UMSS

大学数学科学丛书 —28

有限元方法的数学理论

杜其奎 陈金如 编著

科学出版社

大学数学科学丛书 28

有限元方法的数学理论

杜其奎　陈金如　编著

科学出版社

北京

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　　言

有限元方法是由 R. Courant 于 1943 年首次提出并在 20 世纪 50 年代由航空结构工程师们所发展起来的. 我国冯康教授和西方科学家们各自独立地奠定了有限元方法的数学理论基础. 目前, 有限元方法不仅已建立了较完善的数学理论体系, 而且已在工程技术领域得到广泛应用.

有限元方法之所以得到迅速的发展和广泛的应用, 是因为它具有独特的优越性. 如它具有计算网格的灵活性、计算程序的通用性等. 国内高等院校的许多专业已将有限元方法作为大学生、研究生的必修课. 南京师范大学数学科学学院从 1999 年起就为计算数学专业的研究生开设了本课程, 旨在用尽量少的教学课时, 使计算数学专业研究生获得足够多的有限元方法的数学理论基础, 并能独立地开展有限元方法的理论与应用研究. 本书就是在作者十余年开设有限元方法课程的讲稿基础上编写而成的.

本书主要介绍有限元方法的数学基础知识. 具体内容如下: 第 1 章对有限元方法作简单回顾, 以两个典型的例子介绍用有限元方法求解问题的一般过程; 第 2 章论述椭圆边值问题的变分问题, 这是有限元方法数学理论的基本出发点; 第 3 章介绍有限元方法的数学分析基础 —— Sobolev 空间概要; 第 4 章介绍有限元离散化, 主要讨论单元的选取和形状函数的构造, 通过一个例子给出有限元方法的计算流程, 并介绍了有限元方程组求解的预处理共轭梯度法; 第 5 章研究协调有限元的误差分析, 这是有限元方法数学理论的主要基础, 并简单介绍抛物型问题有限元方法的误差估计; 第 6 章简单介绍有限元计算中数值积分的影响; 第 7 章讨论非协调有限元; 第 8 章介绍混合有限元方法. 教学实践表明, 凡是具备大学本科泛函分析、数学物理方程、线性代数基础的学生, 都能很好地理解本书的全部内容. 当然, 有限元方法的内容是相当丰富的, 有兴趣的读者可以进一步阅读书后相关的参考文献.

这里要特别感谢中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所石钟慈院士和余德浩教授, 正是由于他们的支持和鼓励, 才使得本书能成功面世. 本书的出版也有赖于科学出版社的大力支持, 在此对本书的责任编辑一并表示感谢!

由于作者水平所限, 书中难免存在疏漏和不妥之处, 恳请同行和广大读者不吝赐教, 以利于对本书今后的修正.

作　者

2011 年 2 月于南京师范大学随园

符 号 说 明

本书中所涉及符号, 除特别说明外, 具体含义描述如下:

$\mathbb{Z}$	整数集合.
$\mathbb{R}$	实数集合.
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间.
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集合.
$\mathbb{Z}_+^n$	$\mathbb{Z}_+$ 的乘积空间, 即 $\mathbb{Z}_+^n = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+$.
$\mathbb{N}_+$	正整数集合.
$\varnothing$	空集.
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交集, 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.
$A \backslash B$	集合 A 与 B 的差集, 即 $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.
$\mathrm{supp}(u)$	定义在 Ω 上的函数 u 的支集, 即 $\mathrm{supp}(u) \triangleq \overline{\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \Omega, u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.
$\partial\Omega$	Ω 的边界.
F^{int}	表示集合 F 的内部, 即 F 所有内点的集合.
$M^{m\times n}$	$m \times n$ 阶实矩阵的全体; $S^{m\times m}$ 表示 $m \times m$ 阶实对称矩阵的全体.
$\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$	由 k 个向量 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 张成的向量空间, 其中 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 线性无关.
$P_k(\boldsymbol{x})$	次数不超过 k 的多项式全体, $k \in \mathbb{Z}_+$.
$\mathrm{Card}(A)$	集合 A 的元素个数.
$\mathrm{meas}(\Omega)$	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 测度.
$\dim V$	空间 V 的维数.
$\mathrm{diam}(\Omega)$	区域 Ω 的直径.
$C^0(\Omega)$	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上连续函数空间.
$C^k(\Omega)$	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上有直到 k 次连续可微的函数空间, $k \in \mathbb{Z}_+$.
$C_0^\infty(\Omega)$或$D(\Omega)$	Ω 上具有紧支集的无穷次连续可微的函数空间.
$C^{k,\lambda}(\Omega)$	由直到 k 阶导数均为 λ 阶 Hölder 连续函数组成的空间.
$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$	由直到 k 阶导数均为 λ 阶有界 Hölder 连续函数组成的空间.
$L^p(\Omega)$	Ω 上 p 次 Lebesgue 可积函数的全体.

