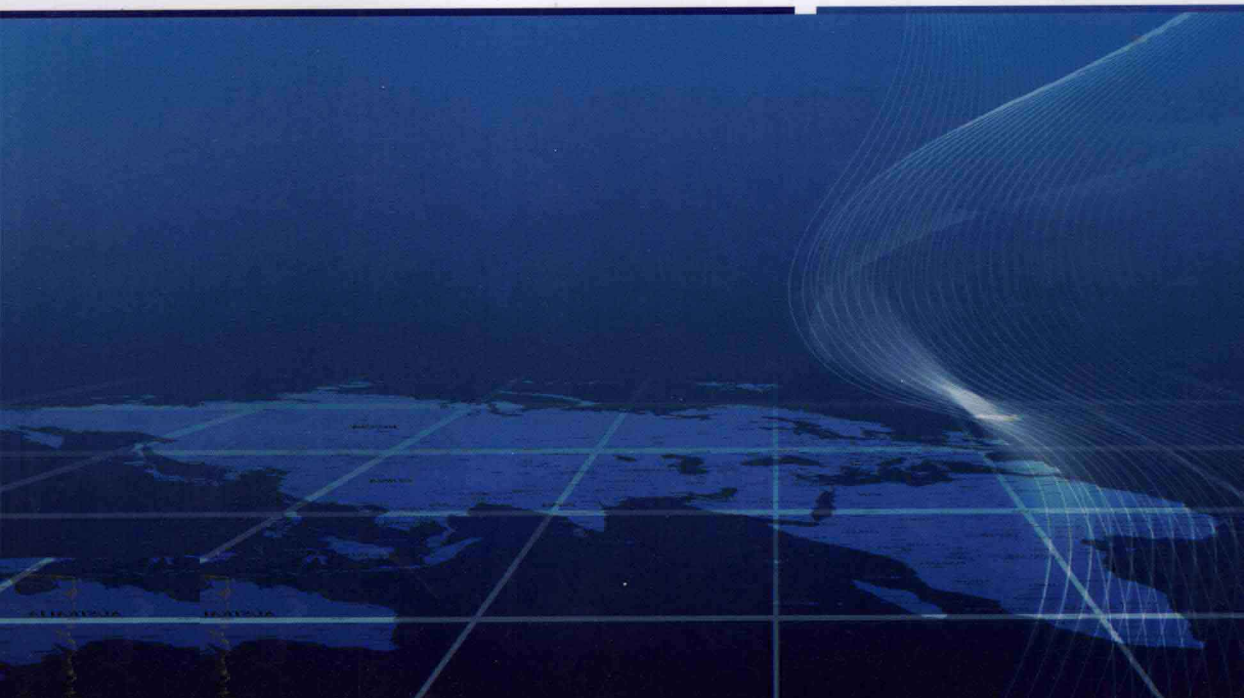
概率论与数理统计基础

曹振华　主编



科学出版社

概率论与数理统计基础

主　编　曹振华
副主编　梁　艳

科学出版社
北　京

内 容 简 介

全书共分 9 章，第 1 章为预备知识，包括排列与组合以及概率统计基础中用到的一些微积分的基本结论. 第 2～6 章为概率论部分，包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机向量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理. 第 7～9 章是数理统计基础，包括抽样分布、参数估计、假设检验.

本书可作为高等院校工学类、经济类、管理类二本层次概率论与数理统计教材，也可作为报考工学类、经济类、管理类研究生的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计基础/曹振华主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031590-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 115069 号

责任编辑：相 凌 唐保军 / 责任校对：张凤琴
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
http //www sciencep com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—5 000 字数：370 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

概率论产生于17世纪中叶，它是研究随机现象规律性的数学模型.在概率论的基础上发展出了数理统计学，它的主要任务是研究如何用有效的方法去收集和使用受随机影响的试验数据.

