“211”大学数学创新课改教材

数学分析

下

◎马建国 编著

科学出版社

"211"大学数学创新课改教材

数学分析(下)

马建国　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书属于“211”大学数学创新课改教材，分为上、下两册。上册共5章，内容包括极限与连续、导数、不定积分、定积分、级数；下册共4章，内容包括傅里叶级数、n维欧氏空间上的微分理论、多元函数的黎曼积分、曲线积分与曲面积分。

本书可作为高等学校数学专业教材，也可作为其他相关专业及科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析：下/马建国编著. 一北京：科学出版社，2011.5

“211”大学数学创新课改教材

ISBN 978-7-03-030905-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… Ⅲ.①数学分析一高等学校一教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第074330号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年6月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1—3 000 字数：297 000

定价：26.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数学分析理论的萌芽可以追溯到阿基米德(前 287—前 212)为计算抛物线弓形的面积而使用的穷竭法,这是使用多边形面积逼近所要计算的面积的方法,直到现在这也是唯一可行的方法. 这种方法就是积分的前身. 17 世纪的牛顿(1642—1727)和莱布尼茨(1646—1716)各自使用了微积分的思想并发现微分与积分的关系,微积分自此诞生. 经过后人特别是以欧拉(1707—1783)和拉格朗日(1736—1813)为代表的 18 世纪数学家的大力推动,微积分得到了迅速的发展并在物理、天文等领域广泛使用. 19 世纪的数学家柯西(1789—1857)、黎曼(1826—1866)、魏尔斯特拉斯(1815—1897)等人对微积分的主要贡献是把数学的严密性注入到微积分理论,构建成以极限和实数理论为基石的微积分大厦. 这就是现在称为数学分析的这门学问的来历.

数学的理论往往不是根据逻辑的次序有条不紊地发展的. 这中间的紊乱是在黑暗中艰难摸索的有力证据. 然而讲述一套成熟的理论要从基础讲起,对于数学分析通常是从实数理论开始. 根据以往的经验,初次学习数学分析的学生渴望尽快学到比较生动的、有应用价值的内容,而对戴德金(1831—1916)和康托尔(1845—1918)的实数理论显然没有做好接受的准备. 因此我们没有一开始就系统介绍实数体系,仅从数轴的直观性质出发导出确界定理、柯西收敛准则等刻画实数空间本质的定理. 在第 1 章结尾,我们简单介绍戴德金和康托尔关于实数构造的理论.

数学思想的表达方式是数学的一个极其重要的组成部分. 笛卡儿(1596—1650)的坐标系使代数与几何有机地结合在一起,从而促进了数学的发展. 自从牛顿和莱布尼茨发明了微积分以后,微积分理论在欧洲大陆蓬勃发展,而英国相对滞后. 有评论说这是因为欧洲数学家得益于莱布尼茨使用的符号系统. 在高斯的曲面理论之后将近一个世纪,曲面的高维类似物——流形才在张量分析这套符号语言的推动下形成理论.

有鉴于以上种种,本书对数学符号的使用非常慎重. 在保留通用符号的前提下,我们尝试对函数的各种极限,如单侧极限、自变量趋于正负无穷时函数的极限、函数值趋于正负无穷的情况等给出统一的定义和记法,并在定理的叙述和证明中不增加篇幅地涵盖多种情况. 多元函数及向量值函数的表示和定义、定理尽量使用一元函数的表达形式,以使读者知道哪些是一元函数理论的简单直白的推广,哪些是有本质的区别.

为数学分析的应用考虑,绝大多数定理给出尽可能一般的形式并有严密的证

明，如洛必达法则、泰勒公式（单变量和多变量）、逆映射定理与隐函数定理、n 元函数积分变量代换公式、格林定理等. 本书也包含数学分析教材不常有的若干内容，如函数的上、下极限及上半连续与下半连续，处处不可微的连续函数，等周不等式，莫尔斯引理，多元函数黎曼可积的勒贝格充要条件等.

本书分上、下两册，共 9 章，可按三个学期讲授，每个学期学习 3 章. 虽然篇幅不大，但内容完整充实. 学生只需要中学数学和少量线性代数作为预备知识. 每节后附有难易程度不等的习题，较难的题目一般有提示或详细的解答.

加星号的是选学内容，不学不影响本书其他内容的学习.

