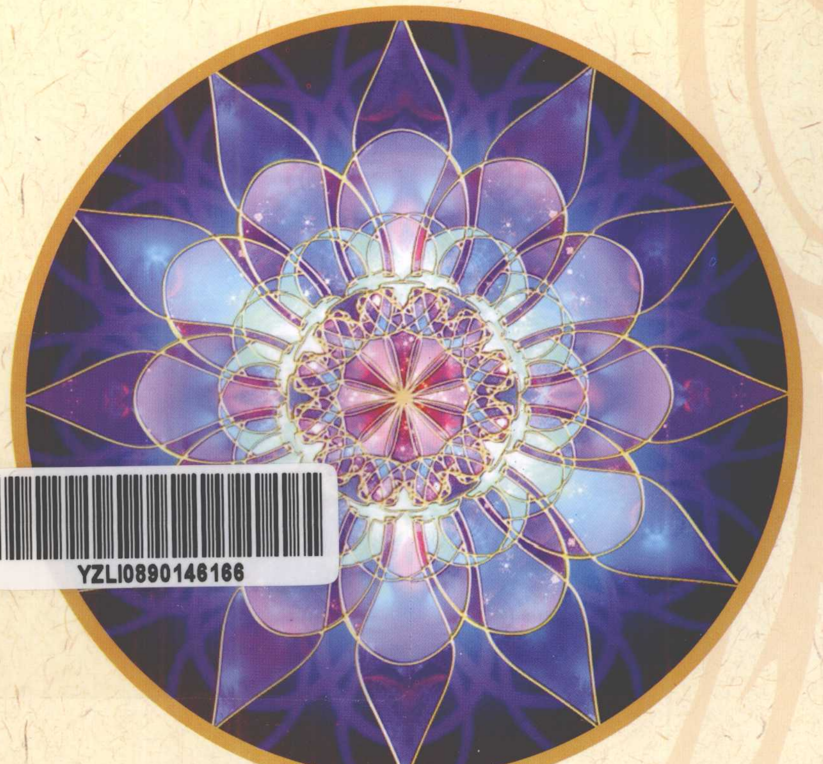
学科精英大视野系列丛书

精英数学

九年级　黄东坡◎著

大视野



◎历史钩沉　文化积淀

◎问题览胜　思维锤炼

◎人文关怀　审美引领

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

学科精英大视野系列丛书

精英数学

九年级

黄东坡◎著

大视野

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

鄂新登字01号
图书在版编目(CIP)数据

精英数学大视野·九年级/黄东坡著.
武汉:湖北人民出版社,2011.5

ISBN 978-7-216-06729-4

Ⅰ.精…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第015778号

精英数学大视野
九年级
黄东坡 著

出版发行:湖北长江出版集团
湖北人民出版社
地址:武汉市雄楚大道268号
邮编:430070

印刷:武汉理工大印刷厂
经销:湖北省新华书店
开本:880毫米×1230毫米 1/16
印张:15.25
字数:424千字
定价:25.00元
版次:2011年5月第1版
印次:2011年7月第2次印刷
印数:20 001-30 000
书号:ISBN 978-7-216-06729-4

本社网址:http://www.hbpp.com.cn

前言

俱怀逸兴壮思飞 欲上青天揽明月

——文化视野下的精英数学

一

拿破仑曾说:“百分之二十的法国精英是法兰西民族前进的火车头。”

美国国家研究委员会发表的《人人关心数学教育未来》一书中强调:“国与国之间的竞争是高新技术的竞争,而高新技术竞争的背后是具有创造力的拔尖人才的竞争,很少有人知道,高新技术的本质是数学化的技术。”

本书为有志于升入重点中学的学生而著,为未来学科带头人、各行业领军人而作。追求在广阔的文化背景下,用思想方法武装头脑,用历史名题开启心智,用问题解决锤炼思维,用人文精神滋养心灵,用审美视角引领鉴赏。旨在打造未来精英的核心能力构成:专业素养、理性思维、人文情怀、审美眼光。