概率论与数理统计是一门应用极其广泛的数学分支.可以毫不夸张地讲，概率统计的理论和方法已经渗透到自然科学、工程技术、军事科学、社会科学等科学技术的各个领域，工农业生产和国民经济的各个部门.例如，在自然科学中，概率论与其他学科相结合发展成不少边缘学科(生物统计、统计物理等)；又如，概率统计在通信与信息、控制、人工智能等工程技术、军事科学的整个理论体系中也是一块非常重要的理论基石.可以说，卫星上天、导弹巡航、飞机制造、宇宙飞船遨游太空都有概率统计知识的一份功劳.再如，影视文化收视率的抽样调查就是统计方法在社会科学领域中的一项重要应用.产品质量的抽样检验、全面质量管理中统计质量控制、生产设备的可靠性分析等都是概率统计方法在工业生产中的应用.农业生产中所用种子的品种、肥料类型、施放数量、耕作方法等因素对农作物产量的影响也离不开概率统计的分析方法.经济领域中，时间序列的统计分析方法早就应用于市场预测.概率统计方法在天气预报、地震预报、地质探矿、海洋探险、考古研究等方面也有广泛的应用.

随着科学技术的迅速发展，概率统计的理论和方法将发挥越来越大的作用.当今，高等院校几乎所有专业都在开设概率统计这门课程，教育部于1997年把概率论与数理统计正式列入工学类、经济类、管理类研究生入学考试的必考科目，所以概率统计已成为高等院校开设的一门重要的基础课.作者长期在东南大学从事工学类、经济类、管理类大学本科专业概率论与数理统计的教学工作.近几年又在东南大学成贤学院从事这门课的教学.通过近几年的教学实践，深感迫切需要一本适合工学类、经济类、管理类本二层次的概率统计基础教材.为此，本着“服务本二层次专业，打好基础”的原则，兼顾考研的需要，在保证工学类、经济类、管理类研究生入学考试最基本要求的前提下，编写了这本书.全书共分9章，第1章为预备知识，包括排列与组合以及概率统计基础中用的一些微积分的基本结论.第2～第6章为概率论部分，包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机向量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理.第7～第9章是数理统计基础，包括抽样分布、参数估计、假设检验.本书主要有如下特色：

(1) 注意中学数学与本二层次高等数学的衔接，在传统的教材基础上首先增加了“概率统计”中涉及的初等数学和高等数学的内容作为预备知识.

(2) 在保证初等概率统计最基本系统前提下，适当简化处理教材内容，删除不必要的证明，做到难易适当，深入浅出.

(3) 全书在介绍一些基本结论时，自始至终注意引导读者进行深入思考，启发读者对一些基本结论加以推广、扩充、举一反三，从而发掘一些新的结论，使读者学得更加深入、扎实，同时也培养读者的创新意识.

(4) 为促进读者对基本概念、重点知识的复习；加深、巩固、强化对基本概念的理解及对基本方法的掌握；也为了便于组织教学，每一小节针对教学内容，精选配备一些习题(一般教材每章配备习题). 每一章配备一定数量的选择题，有些选择题，完全是作者在教学中针对读者对有关基本概念或结论容易出错或混淆不清而自主构思的，有一定的原创性.

(5) 注意培养读者利用概率统计基本性质解决问题的意识. 初学概率统计的读者往往缺乏利用基本性质解决问题的意识，本书在这方面有所加强，对一些重要性质的应用作了深入的介绍. 通过一些例题，从简单到复杂，从特殊到一般，逐步扩散，循序渐进，不断深入来增强读者应用基本性质的意识.

(6) 对一些重要的概率统计基本方法作了专题性的介绍. 概率统计中有些问题是困扰读者的难题. 例如，已知随机变量 X 的分布，如何求 $Y=g(X)$ 的分布？已知随机向量 (X,Y) 的分布，如何求 $Z=g(X,Y)$ 的分布？如何利用中心极限近似地求概率？如何求总体分布中未知参数的最大似然估计等. 本书对解决这些问题所遵循的基本套路、基本要领都作了详细的阐述，使读者能够熟练地掌握这些基本方法.

本书是东南大学成贤学院“十二五”规划教材，肖晓燕老师承担了第 1～3 章的编写工作，南京航空航天大学金城学院的梁艳老师承担了第 4～6 章的编写工作，曹振华老师编写了其余部分并对全书进行统稿. 在本书的写作过程中，自始至终得到东南大学成贤学院领导，特别是副院长董梅芳教授的关心和支持，在此表示衷心的感谢！
由于作者水平有限，书中难免有不当之处，恳请专家和读者批评指正.