$H^{m,p}(\Omega)$	$H^{m,p}(\Omega) \triangleq \{v\,\vert D^\alpha v \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \vert\alpha\vert \leqslant m, m \in \mathbb{Z}_+\}$; 特别地, 当 $p=2$ 时, 记 $H^m(\Omega) \triangleq H^{m,2}(\Omega)$.
$H_0^{m,p}(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包, 即 $H_0^{m,p}(\Omega) \triangleq \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^{m,p}(\Omega)}$.
$H(\mathrm{div},\Omega)$	$H(\mathrm{div},\Omega) = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^d, \mathrm{div}\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\}$, d 为 $\boldsymbol{v}$ 的维数.
V^*	空间 V 上线性连续泛函全体.
$\mathcal{L}(U,V)$	由 U 到 V 的有界线性算子的全体.
$X \hookrightarrow Y$	赋范空间 X 连续地嵌入到赋范空间 Y, 即 $X \subset Y$, 且对任意 $x \in X$, 存在正常数 C, 使得 $\Vert x\Vert_Y \leqslant C\Vert x\Vert_X$.
$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$	赋范空间 X 紧嵌入到赋范空间 Y, 即在 X 中任意有界序列, 总可以抽出在 Y 中收敛的子序列.
(e, P_e, Σ_e)	抽象的有限元三元素.
$(\widehat{e}, P_{\widehat{e}}, \Sigma_{\widehat{e}})$	标准 (参考) 有限元三元素.
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵或恒等算子.
$\Vert u\Vert_V$	赋范空间 V 的范数, 而 $\vert u\vert_V$ 为 V 的半范数.
$\Vert u\Vert_{0,p,\Omega}$	$L^p(\Omega)$ 的范数, 即 $\Vert u\Vert_{0,p,\Omega}^p \triangleq \int_\Omega \vert u\vert^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.
$\vert u\vert_{m,p,\Omega}$	赋范空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 的半范数, 即 $\vert u\vert_{m,p,\Omega}^p \triangleq \sum\limits_{\vert\alpha\vert=m} \Vert D^\alpha u\Vert_{0,p,\Omega}^p$.
$\Vert u\Vert_{m,p,\Omega}$	赋范空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 的范数, 即 $\Vert u\Vert_{m,p,\Omega}^p \triangleq \sum\limits_{\vert\alpha\vert\leqslant m} \Vert D^\alpha u\Vert_{0,p,\Omega}^p$.
$\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数.
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元矩阵, 如 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 则 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}) = (a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.
$\det(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 即 $\det(\boldsymbol{A}) = \vert\boldsymbol{A}\vert$.
$u\vert_E$	函数 u 在集合 E 上的限制.
$\delta(\boldsymbol{x})$	Dirac 函数.
$\exp(x)$	表示以 e 为底的指数函数, 即 e^x.
u_t	函数 u 对时间 t 的偏导数, 即 $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.
$\partial_i u$ 或 $u_{,i}$	函数 u 对变量 x_i 的一阶偏导数, 即 $\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i}$.
$\partial_{ij} u$	函数 u 对变量 x_i 和 x_j 的二阶偏导数, 即 $\partial_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.
$\partial^\alpha f$	$\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{\vert\alpha\vert} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, 且 $\vert\alpha\vert = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$.
$\mathrm{grad}u$ 或 ∇u	函数 u 的梯度, 即 $\mathrm{grad}u = \nabla u = (u_{,1}, u_{,2}, \cdots, u_{,n})$.