二

本书展现了隽永的图景,或数学大师的风采展示,或数学成果的呈现,或数学名著的介绍,或数学重大事件的再现,把抽象的数学化为视觉化的形象,通过图示形象地渗透数学思想方法精神,直观地反映数学与自然、数学与现实、数学与其他学科的联系。在阅读本书过程中,重温厚重而曲折的数学历史,领略数学的力量、神韵、美丽。

本书收录了历史上经典数学名题、趣题,或来自民间传说,或文化名流编撰,或数学大师的研究成果,它们是数学大花园中的奇葩,因内涵丰富、匠心独具而流传千古。在思考这些名题、趣题过程中,从惊讶到思考而开启心智,品鉴经典名题的醇香韵味。

本书汇集了近年国内外中考、竞赛的优秀试题,或引而不发的点拨,或深入浅出的分析,或刨根究底的探索,或开放思维的发散,或言简意赅的总结,或直抵心灵的感悟。在解决这些问题的过程中,感受解题之道、思维之美,体会由一筹莫展、冥思苦想到茅塞顿开、悠然心会的巨大乐趣。

前言

三

潮平两岸阔，风正一帆悬。

走进《大视野》，身临数学文化场景：既有情境，又有历史；既有方法，又有思想；既有真知，又有顿悟；既有趣味，又有哲思。蕴万壑于胸，纳百川于怀。

走进《大视野》，收获的是技巧与方法，激活的是质疑与想象，提升的是意识与美感，生成的是智慧与能力。高远而蔚蓝，广袤而深远。

愿你早日成为未来科技英才、文化精英。

黄东坡

二〇一一年四月于武汉

目录
CONTENTS

知识技能篇

目录
CONTENTS

这是奥地利 1981 年 9 月 14 日为纪念当年在奥地利因斯布鲁克召开的第十次国际数学会议而发行的邮票，它上面描绘的是一个“空间不可能体”，这形似四棱柱的几何体中充满了“不可能”，似是而非，自相矛盾．我们把这种画叫做悖论画，埃舍尔、彭罗斯创作的悖论画，其根源是“错误连接”．

广角镜

数学，正确地看它，不仅拥有真，而且拥有非凡的美，是唯有最伟大的艺术才具有的严格的完美．

——罗素

第 1 讲　二次根式的化简求值

知能概述

有条件的二次根式的化简求值问题是代数式的化简求值的重点与难点．这类问题涉及到最简根式、有理化因式等重要概念，又包容了有理式的众多知识，同时联系着整体代入、分解变形、构造关系式等重要的解题技巧与方法．

问题解决

例 1　(1) 设 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\dfrac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}=$________；

（全国初中数学联赛题）

(2) 已知 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$，那么 $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2+9x+1}}$ 的值等于______．

（河北省竞赛题）

解题思路　对于(1)，直接代入计算较繁，由条件得 $2a+1=\sqrt{5}$，两边平方，构造零值多项式；对于(2)，通过平方或分式性质，把已知条件和待求式的被开方数都用 $x+\dfrac{1}{x}$ 的代数式表示．

无穷表达式

任何一个数都可以用连分数表示．

由 $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，得

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

……

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$$

例2 已知$\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)$，其中$ab\neq0$，则$\frac{a-5b+\sqrt{ab}}{a+b+\sqrt{ab}}$的值为（　　）.

A. $\frac{5}{7}$　　B. $\frac{6}{7}$　　C. $\frac{4}{7}$　　D. 以上答案均不对

（2010年湖北省黄冈市竞赛题）

解题思路　将条件等式展开，作类似因式分解的变形，寻找a、b的关系.

例3　计算

(1) $\sqrt{1997\times1998\times1999\times2000+1}$；

（江苏省竞赛题）

(2) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$；

（全美中学生数学竞赛题）

(3) $\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$；

（新加坡数学竞赛题）

(4) $\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$.