编　者

2011 年 2 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

1.1　排列与组合

1.1.1　乘法原理

设完成一件事有 k 个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，……，第 k 步有 n_k 种方法，且完成这件事必须经过每一步，则完成这件事共有

$$n = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k \tag{1.1.1}$$

种方法.

例 1.1.1　从底楼到二楼有 2 个楼梯可以走，而从二楼到三楼有 3 个楼梯可以走，那么某人从底楼要到三楼共有多少种走法?

解　在这个问题中，因为从底楼到三楼必须分以下两步完成：先从底楼到二楼，有 2 种走法，再从二楼到三楼有 3 种走法，每一种从底楼到二楼的走法与每一种二楼到三楼的走法相配合就得到底楼到三楼的一种走法. 所以根据乘法原理，此人从底楼到三楼共有

$$n = 2 \times 3 = 6$$

种走法.

例 1.1.2　某电视台新闻播音员张先生有 4 条领带、4 件衬衣、3 套西装、3 双皮鞋，每次播音必须正装出席，则张先生可以有多少种搭配穿法展示在电视观众面前?

解　播音员出现在电视镜头前必须西装革履具有良好的形象，假如张先生的 4 条领带、4 件衬衣、3 套西装、3 双皮鞋都可以互相搭配，那么按照乘法原理，张先生可以有

$$n = 4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144$$

种搭配穿法展示在电视观众面前.

1.1.2　加法原理

设完成一件事有 k 类方法，若第一类方法有 n_1 种，第二类方法有 n_2 种，……，第 k 类方法有 n_k 种，并且这 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法里，任何两种方法都不相同. 只要选择任何一类方法的一种方法，这件事就可以完成，那么完成这件事就有

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \tag{1.1.2}$$

种方法.

例 1.1.3(续例 1.1.1)　若在这个问题中，在底楼和三楼之间还有 2 部电梯，可

以直接从底楼乘电梯到三楼，则某人从底楼到三楼共有多少种走法？

解　此时某人从底楼到三楼有两类走法，第一类是走楼梯，由例 1.1.1 知有$n_1=2\times3=6$ 种走法，第二类方法是直接从底楼乘电梯到三楼有 $n_2=2$ 种走法，由于电梯是直接从底楼到三楼，在二楼不停，所以从底楼到三楼要么走楼梯，要么乘电梯，故由加法原理，此人从底楼到三楼共有

$$n=n_1+n_2=6+2=8$$

种走法.

1.1.3　排列

1. 选排列与全排列

从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中不放回抽取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$，按照一定顺序排成一列 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$，称为从 n 个元素中选 k 个元素的**选排列**. 特别地，当 $k=n$ 时，称 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n})$ 为**全排列**.

从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中不放回抽取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素构成不同的排列组成的集合为

$$\Omega=\{(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})\mid(i_1,i_2,\cdots,i_k)\subset(1,2,\cdots,n),i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k\}. \tag{1.1.3}$$

由于排在第 1 个位置上的元素 a_{i_1} 可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个，有 n 种选法，因为是不放回选取，放在第 2 个位置上的元素 a_{i_2} 只能在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中除去 a_{i_1} 以外的 $n-1$ 个元素中选取，故 a_{i_2} 有 $n-1$ 种选法，…，放在第 k 个位置上的元素 a_{i_k} 只能在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中除去 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{k-1}}$ 以外的 $n-k+1$ 个元素中选取，故 a_{i_k} 有 $n-k+1$ 种选法. 按照乘法原理，从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中不放回抽取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素可以构成

$$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.1.4}$$

种不同的选排列. 特别地，n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可以构成

$$\mathrm{A}_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1=\frac{n!}{0!}=n! \tag{1.1.5}$$

种不同的全排列（规定 $0!=1$）.

例 1.1.4　有 10 本不同的书，5 个人去借，每人借 1 本，问有多少种不同的借法？

解　按照借书先后次序将 5 个借书人借的书排成一列，则一种排列就相当于一种借法，所以所有不同的借法相当于从 10 本不同的书（10 个不同的元素）选 5 本书（5 个元素）构成的不同的选排列的种数，故有

$$\mathrm{A}_{10}^5=\frac{10!}{5!}=30240$$

种借法.

