关组 ………… 151
【考点 3】 求向量在基下的坐标 … 153
【考点 4】 求两组基之间的过渡矩阵 ………………………… 154
【考点 5】 求解空间的一组标准正交基 ………………………… 155
有关向量组的证明题型……………… 155
【考点 6】 判定或证明抽象向量组的线性表示 ………………… 155
【考点 7】 抽象向量组的线性相关性的证明 ………………… 157
【考点 8】 抽象的向量组的秩的证明 ………………………… 158
有关向量的客观题型………………… 159
【考点 9】 有关向量组的线性相关性的判定 ………………… 159
【考点 10】 与矩阵有关的向量组的相关性的判定 …………… 162
【考点 11】 与线性表示有关的线性相关性的判定 …………… 164
【考点 12】 已知数字向量组线性相关，确定其中的参数 ……… 166
第十章　线性方程组……………… 167
考点归纳…………………………… 167
考点解读…………………………… 167
★命题趋势………………………… 167
★难点剖析………………………… 167
1. n 元线性方程组的三种等价的表达形式 ………………………… 167
2. 线性方程组解的性质 …………… 168
3. m 个方程 n 个未知量的齐线性方程组解的判定 ……………………… 168
4. m 个方程 n 个未知量的非齐线性方程组解的判定 ………………… 168
5. 对含参数的线性方程组，一般有以下两种题型 ……………………… 168
6. 对抽象方程组的求解 ………… 168
7. 寻找或证明向量组是某方程组的基础解系的 3 个关键点 …………… 169
8. 两个线性方程组解（都是齐次方程组或都是非齐次方程组）之间的关系 ………………………………… 169
9. 求方程组（Ⅰ）$A_{m\times n}X=\alpha$ 和方程组（Ⅱ）$B_{t\times n}X=\beta$ 的公共解的一般方法 ……………………………… 169
点击考点＋方法归纳………………… 169
有关抽象方程组的求解……………… 169
【考点 1】 抽象方程组的求解 …… 169
有关含参数的方程组的讨论或求解 ………………………………………… 174
【考点 2】 讨论齐次方程组中的参数，使得方程组只有零解或有非零解，并在有非零解时，求其通解 ……………… 174
【考点 3】 讨论非齐次方程组中的参数，使得方程组无解或有解，并在有解时求其通解 ………………………… 182
【考点 4】 已知方程组的解的情况，反求其中的参数并求解 ………………………… 185
有关两个方程组解之间的关系……… 187
【考点 5】 有关两方程组（Ⅰ）$A_{m\times n}X=\alpha$ 和（Ⅱ）$B_{t\times n}X=\beta$ 的公共解问题 ……………… 187
【考点 6】 已知两方程组同解，反求其中的参数 ……………… 190
【考点 7】 判断两个抽象的矩阵方程解之间的关系 ………… 193
有关基础解系的命题………………… 194
【考点 8】 已知一组向量已是基础解系，

证明或判断其线性组合构成的另一组向量也是基础解系 …………………… 194
【考点 9】 已知非齐次方程组解的情况，寻求对应齐次方程组的基础解系 …………… 195
有关 $AB=0$ 的命题 ………………… 196
【考点 10】 已知 $AB=0$，确定 A 或 B 中的参数 ……………… 196
【考点 11】 已知 $AB=0$，确定矩阵 A 或 B 的秩 ……………… 198
【考点 12】 已知 $AB=0$，确定 A 或 B 的行列式值是否为零 ……………………… 199
【考点 13】 已知 $AB=0$，确定 A 或 B 的行向量组或列向量组的相关性 ……………… 200