（陕西省竞赛题）

解题思路　若一开始就把分母有理化，则使计算复杂化，观察问题中分子与分母的数字特点，通过分拆、分解、配方、一般化等方法寻找它们的联系，以此为解题突破口.

广角镜

条件多样、形式多变是解二次根式化简求值问题的困难所在，构造法是突破这一难点的最有效方法，常见的构造手段有：

(1) 构造基本对称式：$x+y$，xy，再整体代入；

(2) 构造零值多项式；

(3) 构造倒数关系：$x+\frac{1}{x}$或$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$；

(4) 构造对偶式；

(5) 构造图形等.

例 4　(1) 化简：$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$；

（北京市竞赛题）

(2) 化简：$\dfrac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$；

（江西省竞赛题）

(3) 求满足$\sqrt{\dfrac{21}{4}+3\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$的有序有理数对$(x,y)$.

解题思路　配方法（配成完全平方式或立方式）、待定系数法是化简复合根式的常用方法.

例 5　设 $x=\dfrac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}$，$y=\dfrac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}$，$t$ 为何值时，代数式 $20x^2+41xy+20y^2$ 的值为 2001?

（全国初中数学联赛题）

解题思路　整体代入 $x+y$、xy，建立关于 t 的方程.

例 6　已知实数 x、y 满足$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$，求证：$x+y=0$.

（俄罗斯数学奥林匹克试题）

证明 1　$x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$，

$\therefore\ x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$.

两边平方并整理得　$\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}=1-xy$，

两边再平方得　$x^2y^2+x^2+y^2+1=x^2y^2-2xy+1$，

即$(x+y)^2=0$，故 $x+y=0$.

证明 2　将原等式两边分别乘以有理化因式$\sqrt{x^2+1}-x$、$\sqrt{y^2+1}-y$，

得　$y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x$，　①

$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y$，　②

①+②，得 $x+y=-(x+y)$，故 $x+y=0$.

广角镜

对于一般式$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$，利用待定系数法可得

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

即设 $a\pm\sqrt{b}=(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2$，有 $x+y=a$，$xy=\dfrac{b}{4}$，解得

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

有理化是解根式问题的关键，有理化的主要途径有：

(1) 乘方：$(\sqrt{a})^2=a$；

(2) 配方：$\sqrt{a^2}=|a|$；

(3) 对一个代数式分母有理化或分子有理化；

(4) 在等式两边同乘有理化因式；

(5) 引入一个有理化因式，一起参与运算.

例 7 比$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6$大的最小整数是多少？

（西安交大少年班入学试题）

分析与解 直接展开，计算较繁，引入有理化因式辅助解题，即设$x=\sqrt{6}+\sqrt{5}$，$y=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

则$x+y=2\sqrt{6}$，$xy=1$，于是$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=22$，

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=42\sqrt{6}$，

$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=10582$，

即$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^6=10582$.

$\because 0<\sqrt{6}-\sqrt{5}<1$，$\therefore 0<(\sqrt{6}-\sqrt{5})^6<1$，

$\therefore 10581<(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6<10582$，

即比$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6$大的最小整数是 10582.

广角镜

对于一个已知数式或一个已知命题，我们构造一个与之对应的数式或对应的命题，然后一起参与运算，从而使问题变得简单，这种解题方法称为构造对偶命题法.

刻意练习

1. 已知$a=\sqrt{5}-1$，则$2a^3+7a^2-2a-12$的值等于________.

（2010 年“《数学周报》杯”全国初中数学竞赛题）

2. 已知$4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}}}=\sqrt{5}+2$，则$k=$________.

（2010 年北京市竞赛题）

3. 设$\sqrt{39-\sqrt{432}}$的整数部分为a，小数部分为b，则$\dfrac{11}{a+b}+\dfrac{11}{a+4-b}$的值为________.

（吉林省竞赛题）

4. 已知$(x+\sqrt{x^2+2002})(y+\sqrt{y^2+2002})=2002$，则$x^2-3xy-4y^2-6x-6y+58=$________.