例 1.1.5　从全班 30 个人中依次选出担任班长、学习委员、文体委员的人选，共

有多少种不同的选法?

解 由于先选班长,第2个选学习委员,最后选文体委员,若把选出的3个人按先后次序排成一列,3个人构成的一个排列相当于一种选法,所以不同的选法相当于从30个人中选3个人构成的不同的选排列种数,故有

$$\mathrm{A}_{30}^{3}=\frac{30!}{27!}=24360$$

种选法.

2. 有重复的排列

从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有放回抽取 $k(k\geqslant 1)$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$,按照一定顺序排成一列 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$,称为从 n 个元素中选 k 个元素的**有重复排列**.

从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有放回抽取 $k(k\geqslant 1)$ 个元素构成不同的有重复排列组成的集合为

$$\Omega=\{(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})\mid i_l\in(1,2,\cdots,n),l=1,2,\cdots,k\}. \tag{1.1.6}$$

由于排在第1个位置上的元素 a_{i_1} 可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个,有 n 种选法,排在第2个位置上的元素 a_{i_2} 也可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个,故也有 n 种选法……,同样,排在第 k 个位置上的元素 a_{i_k} 也可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个,也有 n 种选法.按照乘法原理,从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有放回抽取 $k(k\geqslant 1)$ 个元素可以构成

$$\mathrm{U}_n^k=n\times n\times\cdots\times n=n^k \tag{1.1.7}$$

种不同的有重复排列.

例1.1.6 手机号码为11位数,问以139开头可以组成多少个不同的手机号码?

解 因为前3位已经固定为139,只要后8位数字中有一个位置上的数字不同就构成不同的手机号码,从第4位到第11位每一位都可以是0,1,2,…,9这10个数字中的任意一个,所以,以139开头的手机号码第4位到第11位可以看作从0,1,2,…,9这10个数字中有放回抽取的8个数字构成的有重复排列,故以139开头的手机号码共有 $\mathrm{U}_{10}^8=10^8$ 个.

例1.1.7 盒子中装有编号分别为 $1,2,\cdots,N$ 的 N 个球,从中有放回抽取 n 个球,则所取出的 n 个球中最大号码刚好是 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 的取法有多少种?

解 取出的 n 个球中最大号码不超过 k 的取法种数就相当于从编号分别为 $1,2,\cdots,k$ 的 k 个球中有放回抽取的 n 个球的号码组成的有重复排列的种数,有 k^n 种取法.同样,取出的 n 个球中最大号码不超过 $k-1$ 的取法种数相当于从编号分别为 $1,2,\cdots,k-1$ 的 $k-1$ 个球中有放回抽取的 n 个球的号码组成的有重复排列的种数,有 $(k-1)^n$ 种.所以取出的 n 个球中最大号码刚好是 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 的取法有 $k^n-(k-1)^n$ 种.

1.1.4 组合

1. 组合的定义

从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中不放回抽取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$，而不考虑其顺序组成一组 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$，称为从 n 个元素中选 k 个元素的**组合**. 从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意抽取 k 个元素可以组成不同组合的总数记为 C_n^k.

组合与排列的区别在于，组合中各元素没有先后次序(位置)之分，只要取出的 k 个元素相同算作同一个组合，而排列中各元素与先后次序(位置)有关.

可以把选排列分解成下面两个步骤来完成：

第一步，从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意抽取 k 个元素组成一组(这是一个组合)；

第二步，将这一组 k 个元素进行排列(这是一个全排列)，从而有

$$A_n^k = C_n^k k!. \tag{1.1.8}$$

由此得到组合计算公式，对 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \tag{1.1.9}$$

且规定 $C_n^0=1$. 若 $k>n$，规定 $C_n^k=0$.

例 1.1.8 有 5 本不同的书，10 个人去借，每人借 1 本，每次把书借完，问有多少种不同的借法?

解 因为只有 5 本书，10 个人去借，每人借 1 本，所以 10 个人中只有 5 个人能借到书，从 10 个人里选 5 个借书的人有 $n_1=C_{10}^5$ 选法；5 个人去借 5 本不同书有 $n_2=5!$ 种不同的借法，把书借完要经过这两个步骤. 按照乘法原理，5 本书，10 个人去借，每人借 1 本共有

$$n = n_1\times n_2 = C_{10}^5 5! = A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$$

种借法.