第十一章　特征值与矩阵的相似对角化 …………………………………………… 202

考点归纳 ……………………………… 202
考点解读 ……………………………… 202
★命题趋势 …………………………… 202
★难点剖析 …………………………… 202
1. 求矩阵 A 的特征值和特征向量的一般方法 ………………………… 202
2. 有关的重要结论 ………………… 202
3. 求与 A 相关矩阵的特征值和特征向量 …………………………… 203
4. 两矩阵相似的必要条件 ………… 203
5. 证明或判断矩阵相似及其逆问题 ……………………………… 203
6. 可对角化的判定及其逆问题 …… 203
7. 实对称矩阵的主要性质 ………… 204
点击考点+方法归纳 ……………… 204
有关特征值和特征向量的计算 ……… 204
【考点 1】 求具体矩阵的特征值和特征向量 ………………… 204
【考点 2】 求抽象矩阵的特征值 … 208
【考点 3】 求抽象矩阵的特征向量 ……………………… 209
与特征值、特征向量有关的逆的问题 ……………………………………… 210
【考点 4】 已知矩阵的特征值、特征向量，反求其中的参数 ……………………… 210
【考点 5】 已知矩阵的特征值、特征向量，反求矩阵 ……… 211
有关两矩阵的相似问题 …………… 212
【考点 6】 两具体的矩阵相似，确定其中的参数 …………… 212
【考点 7】 已知抽象矩阵和一个向量组之间的关系，求其相似对角矩阵等 …………… 213
有关矩阵的对角化的题目 ………… 216
【考点 8】 确定参数的值，使得有关矩阵可对角化，并求相应的可逆矩阵和对角矩阵 … 216
【考点 9】 确定参数的值后，讨论矩阵是否可对角化 ……… 219
有关实对称矩阵的题目 …………… 220
【考点 10】 已知实对称矩阵的全部特征值和部分特征向量，反求矩阵 A ……………… 220
【考点 11】 求正交矩阵，化实对称矩阵 A 为对角矩阵 ……… 223
【考点 12】 特征值、特征向量的性质及其应用 ……………… 229
【考点 13】 有关两矩阵相似的必要条件 ………………………… 231
有关特征值、特征向量和相似矩阵的证明 ………………………………… 232
【考点 14】 两相关矩阵的特征值与特征向量间的关系 ……… 232
【考点 15】 矩阵相似性的证明 …… 232

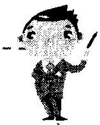
第十二章　二次型 …………………… 234

考点归纳 ……………………………… 234
考点解读 ……………………………… 234
★命题趋势 …………………………… 234
★难点剖析 …………………………… 234
1. 化二次型为标准形的定理 ……… 234
2. 求二次型的标准形的方法 ……… 234
3. 关于二次型的唯一性 …………… 234

4. 关于二次型的惯性指数和秩 …… 235
5. 二次型的规范形 ………………… 235
6. 合同变换与合同矩阵 ……………… 235
7. 合同矩阵与相似矩阵 ……………… 235
8. 正定二次型及其对应矩阵的正定性 ………………………………… 235
点击考点＋方法归纳……………… 236
有关二次型的标准化问题………… 236
【考点 1】 先确定二次型中的参数，再求正交变换或正交变换矩阵，最后将含参数的二次型化为标准形 ………………… 236
【考点 2】 求正交变换矩阵 ……… 239
有关二次型对应矩阵的命题……… 244
【考点 3】 求含参数的二次型所对应矩阵的特征值 ………… 244
【考点 4】 求抽象的二次型所对应的矩阵 ………………… 245
有关二次型或矩阵的正定………… 247
【考点 5】 判别或证明二次型的正定 ……………………… 247
【考点 6】 证明矩阵的正定 ……… 248
【考点 7】 有关正定的综合题 …… 251
合同变换与合同矩阵……………… 252
【考点 8】 合同变换与合同矩阵 … 252
第十三章 线性代数与几何的关系…… 254
考点归纳………………………… 254
考点解读………………………… 254
★命题趋势……………………… 254
★难点剖析……………………… 254
1. 线、面间的位置关系和方程组的转化 ……………………………… 254
2. 常见的二次曲面的标准方程及其图形 ……………………………… 255
3. 常见的二次曲面的秩 …………… 255
点击考点＋方法归纳……………… 255
【考点 1】 直线或平面间的位置关系与向量组的相关性或矩阵的秩的相互转化 ……… 255
【考点 2】 二次型的标准形表示何种曲面 ……………………… 260
【考点 3】 利用二次曲面的图形确定二次型的秩、正负特征值个数或正负惯性指数 … 262