（江苏省竞赛题）

5. 若$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}$，则$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2009)=$________.

（江西省竞赛题）

6. 若$\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$，则$x=$________.

（全国初中数学联赛题）

7. a、b为有理数，且满足等式$a+b\sqrt{3}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$，则$a+b$的值为（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

（全国初中数学联赛题）

美国教育家杰夫·科尔文在《哪来的天才：练习中的平凡与伟大》一书中指出：非凡的成就不取决于天赋，而是坚持不懈的刻意练习.

刻意练习不同于普通练习，普通练习是重复性和无意识的，而刻意练习需要打破习惯，需要更大的专注力，并在名师的指点下，使技能、方法、思想、境界迈向更高的层次.

8. 将 x 的整数部分记为 $[x]$，x 的小数部分记为 $\{x\}$，易知 $x=[x]+\{x\}(0<\{x\}<1)$. 若 $x=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$，则 $[x]$ 等于(　　).

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

（“希望杯”邀请赛试题）

9. 化简 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ 的结果是(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

（江西省竞赛题）

10. 已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$，则 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ 的值为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

（山东省竞赛题）

11. 已知实数 x,y 满足 $(x-\sqrt{x^2-2008})(y-\sqrt{y^2-2008})=2008$，则 $3x^2-2y^2+3x-3y-2007$ 的值为(　　).

A. -2008　　B. 2008　　C. -1　　D. 1

（全国初中数学联赛题）

12. 设 $p=\sqrt[3]{7a+1}+\sqrt[3]{7b+1}+\sqrt[3]{7c+1}+\sqrt[3]{7d+1}$，其中 a、b、c、d 是正实数，并且 $a+b+c+d=1$，则(　　).

A. $p>5$　　B. $p<5$　　C. $p<4$　　D. $p=5$

（2010 年“希望杯”邀请赛试题）

13. 化简下列各题.

(1) $\sqrt{3629\times3631\times3633\times3635+16}-3632\times3634$；

（2010 年湖北省黄冈市竞赛题）

(2) $\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\dfrac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$；

（天津市竞赛题）

(3) $\dfrac{8+2\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

（山东省竞赛题）

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$；

（太原市竞赛题）

(5) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

（太原市竞赛题）

14. 已知正数 m、n 满足 $m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$，求 $\dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}$ 的值.

（北京市竞赛题）

广角镜

广角镜

15. 已知 $x+1=\sqrt{5x}$，求 $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}$ 的值.

（2010 年湖北省黄冈市竞赛题）

16. 求不超过 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$ 的最大整数.

（江西省竞赛题）

17. 已知 a、b、c 为正整数，且 $\dfrac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}b+c}$ 为有理数，证明：$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ 为整数.

（2010 年江西省竞赛题）

18. 求使得 $A=\sqrt{\dfrac{9n-1}{n+7}}$ 为有理数的正整数 n 的值.

（希腊数学奥林匹克试题）

参考答案

问题解决

例 1 (1) 由条件，得 $2a+1=\sqrt{5}$，两边平方整理得 $a^2+a=1$，

原式 $=\dfrac{a^3(a^2+a)-2a^3-(a^2+a)+2}{a\cdot a^2-a}=\dfrac{a^3-2a^3-1+2}{a(1-a)-a}=\dfrac{1-a^3}{-a^2}=\dfrac{1-a^3}{1-a}$

$=-(1+a+a^2)=-2$.

(2) 由条件得 $x+\dfrac{1}{x}=2$，

原式 $=\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+3}}-\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

例 2 选 A 已知等式可化为 $a-\sqrt{ab}-12b=0$，

$(\sqrt{a}-4\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})=0$，$\therefore$ $\sqrt{a}-4\sqrt{b}=0$，$a=16b$.

例 3 (1) 设 $a=1997$，则

原式 $=\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}=\sqrt{(a^2+3a+1)^2}=a^2+3a+1$

$=1997^2+3\times1997+1=3994001$.