Δu	$\Delta u=\partial_{11}u+\partial_{22}u+\cdots+\partial_{nn}u$, u 为 n 元函数.
div $\boldsymbol{u}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$	向量函数 $\boldsymbol{u}$ 的散度, 即 div $\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\sum\limits_{i=1}^{n}u_{i,i}$, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$.
rot $\boldsymbol{u}$ 或 $\nabla\times\boldsymbol{u}$	向量函数 $\boldsymbol{u}$ 的旋度.
δ_{ij}	Kronecker 符号: $\delta_{ij}=1$, 当 $i=j$ 时; $\delta_{ij}=0$, 当 $i\neq j$ 时.
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积或叉积.
a. e.	表示 “几乎处处”.

目　　录

《大学数学科学丛书》序
前言
符号说明
第 1 章　有限元方法的简单回顾 …… 1
1.1　变分问题 …… 1
1.2　Galerkin 逼近 …… 5
1.2.1　Galerkin 逼近 …… 5
1.2.2　误差分析 …… 8
思考题 …… 12
第 2 章　椭圆边值问题的变分问题 …… 13
2.1　抽象的变分问题 …… 13
2.2　Lax-Milgram 定理 …… 19
2.2.1　对称情形 …… 19
2.2.2　非对称情形 …… 20
2.3　若干例子 …… 23
2.3.1　Green 公式 …… 24
2.3.2　若干例子 …… 25
思考题 …… 39
第 3 章　Sobolev 空间概要 …… 41
3.1　$L^p(\Omega)$ 空间 …… 41
3.2　广义导数 (微商) …… 46
3.3　磨光算子、均值逼近与单位分解 …… 48
3.3.1　磨光算子 …… 48
3.3.2　均值逼近定理 …… 51
3.3.3　单位分解 …… 55
3.4　Sobolev 空间 …… 58
3.5　Sobolev 空间嵌入定理 …… 61
3.6　等价范数 …… 63
3.7　商空间 …… 66
思考题 …… 68

第 4 章　有限元离散化 ··· 69
4.1　有限元离散化 ··· 69
4.2　二维情形 ··· 73
4.2.1　三角形单元 ··· 74
4.2.2　矩形单元 ··· 84
4.3　有限元方法的计算流程 ··· 87
4.4　预处理共轭梯度法 ··· 93
思考题 ··· 97
第 5 章　协调有限元的误差分析 ··· 99
5.1　引言 ··· 99
5.2　Sobolev 空间中的分片多项式插值 ··· 101
5.2.1　仿射等价元之间范数的关系 ··· 101
5.2.2　单元插值误差估计 ··· 105
5.3　多边形区域上二阶问题的误差分析 ··· 107
5.3.1　先验误差估计 ··· 107
5.3.2　L^2- 模与负模估计 ··· 108
5.3.3　非光滑解的收敛性 ··· 111
5.4　逆不等式 ··· 112
5.4.1　单元上的逆不等式 ··· 112
5.4.2　逆不等式 ··· 113
5.4.3　$H^s(\Omega)$ 模估计 ··· 116
5.4.4　最大模估计 ··· 117
5.5　非光滑函数的插值 ··· 118
5.5.1　有限元空间 ··· 118
5.5.2　Clément 插值 ··· 119
5.6　Nitsche 权模方法 ··· 122
5.6.1　权模定义与权函数关系式 ··· 123
5.6.2　加权插值逼近定理 ··· 125
5.6.3　最大模估计 ··· 127
5.7　抛物型方程有限元解的误差估计 ··· 139
5.7.1　半离散化解的 L^2- 模与梯度估计 ··· 140
5.7.2　全离散化解的误差估计 ··· 145
思考题 ··· 150
第 6 章　数值积分的影响 ··· 152
6.1　有限元方法中的数值积分 ··· 152

6.1.1 三角形单元上的一次精度求积公式 …… 154
6.1.2 三角形单元上的二次精度求积公式 …… 155
6.1.3 三角形单元上的三次精度求积公式 …… 156
6.1.4 三角形单元上带导数的三次精度求积公式 …… 157
6.1.5 矩形单元上的数值积分 …… 158
6.2 数值积分下的抽象误差估计 …… 158
6.3 相容误差估计 …… 163
思考题 …… 171
第 7 章 非协调有限元 …… 172
7.1 抽象的误差估计 …… 172
7.2 二阶问题的非协调元 …… 175
7.2.1 Crouzeix-Raviart 三角形元 (C-R 元) …… 175
7.2.2 Wilson 矩形元 …… 178
7.3 四阶问题的非协调元 …… 181
思考题 …… 187
第 8 章 混合有限元方法 …… 188
8.1 混合变分问题之例 …… 188
8.2 抽象的连续混合变分问题 …… 191
8.2.1 混合变分问题 …… 191
8.2.2 推广 Lax-Milgram 定理 …… 194
8.2.3 LBB 条件 …… 195
8.3 离散化逼近 …… 197
8.4 两个应用实例 …… 200
8.4.1 Poisson 方程边值问题的混合有限元方法 …… 200
8.4.2 Stokes 问题的混合有限元方法 …… 202
思考题 …… 206
参考文献 …… 208
索引 …… 210