本书创新点较多，疏漏和不足之处在所难免，恳请读者和同仁指正，以便再版时予以修订。

马建国

2011 年 3 月

目　录

第6章 傅里叶级数

6.1 傅里叶级数与黎曼引理

6.1.1 定义

形如

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

这样的函数项级数称为三角级数. 很明显根据三角函数的周期性,如果此级数在$[-\pi,\pi]$上收敛,那么就在$(-\infty,+\infty)$上收敛,并且和函数以2π为周期.

如果收敛是一致的,那么我们可以用和函数来表示系数$\alpha_n,\beta_n(n=0,1,\cdots)$. 实际上,记

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),\tag{6.1.1}$$

两端乘$\cos nx$并在$[-\pi,\pi]$上逐项积分,注意到

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0 & (k\neq n),\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 & (k\neq n),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi & (n\neq 0),\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi & (n\neq 0),\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=2\pi & (n=0),\end{cases}$$

并记

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

则有 $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \alpha_n = a_n (n \neq 0)$. 等式(6.1.1)两边乘 $\sin nx$ 并积分类似得到

$$\beta_n = b_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

设 $f(x) \in L_R^1[-\pi,\pi]$，那么

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

有意义，称为 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)系数. 级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数. 通常记为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

一个自然的问题是，当 $f(x)$ 满足什么条件时，其傅里叶级数收敛于 $f(x)$. 也就是问，在什么条件下"$\sim$"可以换成"$=$".

简单的考虑使我们可以证明，如果 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数并以 2π 为周期，并且其傅里叶系数满足 $\sum_{k=1}(|a_k|+|b_k|)<\infty$，则其傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 事实上，由 $\sum_{k=1}(|a_k|+|b_k|)<\infty$ 可知 $f(x)$ 的傅里叶级数一致收敛. 记和函数为 $s(x)$，那么 $f(x)$ 与 $s(x)$ 的傅里叶系数相等. 这推出

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s(x)]\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s(x)]\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

由魏尔斯特拉斯逼近定理 II(定理 5.11.3)后面的例子，得到

$$f(x) - s(x) \equiv 0.$$

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不仅以 2π 为周期而且有连续的二阶导函数,那么两次使用分部积分,可得

$$\pi a_n = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

$$\pi b_n = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$|a_n| \leqslant \frac{2\max|f''(x)|}{n^2}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{2\max|f''(x)|}{n^2}.$$

从而

$$\sum_{k=1}(|a_k|+|b_k|) < \infty.$$

因此这时 $f(x)$ 的傅里叶级数一致收敛于 $f(x)$.

1807 年傅里叶相信任何函数都可以展开成收敛的三角级数. 然而后来人们发现即使是以 2π 为周期的连续函数,其傅里叶级数也未必处处收敛. 鉴于傅里叶级数在物理上的重要应用,19 世纪到 20 世纪对傅里叶级数展开了广泛深入的研究. 许多新思想和新方法的出现对数学的发展产生深远的影响.

6.1.2 黎曼引理

大家知道,正数 p 越大,在一个固定的区间 I 上函数 $\sin px$ 或 $\cos px$ 上下振荡的频率越高,从而函数 $f(x)\sin px$ 在区间 I 上的积分正负抵消得越充分. 图 6.1.1 显示 $f(x)=\cos x$, $p=20$ 时函数 $f(x)\sin px$ 的图像. 这使我们有理由猜测 $f(x)\sin px$ 在区间 I 上的积分会随着 p 的不断增加而趋于零. 这在下述定理中得到证实.

定理 6.1.1 (黎曼引理) 设 I 是一个区间(有界或无界),函数 $\psi(x)\in L_R^1(I)$,则有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_I \psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u = 0;$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_I \psi(u)\cos pu\,\mathrm{d}u = 0.$$

证 (1) 首先设 $I=[a,b]$,函数 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上常义可积. 对于分割

$$\Delta: a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b,$$

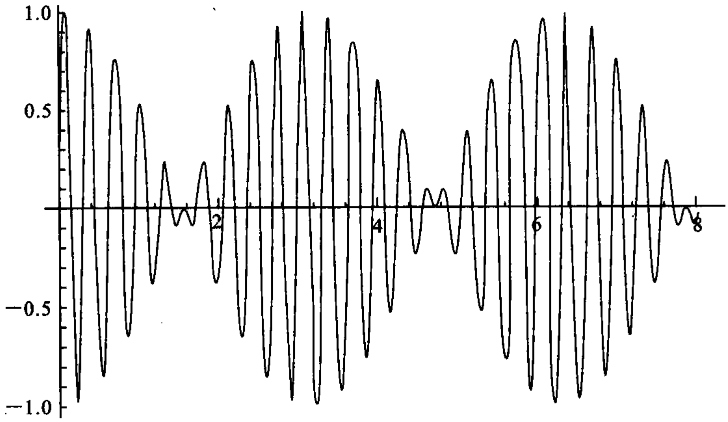

图 6.1.1　$y=\cos x\sin(20x)$

记 $m_i=\inf\limits_{u\in[u_{i-1},u_i]}\psi(u)$，$M_i=\sup\limits_{u\in[u_{i-1},u_i]}\psi(u)$，并设 ω_i 是 $\psi(x)$ 在 $[u_{i-1},u_i]$ 上的振幅，则