例 1.1.9 某高校电教中心有 9 名工作人员，其中 4 名技术熟练，每天值班需要 5 人，而且至少有 2 名技术熟练的人员当班，问共有多少种值班人员的搭配方式?

解 这个问题可以分为以下 3 步处理：

(1) 从 9 名工作人员中选 5 名，其中刚好有 2 名技术熟练的人员有 $C_4^2C_5^3$ 种选法；

(2) 从 9 名工作人员中选 5 名，其中刚好有 3 名技术熟练的人员有 $C_4^3C_5^2$ 种选法；

(3) 从 9 名工作人员中选 5 名，其中刚好有 4 名技术熟练的人员有 $C_4^4C_5^1$ 种选法.

故依题意，值班人员的搭配方式共有 $C_4^2C_5^3+C_4^3C_5^2+C_4^4C_5^1=105$ 种.

2. 关于组合数的一些常用等式

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1.1.10}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \tag{1.1.11}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{1.1.12}$$

式(1.1.12)称为**二项展开式**,$C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$称为**二项系数**.

由式(1.1.12)很容易得到

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \tag{1.1.13}$$

习 题 1.1

1. 从 PROBABILITY 这 11 个字母中不放回抽取 7 个,有多少种取法? 取出的 7 个字母能排成单词 ABILITY 有多少种取法?

2. 一条铁路线上有 10 个车站,问需要准备多少种车票? 若不同两站之间的票价不同,那么有多少种不同的票价?

3. 一套书有 5 卷,任意地放到书架上,共有多少种放法? 若第三卷刚好放在中间,有多少种放法?

4. 从 1～9 这 9 个数中有放回抽取 n 个数,n 个数的乘积不能被 10 整除的取法有多少种?

5. 把 3 封不同的信投入编号为 1,2,3,4 的 4 个信箱中,有多少种不同的投法? 信箱中最多投进 2 封信的投法有多少种?

6. 从 1～9 这 9 个数中有放回抽取 6 个数组成 6 位数,但要求其中必须包含 4 个数字是奇数,2 个数字是偶数,问能组成多少个这样的 6 位数?

7. 从 1～6 这 6 个数中有放回抽取 2 个数,则 2 个数之和为 7 的取法有多少种?

8. 在 1500 个产品中有 400 个次品,1100 个正品,从中不放回抽取 200 个产品,最多取到 1 个次品有多少种取法?

9. 房间里有 10 个人,分别佩戴 1～10 号的纪念章,从中任选 3 人,最小号码为 5 的选法有多少种?

10. 一俱乐部有 5 名一年级的学生,2 名二年级的学生,3 名三年级的学生,2 名四年级的学生.

(1) 在其中任选 4 名学生,问一、二、三、四年级的学生各一名的选法有多少种?

(2) 在其中任选 5 名学生,问一、二、三、四年级的学生均包含在内的选法有多少种?

1.2 微积分的一些基本结论

本节将叙述初等概率统计中涉及的一些微积分的基本结果. 下面出现这些结果的次序不一定是传统的高等数学教科书中的这些内容的次序.

1.2.1 幂级数

形式为

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1.2.1}$$

的级数称为**幂级数**.

定理 1.1　如果一个幂级数(1.2.1)对于 $x=x_0\neq 0$ 收敛,则它对于区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上的 x 绝对收敛.

定理 1.2　设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

是一个**幂级数**,它对于 $x=x_0\neq 0$ 收敛,则在任何区间$[-c,c]$$(0<c<|x_0|)$上,这个幂级数可以逐项求任意阶导数,也可以逐项积分任意次.逐项求导和逐项积分后所得的幂级数在区间$[-c,c]$上仍然绝对收敛.另外,在区间$[-c,c]$上,这个幂级数的第 k 阶导数和第 j 次积分分别等于 $f(x)$ 的第 k 阶导数和第 j 次积分.

定理 1.3　若函数 $f(x)$ 具有非零收敛半径的幂级数展开式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

则此展开式是唯一的,而且

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.2.2}$$

其中 $f^{(0)}(0)=f(0)$,即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{1.2.3}$$

式(1.2.3)有时称为**麦克劳林表示式**.