第 1 章　有限元方法的简单回顾

有限元方法是求解偏微分方程近似解的一种现代数值方法, 用其来求解一般问题时, 大致要经过如下几个过程:

(i) 建立与实际问题相适应的数学模型 (微分方程及边值条件);

(ii) 寻找与数学模型相适应的变分问题;

(iii) 建立有限元空间, 即选择元素类型和相应的形状函数;

(iv) 单元刚度矩阵、单元列阵的计算和总刚度矩阵、总列阵的合成;

(v) 边界条件的处理和有限元方程组求解;

(vi) 必要的理论分析: 误差分析、数值积分的影响, 等等;

(vii) 回到实际问题中去 (即解释实际问题).

本书仅对上述的部分内容 (主要是理论部分, 如 (ii)、(iii) 和 (vi) 等) 给予介绍, 至于计算部分本书就不再过多论述.

1.1　变 分 问 题

以下我们先以两个简单的例子, 来说明如何寻找求解问题的变分问题.

例 1.1.1 (*两点边值问题*)　考虑如下两点边值问题:

$$\begin{cases} -u''(x)+\sigma u=f(x), & x\in\Omega, \\ u(0)=0, & u'(\ell)=0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $\Omega\triangleq(0,\ell)$, σ 为给定的某正常数. 若 u 为 (1.1.1) 的解, 对满足 $v(0)=0$ 的任意阶可微函数 (或足够光滑) v, 则由分部积分可得

$$\begin{aligned}\langle f,v\rangle &\triangleq \int_0^\ell f(x)v(x)\mathrm{d}x=\int_0^\ell\big[-u''(x)v(x)+\sigma uv(x)\big]\mathrm{d}x \\ &= -u'(x)v(x)\big|_0^\ell+\int_0^\ell\big[u'(x)v'(x)+\sigma u(x)v(x)\big]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\ell\big[u'(x)v'(x)+\sigma u(x)v(x)\big]\mathrm{d}x\triangleq B(u,v).\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

若记

$$V\triangleq\{v\mid v,v'\in L^2(0,\ell),B(v,v)<+\infty,\ 且\ v(0)=0\},$$

其范数定义为

$$\|v\|_{1,\Omega} \triangleq \Big[\int_0^\ell \big(|v'(x)|^2 + |v(x)|^2\big)\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

则问题 (1.1.1) 的解可由下列问题所描述:

$$\text{求 } u \in V, \text{ 使得 } \ B(u,v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in V. \tag{1.1.3}$$

上述 (1.1.3) 称为两点边值问题 (1.1.1) 的**变分问题**或**弱形式**.

记 $C^k(\Omega)$ 为 Ω 上具有直到 k 阶连续偏导数的函数的全体.

变分问题 (1.1.3) 的解称为问题 (1.1.1) 的**弱解**. 如果函数 $u(x) \in C^2(0,\ell) \cap C^1[0,\ell]$, 且满足 (1.1.1), 则称 $u(x)$ 为 (1.1.1) 的**古典解**.

弱解所在的空间称为**容许空间** (或**试探空间**), 同时由于 (1.1.3) 必须对 V 中的任一元素 v 都要成立, 故称 V 为**检验空间**. 上述问题 (1.1.3) 的试探空间和检验空间取同一个空间 V, 此时称为**能量空间**. 但通常试探空间和检验空间未必为同一空间.

对上述问题的古典解与弱解有如下关系: 若 $f \in C^0[0,\ell]$, 且 $u \in C^2(0,\ell) \cap C^1[0,\ell]$ 满足 (1.1.3), 则 u 为 (1.1.1) 的解; 反之, 若 u 为 (1.1.1) 的解, 则 u 必为 (1.1.3) 的解.