$$\begin{aligned}\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u&=\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}[\psi(u)-m_i]\sin pu\,\mathrm{d}u+\sum_{i=1}^n m_i\int_{u_{i-1}}^{u_i}\sin pu\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

注意到有不等式 $\left|\int_\alpha^\beta\sin pu\,\mathrm{d}u\right|<\dfrac{2}{p}$，得到

$$\left|\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i(u_i-u_{i-1})+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^n|m_i|.$$

对任意 $\varepsilon>0$，取定分割 Δ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(u_i-u_{i-1})<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又当 p 足够大时，有

$$\frac{2}{p}\sum_{i=1}^n|m_i|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\to0\quad(p\to+\infty).$$

以上证明换一种更有启发性的说法其实就是，首先根据积分逼近定理 4.3.4 可取到阶梯函数 $\varphi(x)$ 使

$$\int_a^b |\psi(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再令 p 足够大可使

$$\left|\int_a^b\varphi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 p 足够大时有

$$\left|\int_a^b\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|\psi(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_a^b\varphi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

这就是逼近定理的主要用途：欲证关于可积函数的一个命题，很多时候可以归结于证明命题对一类比较简单的函数（比如阶梯函数）成立.

(2) 设 $I=[a,b]$，函数 $|\psi(x)|$ 在 $[a,b]$ 上广义可积. 不妨设 a 是 $|\psi(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的唯一奇点. 由于 $|\psi(x)|$ 在 $[a,b]$ 上广义可积，所以 $\forall\varepsilon>0$，可取定 $\delta>0$ 足够小使 $\int_a^{a+\delta}|\psi(u)|\,\mathrm{d}u<\frac{\varepsilon}{2}$，从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|&\leqslant\left|\int_a^{a+\delta}\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|+\left|\int_{a+\delta}^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant\int_a^{a+\delta}|\psi(u)|\,\mathrm{d}u+\left|\int_{a+\delta}^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_{a+\delta}^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|.\end{aligned}$$

又根据(1)知，当 p 足够大时，可使 $\left|\int_{a+\delta}^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，因此 p 足够大时有

$$\left|\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\right|<\varepsilon.$$

这证明了

$$\int_a^b\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\to0\quad(p\to+\infty).$$

(3) 如果 I 是无界区间，而 $|\psi(x)|$ 在 I 上广义可积，那么类似于(2)可以证明

$$\int_I\psi(u)\sin pu\,\mathrm{d}u\to0\quad(p\to+\infty).$$ □

推论 6.1.1 如果 $f(x)\in L_R^1[-\pi,\pi]$，那么其傅里叶系数满足 $a_n\to0,b_n\to0\ (n\to\infty)$.

习 题 6.1

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期并且 $f(x)=(\pi-x)^2/4\ (x\in[0,2\pi))$.

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数；

(2) 证明 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的函数并且 $f\in C^k[0,2\pi]$. 证明 $f(x)$ 的傅里叶系数满足

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right),\qquad b_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

3. 设 $f(x)\in L_R^1(-\infty,+\infty)$，$K(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x k(t)\mathrm{d}t=0.$$

证明 $\lim\limits_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(px)\mathrm{d}x=0$.

习题答案与提示

1. $f(x)\sim\dfrac{\pi^2}{12}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.
2. 提示：使用 k 次分部积分公式，再利用黎曼引理.
3. 提示：参考黎曼引理的证明.