应试篇

线性代数复习点睛……………………… 264
1. 符号多，下标多 ………………… 264
2. 概念之多，联系之紧密，关系之隐蔽，非线性代数莫属 …………… 264
3. 计算简单，但计算量大，且运算法则与数的常规运算有不一样的地方，因而容易出错 ……………… 264
4. 具有较强的数学特征，即对于抽象性和逻辑性要求较高 ………… 265
2011 年研究生入学考试真题及答案 … 265
1. 研究生入学线性代数考生对象 … 265
2. 研究生入学线性代数考题类型 … 265
3. 2011 年研究生入学线性代数试题及部分答案 ……………………… 265
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及部分答案……………… 265
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及部分答案……………… 268
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及部分答案……………… 271
三套自我检查题及答案……………… 275
自我检查试题一……………………… 275
自我检查试题二……………………… 277
自我检查试题三……………………… 278
自我检查试题一部分答案…………… 280
自我检查试题二部分答案…………… 280
自我检查试题三部分答案…………… 281
参考文献……………………………… 283



基础篇

第一章 行列式

复习导学

1. 行列式的概念

关于行列式的定义，有两种引出方法：先引入排列、逆序等概念之后，给出行列式的定义；不需引入排列、逆序等概念，而是利用递归法，即用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式. 考研大纲中对这部分的叙述是：了解行列式的概念. 从大纲的要求，可得出结论：不必在行列式的定义方面过多纠缠. 因此，有关行列式的定义，仅复习如下.

n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$（数、字母）排列成一个 n 行 n 列，两边界加竖线就成为 n 阶行列式的记号. 它表示按一定法则进行计算的一个计算公式，得到的结果称为行列式的值. 这个结果是一个由 $n!$ 项组成的代数和，其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，而这一项前面的符号取决于排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.

当 $n=1$ 时，$D_1=|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

当 $n=3$ 时，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

【基本题型 1】按定义计算行列式

【例 1-1】计算反对角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

【解】展开式中的一般项是$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

若 $j_1 \neq 4$，则 $a_{1j_1}=0$. 所以 j_1 只能等于 4. 同理，$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$. 即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 又因为 $\tau(4321)=0+1+2+3=6$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

【温馨提示】按照本题的方可以得到更一般的结论，详见本节后面的特殊类的行列式(1)～(3).

【基本题型 2】按对角线法则计算二、三阶行列式

【例 1-2】计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

【解】 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc=3abc-a^3-b^3-c^3$.

2. 行列式的性质

关于行列式的性质，大纲要求的是掌握，因此可得出结论：熟练掌握行列式的性质并能灵活运用. 这些性质简述如下.

(1) 转置不变(所以下面的各条性质对列也成立).

(2) 换行反号(即交换某两行，则行列式值反号).

(3) 同行得零[即某两行相同的行列式值为零，此为(2)之推论].

(4) 倍提性质(即某一行所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘此行列式).

(5) 零行得零(即有一行元素全为零的行列式值为零).

(6) 行成比例值为零[即某两行对应元素成比例的行列式值为零，由(3)、(4)即知].

(7) 拆分性质(即某一行元素均是两数之和，则可拆分为两个行列式之和).

(8) 倍加不变(即将某行的倍数加到另一行，行列式值不变).

约定如下记号：r_i+kr_j 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行；c_i+kc_j 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

【基本题型 3】按行列式的性质计算行列式

【例 1-3】计算行列式 $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$.

【解法 1】 原式$\xlongequal[\text{拆分}]{\text{分别按第 1 列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{拆分}]{\text{分别按第 3,2 列}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{拆分}]{\text{分别按第 2,3 列}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \cdot (-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

【解法 2】 原式$\xlongequal[\text{拆分}]{\text{分别按第 1 列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{\text{对后一行列式} \\ c_2+(-a)\cdot c_1}]{\substack{\text{对前一行列式} \\ c_3+(-b)\cdot c_1}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\text{对后一行列式} \\ c_3+(-a)\cdot c_2}]{\substack{\text{对前一行列式} \\ c_2+(-b)\cdot c_3}} a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \cdot (-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

【例 1-4】 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} =$ __________.