事实上,设 $v \in V \cap C^1([0,\ell])$, 则由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\langle f, v\rangle = B(u,v) &= \int_0^\ell \big(u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)\big)\mathrm{d}x \\
&= u'(x)v(x)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \big(u''(x)v'(x) - \sigma u(x)v(x)\big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\ell \big(-u''(x) + \sigma u\big)v(x)\mathrm{d}x + u'(\ell)v(\ell),
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

所以, 对任意满足 $v(\ell) = 0$ 的 $v(x) \in V \cap C^1([0,\ell])$, 有 $\langle f - (-u'' + \sigma u), v\rangle = 0$. 设 $\omega(x) = f + u'' - \sigma u$. 若 $\omega(x) \neq 0$, 则 $\omega(x)$ 在某区间 $[x_0, x_1] \subset [0,\ell]$ 保号 (据连续函数的性质). 取函数 $v(x)$ 如下:

$$v(x) = \begin{cases} (x-x_0)^2(x-x_1)^2, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1]. \end{cases}$$

但 $\langle \omega, v\rangle \neq 0$, 这与前述发生矛盾. 因此 $\omega \equiv 0$, 即 $-u''(x) + \sigma u(x) = f(x)$.

取 $v(x) = x$, 则结合 $-u''(x) + \sigma u(x) = f(x)$, 并据 (1.1.4) 式可得 $u'(\ell) = 0$.

显然, $u \in V$ 蕴含 $u(0) = 0$. 这就证明了 $u(x)$ 为 (1.1.1) 的解.

反之, 若 $u(x)$ 为 (1.1.1) 的解, 则由 (1.1.3) 的推导过程可知它必为 (1.1.3) 的解.

例 1.1.2 (二维边值问题)　考虑下列二维边值问题:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \\ \left(p(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma(\boldsymbol{x})u\right)\Big|_{\Gamma_2} = g(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中 $p(\boldsymbol{x})$ 一阶连续可导, 且 $p(\boldsymbol{x}) \geqslant p_0 > 0$, $\sigma(\boldsymbol{x})$ 连续且 $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. n 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向, Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的连通有界区域, 其边界 $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 为分段光滑.

$$(u,v)_{1,\Omega} \triangleq \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_\Omega (\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v + uv)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{1.1.6}$$

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \triangleq (u,u)_{1,\Omega} = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_\Omega (|\mathrm{grad}u|^2 + |u|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.1.7}$$

在范数 (1.1.7) 下, 完备化 $C^1(\Omega)$ 所得到的函数空间记为 $H^1(\Omega)$,

$$V \triangleq \big\{u \mid u \in H^1(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = 0\big\}. \tag{1.1.8}$$

如果函数 $u(\boldsymbol{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且满足 (1.1.5) 式, 则称 $u(\boldsymbol{x})$ 为二维边值问题 (1.1.5) 的**古典解**.

设 $u \in C^2(\Omega)$ 为 (1.1.5) 的古典解, 则对任意 $v \in V$, 用 v 乘以 (1.1.5) 两边并在 Ω 上积分, 可得

$$-\int_\Omega v\ \mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

据散度的运算可得

$$-\int_\Omega \big[\mathrm{div}\big(vp(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

据 Gauss 定理 (即 $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$), 我们有

$$\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \oint_{\partial\Omega} vp(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_\Omega fv\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

若记

$$B(u,v) \triangleq \int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} \sigma(\boldsymbol{x})uv\mathrm{d}s,\ \forall\, u,v \in V, \tag{1.1.9}$$

$$\langle f,v\rangle \triangleq \int_\Omega fv\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} gv\mathrm{d}s, \tag{1.1.10}$$

则由上述关系式可得问题 (1.1.5) 相应的变分问题:

$$\text{求 } u \in V, \text{ 使得 } \ B(u,v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in V. \tag{1.1.11}$$

反之, 若 u 是 (1.1.11) 的解 (即 (1.1.5) 的弱解), 且 $u \in C^2(\Omega)$, 则由 $v|_{\Gamma_1} = 0$ 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \left[\mathrm{div}\big(vp(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big) - v\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \oint_{\partial\Omega} vp\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega v\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \oint_{\Gamma_2} vp\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega v\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

代入 (1.1.11) 可得

$$-\int_\Omega v\Big(\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big) + f\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Gamma_2} v\Big(g - p(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u\Big)\mathrm{d}s.$$

由于 v 的任意性, 可得

$$-\mathrm{div}\big(p(\boldsymbol{x})\mathrm{grad}u\big) = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \ \Big(p(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(\boldsymbol{x})u\Big)\Big|_{\Gamma_2} = g(\boldsymbol{x}).$$

并注意到 $u \in V$, 即 $u|_{\Gamma_1} = 0$, 故 u 为 (1.1.5) 的古典解. 综上所述, 有

若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 为 (1.1.5) 的古典解, 则 u 必为 (1.1.11) 的解, 即 u 也是 (1.1.5) 的弱解; 反之, 若 u 为 (1.1.11) 的解, 且 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 则 u 也是 (1.1.5) 的古典解.