6.2 傅里叶级数的收敛性

6.2.1 部分和的积分表示

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的函数，并且在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 其傅里叶级数的部分和为

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记

$$D_n(u)=1+2\cos u+2\cos 2u+\cdots+2\cos nu,\tag{6.2.1}$$

称为狄利克雷核. 显然 $D_n(2k\pi)=2n+1$. 当 $u\neq 2k\pi$ 时,等式(6.2.1)两端同乘 $\sin\frac{u}{2}$,并使用公式

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)$$

可以算出

$$D_n(u)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\frac{u}{2}}.$$

狄利克雷核的图像如图 6.2.1 所示. 函数 $D_n(x)$ 的最大值为

$$D_n(0)=2n+1.$$

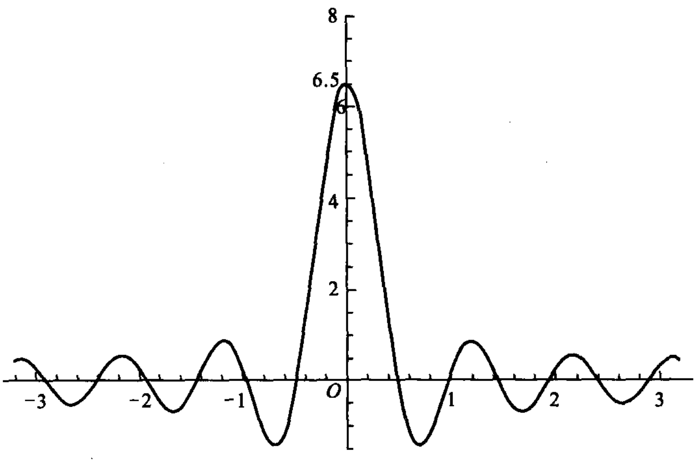

图 6.2.1 $y=\frac{1}{2}D_n(x),n=6$

使用狄利克雷核,把部分和写成

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)\mathrm{d}t.$$

上述积分作变量代换 $u=t-x$,得到

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)D_n(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)D_n(u)\mathrm{d}u\quad（因\ f(x+u)D_n(u)\ 有周期\ 2\pi）.$$

把 u 换成 $-u$ 并利用 $D_n(-u)=D_n(u)$，可以得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+u)D_n(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u,$$

因此

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}D_n(u)\mathrm{d}u.\tag{6.2.2}$$

这使我们可以通过估计积分来研究部分和 $s_n(x)$ 的收敛性.

例 6.2.1　证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

证　因为 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)\mathrm{d}u=1$，所以

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\pi(\forall n).$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

因此只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\mathrm{d}u\right\}=0.$$

也就是说，如果记 $\varphi(u)=u^{-1}-\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^{-1}$，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\varphi(u)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du$$

即可. 而这由黎曼引理推出：这是因为 $\lim\limits_{u\to 0+}\varphi(u)=0$，故 $\varphi(u)$ 在 $[0,\pi]$ 上是常义可积的. □

6.2.2 迪尼判别法

我们继续上节的讨论. 对于固定的 x，记

$$g(u)=\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2},$$

那么等式(6.2.2)可以写成

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(u)D_n(u)du\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{g(u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du.\end{aligned}$$

另外，根据黎曼引理可知

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{g(u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{g(u)}{u}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(u)\varphi(u)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du\\&\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

这表明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n(x)$ 存在的充要条件是极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{g(u)}{u}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du$$

存在. 并且当极限存在时，两极限是相等的.

而对任何 $\delta>0$，根据黎曼引理有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^\pi\frac{g(u)}{u}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du=0.$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u)}{u}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]\mathrm{d}u$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{g(u)}{u}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]\mathrm{d}u.$$

那么上面的极限在什么条件下存在呢?我们有下述结果：

定理6.2.1 如果$g(0+)$存在,并且函数$\dfrac{g(u)-g(0+)}{u}$在某个$[0,\delta]$上满足黎曼引理的条件(绝对可积),则有

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u=g(0+).$$

证 由于

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=\lim_{p\to+\infty}\int_0^{p\delta}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}\quad(\text{根据例 }6.2.1).$$

因此当$p\to+\infty$时,等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u)-g(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u+\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u$$

右边第一项趋于零(根据黎曼引理),第二项趋于$g(0+)$. □

推论6.2.1 设$g(0+)$存在,对任何$a\in(0,\delta)$,函数$g(x)$在$[a,\delta]$上可积,并且存在$M>0,\alpha>0$使$|g(u)-g(0+)|\leqslant Mu^{\alpha}$在$(0,\delta]$上成立,则

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u=g(0+).$$

证 因为这时$\dfrac{g(u)-g(0+)}{u}$在$[0,\delta]$上满足黎曼引理条件. □

定理6.2.2 (迪尼判别法)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上以2π为周期,并且在$[-\pi,\pi]$上绝对可积. 如果在x处$f(x+)$和$f(x-)$存在,另外有有限的单侧导数