【解】由题意和根与系数的关系知，$x_1+x_2+x_3=0$. 于是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+1\cdot r_2+1\cdot r_3} \begin{vmatrix} x_1+x_3+x_2 & x_2+x_1+x_3 & x_3+x_2+x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 行列式按行(或列)展开定理

关于这部分内容,考试大纲中的原句是这样叙述的:会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.因此可得出结论:行列式性质和展开定理的巧妙结合,是计算行列式的重要法宝.以下是相关的概念和定理.

(1) 余子式、代数余子式:在 n 阶行列式 D 中,划去第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 后,余下的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式,称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

例如,在 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中,$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}$.

$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$.

> 【温馨提示】行列式的每个元素 a_{ij} 分别对应着一个余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 的值与元素 a_{ij} 的取值无关,仅与 a_{ij} 的位置有关.

(2) 行列式按行(或列)展开定理:n 阶行列式 D_n 按第 i 行展开为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或按第 j 列展开为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

> 【温馨提示】此定理表明:n 阶行列式的计算可以转化为 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算.因此该定理也称为降阶定理.特别地,当第 i 行(或列)只有一个非零元时,n 阶行列式就转化为一个 $n-1$ 阶行列式的计算,因此在计算行列式时,常常先利用性质(8)将所给行列式的某行(列)化成只含有一个非零元素,然后按此行(列)展开,每展开一次,行列式的阶数可降低1阶,如此继续进行,直到行列式能直接计算出来为止(一般展开成二阶行列式).这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用.

(3) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

【基本题型4】有关余子式、代数余子式及其重要结论的题目

【例1-5】已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$,求(1) $A_{41}+4A_{42}-7A_{43}+6A_{44}$;(2) $A_{11}-$

$3A_{12}-6A_{14}$；(3) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$. 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

【分析】对(1)中的 A_{ij}，注意到其是第 4 行的各元素对应的代数余子式，而每一项前面的因子也恰好是第 4 行的各元素，因而(1)实际上是求原行列式的值. 对(2)中的 A_{ij}，注意到其是第 2 行的各元素对应的代数余子式，而每一项前面的因子是第 2 行的各元素，根据代数余子式的性质立即可得其结果是零.(3)所求的为行列式的第 4 行的各元素对应的代数余子式的和，若分别计算 $A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 然后再相加，显然较为麻烦. 因此要另辟路径，很自然应该想到代数余子式的概念和性质. 根据代数余子式的定义可知，在行列式中，一个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与该元素的值无关，与该元素的位置有关，因此可考虑构造一个新的行列式，使得 b_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}. 因为本题所求的为第 4 行各元素的代数余子式，因而，所构造的新行列式首先应满足：除了第 4 行外，其余位置上的元素应为原行列式对应的部分. 又注意到 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$，根据行列式的按行展开定理可知，构造的行列式的第 1 行元素应为 $1,1,\cdots,1$.

【解】(1) 根据代数余子式的性质，有

$$A_{41}+4A_{42}-7A_{43}+6A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{(-2)r_2+r_1\\(-1)r_2+r_4}}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{2c_2+c_1\\2c_2+c_3}}\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27.$$

(2) $A_{11}-3A_{12}-6A_{14}=0$.

(3) 根据题意，构造行列式 $\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$，则这个行列式与原行列式的第 4 行的各元素对应的代数余子式相同. 并且有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_1+(-2)r_4\\r_2+(-1)r_4}}\begin{vmatrix}0&-1&-7&-1\\0&-4&-1&-7\\0&2&-1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{按第 1 列展开}]{}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1&-7&-1\\-4&-1&-7\\2&-1&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+(-1)c_3]{}(-1)\begin{vmatrix}0&-7&-1\\3&-1&-7\\0&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[\text{按第 1 列展开}]{}(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot 3\begin{vmatrix}-7&-1\\-1&2\end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-14-1)=-45.$$