前面两例所给的变分问题称之为Galerkin 变分问题, 下面我们再给出相应的Ritz 变分问题. 对于前述给定的 $B(u,v)$ 和 $\langle f,v\rangle$, 作如下的二次泛函:

$$J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - \langle f,v\rangle. \tag{1.1.12}$$

$J(v)$ 的极小值问题为

$$\text{求 } u \in V, \text{ 使得 } \ J(u) = \min_{v\in V} J(v). \tag{1.1.13}$$

称问题 (1.1.13) 为 (1.1.5) 或 (1.1.1) 的Ritz 变分问题.

设 H 为一 Hilbert 空间, $B(\cdot,\cdot)$ 为定义在 H 上的泛函. 称 $B(\cdot,\cdot)$ 为 H 上双线性意指, 对任意常数 α_1, α_2, β_1 和 β_2, 有

$$\begin{aligned}&B(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2, \beta_1v_1 + \beta_2v_2)\\ =&\alpha_1\beta_1B(u_1,v_1) + \alpha_1\beta_2B(u_1,v_2) + \alpha_2\beta_1B(u_2,v_1) + \alpha_2\beta_2B(u_2,v_2),\\ &\qquad\qquad \forall u_1,u_2,v_1,v_2 \in H.\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

称泛函 $B(\cdot,\cdot)$ 在 H 上具有对称性、有界性 (或连续性)、强制性 (或正定性, 或 V- 椭圆性) 意指, 存在正常数 M, α 使得

$$\begin{aligned}&B(u,v)=B(v,u),\quad \forall\, u,v\in H,\\&|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_H\|v\|_H,\quad \forall\, u,v\in H,\\&B(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_H^2,\quad \forall\, u\in H.\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

下面的定理给出了 Galerkin 变分问题与 Ritz 变分问题之间的等价性.

定理 1.1.1[12, 13, 16] 设 V 为一给定的 Hilbert 空间. $B(\cdot,\cdot)$ 为 $V\times V$ 上对称连续和强制的双线性泛函, f 是 V 上的线性连续泛函 (即 $f\in V^*$). 变分问题:

$$求\ u\in V,\ 使得\ \ B(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall\, v\in V.\tag{1.1.16}$$

$J(v)$ 为由 (1.1.12) 式所确定的二次泛函, 则 (1.1.13) 和 (1.1.16) 两问题中:

(i) 任一问题有解, 则解不多于一个;

(ii) 任一个问题的解, 必是另一个问题的解;

(iii) 如果 u^* 是它们的解, 则

$$J(v)-J(u^*)=\frac{1}{2}B(v-u^*,v-u^*),\quad \forall\, v\in V.\tag{1.1.17}$$

本定理的证明, 请参看文献 [12, 13, 16].

1.2 Galerkin 逼近

数值方法的任务: 无穷维问题 $\Rightarrow$ 有限维问题 $\Rightarrow$ 求近似解.

1.2.1 Galerkin 逼近

本节我们主要以两点边值问题的变分问题 (1.1.3):

$$求\ u\in V,\ 使得\ \ B(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall\, v\in V$$

为例, 介绍 Galerkin 逼近及相应的误差分析.