(2) 原式 $=\dfrac{2+2\sqrt{6}+3-5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

(3) $\because$ $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，

$\therefore$ 原式 $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{98}}-\dfrac{1}{\sqrt{99}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{99}}-\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$.

(4) 原式$=\dfrac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}=3\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

例 4　(1) 原式$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$.

(2) ∵ $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{8(2+\sqrt{5})}{8}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

∴ 原式$=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 由条件得$\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}=x+\sqrt{y}$,即$\left(\dfrac{3}{2}-x\right)+(\sqrt{3}-\sqrt{y})=0$,

∵ x,y是有理数,$\sqrt{3}$是无理数,

∴ $\dfrac{3}{2}-x=0,\sqrt{3}-\sqrt{y}=0$,解得$(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},3\right)$.

例 5　$xy=1,x+y=4t+2$. 于是 $20x^2+41xy+20y^2=20(x+y)^2+xy=20(4t+2)^2+1=2001$,

∴ $4t+2=\pm10,t=2$ 或 $t=-3$(舍去),∴ $t=2$.

参考答案

刻意练习

1. 0　$(a+1)^2=5,a^2+2a=4$

2. -1　$\sqrt{5}+2=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$,反复置换.

3. 4　$\sqrt{39-\sqrt{432}}=\sqrt{39-12\sqrt{3}}=\sqrt{(6-\sqrt{3})^2}=6-\sqrt{3},a=4,b=2-\sqrt{3}$.

4. 58　参见例 6,1 用 2002 代替,结论仍成立,$x=-y$.

5. $\dfrac{\sqrt[3]{2010}}{2}$　$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{2}$

6. $\dfrac{12}{7}$　$x>0$,由条件得$\dfrac{14x}{\sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}}=7x,\sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}=2$,从而 $2\sqrt{7x^2+9x+13}=7x+2$.

7. B　由条件得 $a+b\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$.

8. A　$x^2=2,x<0,x=-\sqrt{2}$.

9. B　$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}},\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$.

10. C　$(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2})(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2})=10$.

11. D　参见例 6 得 $x=y$,代入已知条件得 $x^2=2008$.

12. A　$0<a<1,a>a^2>a^3$,于是 $7a+1=a+3a+3a+1>a^3+3a^2+3a+1=(a+1)^3$,故 $\sqrt[3]{7a+1}>a+1$,同理 $\sqrt[3]{7b+1}>b+1,\sqrt[3]{7c+1}>c+1,\sqrt[3]{7d+1}>d+1$.

13. (1) -7269　设 $3633=n$,原式$=-2n-3$.

(2) $\frac{3}{7}$ $\quad\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

(3) 原式$=\frac{(8+2\sqrt{15})-\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

(4) 原式$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$.

(5) 原式$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}}=2$.

14. $-\frac{1}{401}$ 由条件得$(\sqrt{m}+2\sqrt{n})^2-2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})-3=0$.

15. 由条件得 $x^2-3x+1=0,x\neq0,x+\frac{1}{x}=3$. 原式$=\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{6}$.

16. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6=(8+2\sqrt{15})^3$，设 $8+2\sqrt{15}=a,8-2\sqrt{15}=b,a+b=16,ab=4,a^3+b^3=3904$，而 $0<b<1$，故 $3903<a^3<3904$，故不超过$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$的最大整数是 3903.

17. $\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}b+c}=\frac{(\sqrt{3}a+b)(\sqrt{3}b-c)}{(\sqrt{3}b+c)(\sqrt{3}b-c)}=\frac{3ab-bc+\sqrt{3}(b^2-ac)}{3b^2-c^2}$为有理数，则 $b^2-ac=0$.

故 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2-2(ab+bc+b^2)$

$=(a+b+c)^2-2b(a+c+b)=(a+b+c)(a-b+c)$

因此，$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=a-b+c$ 为整数.

18. 设$\frac{9n-1}{n+7}=\frac{a^2}{b^2}$($a$、$b$ 为正整数，且 a、b 互质)，得 $n=-7+\frac{64b^2}{9b^2-a^2}$，

由$(a,b)=1$，得$(a^2,b^2)=1,(9b^2-a^2,b^2)=1$，从而$(9b^2-a^2)\mid 64$.

∵ $9b^2-a^2=(3b+a)(3b-a),9b^2-a^2\geqslant0$，∴ $9b^2-a^2=8,16,32,64$.

∵ $3b+a$、$3b-a$ 其和是 6 的倍数，其差为 2 的倍数，

∴ $(3b+a,3b-a)=(4,2)$或$(8,4)$或$(16,2)$，$(a,b)=(1,1)$或$(2,2)$或$(7,3)$.

经检验$(a,b)=(1,1)$或$(7,3)$，故 $n=1$ 或 11.

阿贝尔(1802—1829),挪威数学家.16世纪,意大利数学家发展了求解三次方程和四次方程的解法,人们把目光落在五次或更高次方程的求根公式上,然而近三百年的探索一无所获,阿贝尔证明了五次或更高次方程的一般解法不存在,解决了这个世纪难题.

第2讲　一元二次方程

知能概述

配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法,分类讨论是解含参数或绝对值的一元二次方程的关键.

解有些与一元二次方程相关的问题时,直接求解常给解题带来诸多不便,若能运用变形降次、整体代入等思想方法,则能使问题获得简解.

问题解决

例1　设 a、b 是整数,方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个解是 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$,则 $a+b$ 的值是________.

(四川省竞赛题)

解题思路　$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$,回到定义中去,把 $\sqrt{3}-1$ 代入原方程,建立 a、b 的关系式.

例2　用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,则方程 $x^2-2[x]-3=0$ 的解的个数为(　　).

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

(全国初中数学联赛题)

解题思路　由 $[x]\leqslant x$ 得 $x^2-2x-3\leqslant 0$,确定 x 的取值范围.

广角镜

数学家的造型与画家或诗人的造型一样,必须美,不美的数学在世界上是找不到永久地位的.

——哈代

三次方程的求根公式

求三次方程解的路程是漫长而曲折的.1545年,意大利数学家卡丹的《大法》一书在德国纽伦堡出版,书中刊载了意大利数学家塔塔利亚的三次方程 $x^3+px+q=0$ 的解的公式:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

例3 设方程 $x^2-|2x-1|-4=0$，求满足该方程的所有根之和.

（重庆市竞赛题）

解题思路 通过讨论，脱去绝对值符号，把绝对值方程转化为一般的一元二次方程求解.

例4 已知方程 $x^2-mx+m+5=0$ 有二实根 α、β，方程 $x^2-(8m+1)x+15m+7=0$ 有二实根 α、γ，求 $\alpha^2\beta\gamma$ 的值.

（北京市竞赛题）

解题思路 α 是两方程的公共根，因两方程的根的表示式复杂，故从消去二次项入手.

例5 设方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根是 x_1，x_2，求 $4x_1^5+10x_2^3$ 的值.

（2010年湖北省黄冈市竞赛题）

解题思路 求出 x_1、x_2 的值再代入计算，显然较繁. 解题的关键是利用根的定义，变形降次，如 $x_1^2+x_1=1$，$x_1^2-1=-x_1$，$x_1^2=1-x_1$，$x_1^5=(x_1^2)^2\cdot x_1$ 等.

广角镜

解含字母系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，在未指明方程类型时，应分 $a=0$ 及 $a\neq0$ 两种情况讨论；解绝对值方程需脱去绝对值符号，并用到绝对值一些性质，如 $|x|^2=|x^2|=x^2$.

公共根问题是一元二次方程常见问题，解这类问题的基本方法是：

(1) 若方程便于求出简单形式的根，利用公共根相等求解；

(2) 设出公共根，设而不求，消去二次项.