设 $V_h\subset V$ 为 V 的有限维子空间 (或有限元子空间), 当 $h\to 0$ 时, V_h 的维数无限的增加, 直到充满 V 为止 (即 $\lim\limits_{h\to 0}\dim V_h=\dim V$), 则 (1.1.3) 的 Galerkin 逼近为

$$求\ u_h\in V_h,\ 使得\ \ B(u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle,\quad \forall\, v_h\in V_h.\tag{1.2.1}$$

令 $\dim V_h=M$, 即 V_h 为 M 维有限维空间, 其基函数系为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^M$, 则

$$u_h=\sum_{i=1}^M U_i\varphi_i(x),\quad v_h=\sum_{i=1}^M V_i\varphi_i(x).\tag{1.2.2}$$

将 (1.2.2) 代入 (1.2.1) 后, 可得有限元方程组

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F}, \tag{1.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}\triangleq(U_1,U_2,\cdots,U_M)^{\mathrm{T}},\\
&\boldsymbol{K}\triangleq(K_{ij})_{M\times M},\ K_{ij}\triangleq B(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^{\ell}(\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+\sigma\varphi_i(x)\varphi_j(x))\mathrm{d}x,\\
&\boldsymbol{F}\triangleq(F_1,F_2,\cdots,F_M)^{\mathrm{T}},\ F_i\triangleq\langle f,\varphi_i\rangle=\int_0^{\ell}f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(1.2.3) 为 (1.2.1) 对应的线性方程组, $\boldsymbol{K}$ 称为**刚度矩阵**, $\boldsymbol{F}$ 称为**列阵** (或**载荷向量**).

现将区间 $[0,\ell]$ 分成 N 份, 记 $I_i\triangleq[x_{i-1},x_i]$, $1\leqslant i\leqslant N$. 称 x_i 为**节点**, 并记 $x_0=0$, $x_N=\ell$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{h_i\}$. 取 $\varphi_i(x)$ 为如下分段线性插值函数

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h_1}(x_1-x), & x_0\leqslant x\leqslant x_1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases} \tag{1.2.4}$$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h_i}(x-x_{i-1}), & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ \dfrac{1}{h_{i+1}}(x_{i+1}-x), & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant N-1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases} \tag{1.2.5}$$

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h_N}(x-x_{N-1}), & x_{N-1}\leqslant x\leqslant x_N,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{1.2.6}$$

易知, $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,N$, 故 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ 构成了 V_h 的基函数, 且 $\varphi_i(x)$ 的支集为 $[x_{i-1},x_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,N-1)$, $\varphi_N(x)$ 的支集为 $[x_{N-1},x_N]$ (见图 1.2.1).

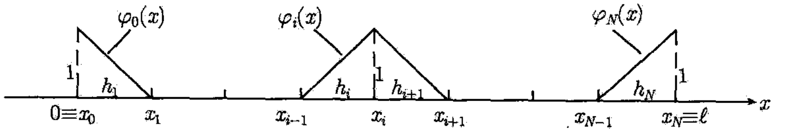

图 1.2.1

以下介绍 V_h 在此基函数下, 确定有限元方程组 (1.2.3). 由于

$$\begin{aligned}
K_{i,i-1} &= B(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^\ell \left(\varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x) + \sigma\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_i} \cdot \frac{-1}{h_i} + \sigma\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \cdot \frac{x_i - x}{h_i}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{h_i} + \frac{1}{6}\sigma h_i, \quad i = 2, 3, \cdots, N,
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned}
K_{ii} &= B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^\ell \left[\varphi_i'(x)\varphi_i'(x) + \sigma\varphi_i(x)\varphi_i(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\varphi_i'(x)\right)^2 + \left(\varphi_i(x)\right)^2\sigma\right]\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\varphi_i'(x)\right)^2 + \left(\varphi_i(x)\right)^2\sigma\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 + \sigma\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2}\right]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right)^2 + \sigma\frac{(x_{i+1} - x)^2}{h_{i+1}^2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})\sigma, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1,
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$$\begin{aligned}
K_{i,i+1} &= B(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_0^\ell \left[\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) + \sigma\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-1}{h_{i+1}} \cdot \frac{1}{h_{i+1}} + \sigma\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \cdot \frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{6}\sigma h_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1,
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$$\begin{aligned}
K_{NN} &= B(\varphi_N, \varphi_N) = \int_0^\ell \left[\varphi_N'(x)\varphi_N'(x) + \sigma\varphi_N(x)\varphi_N(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left[\left(\frac{1}{h_N}\right)^2 + \left(\frac{x - x_{N-1}}{h_N}\right)^2\sigma\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h_N} + \frac{1}{3}\sigma h_N,
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

$$\begin{aligned}
F_i &= \langle f, \varphi_i\rangle = \int_0^\ell f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x_i) + \mathcal{O}(h_i)\right](x - x_{i-1})\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{h_{i+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \mathcal{O}(h_{i+1})\right](x_{i+1} - x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$