下面给出初等概率论中几个重要函数的幂级数展开式.

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty, \tag{1.2.4}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\\&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots,\quad |x|<1,\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

其中 α 是一个任意实数,式(1.2.5)称为二项级数.特别当 $\alpha=-1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{k-1}x^k+\cdots,\quad |x|<1, \tag{1.2.6}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots,\quad |x|<1. \tag{1.2.7}$$

式(1.2.7)就是公比为 $x(|x|<1)$ 的等比级数.

例 1.2.1　求幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}$ 的和,其中 $\lambda>0$ 是实数.

解　由式(1.2.4)有

$$1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^k}{k!}+\cdots=e^\lambda,$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^k}{k!}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^k}{k!}+\cdots\right)-1\right]\\&=\frac{1}{\lambda}(e^\lambda-1).\end{aligned}$$

例 1.2.2 设 $0<q<1$ 是实数,求级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}$ 的和.

解 由定理 1.2 知,幂级数在收敛区间内可以逐项求导,对式(1.2.7)两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+kx^{k-1}+\cdots,\quad |x|<1. \tag{1.2.8}$$

式(1.2.8)两边同时乘以 $x(|x|<1)$后,分别对 x 求导数得

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+k^2x^{k-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1},\quad |x|<1. \tag{1.2.9}$$

式(1.2.9)对所有的 $x\in(-1,1)$都成立,自然对 $q\in(0,1)$也成立,故对 $0<q<1$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

例 1.2.3 设 $0<p<1$ 是实数,求级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{k}$ 的和.

解 由定理 1.2 知,幂级数在收敛区间内可以逐项积分,所以,对 $0<p<1$,式(1.2.7)右端逐项积分就等于左端的积分,故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^p x^{k-1}dx=\int_0^p\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right)dx=\int_0^p\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-p).$$

例 1.2.4 设 $0<p<1$ 是实数,$q=1-p$,$r\geqslant1$ 是正数,记

$$a_k=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r},\quad b_k=k,\quad k=r,r+1,r+2,\cdots,$$

求级数 $\sum\limits_{k=r}^{\infty}a_kb_k$ 的和.

解
$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{\infty}a_kb_k&=\sum_{k=r}^{\infty}kC_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}=rp^r\sum_{k=r}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(r+1)}{(k-r)!}q^{k-r}\quad(\text{令 }k-r=l)\\&=rp^r\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(r+l)(r+l-1)\cdots(r+1)}{l!}q^l.\end{aligned}\tag{1.2.10}$$

令 $r+1=-\alpha$,则

$$r+l-1=-(\alpha-l+2),r+l=-(\alpha-l+1),$$

由式(1.2.5)有

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(r+l)(r+l-1)\cdots(r+1)}{l!}q^l\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{l!}(-q)^l\\&=(1-q)^{\alpha}=(1-q)^{-r-1}.\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

将式(1.2.11)代入到式(1.2.10),并注意到$q=1-p$,得

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=rp^r(1-q)^{-r-1}=\frac{r}{p}.$$

1.2.2 广义积分

无穷区间上的积分通常称为**无穷广义积分**,具有无界的被积函数的积分称为**瑕积分**. 如果函数$f(x)$在$[a,\infty)$的每个有限的闭子区间上是可积的,并且$\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在,便说**无穷广义积分$\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$是收敛的**. 类似地,如果函数$f(x)$在$(-\infty,b]$的每个有限的闭子区间上是可积的,并且$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在,便说**无穷广义积分$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$是收敛的**. 如果$\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$两个都收敛,则可用$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$来表示$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 应该注意,$\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a}f(x)\mathrm{d}x$可以存在,但$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$可以不收敛. 如果$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a}f(x)\mathrm{d}x.$$

设$f(x)$是区间$(a,b]$上的函数,并且对于$a<u<b$,$f(x)$在$[u,b]$上可积,若$\lim\limits_{u\to a}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$存在,则称**瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是收敛的**,并且定义它的值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to a}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$$

类似地,设$f(x)$是区间$[a,b)$上的函数,并且对于$a<u<b$,$f(x)$在$[a,u]$上可积,若$\lim\limits_{u\to b}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$存在,则称**瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是收敛的**,并且定义它的值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to b}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

下面给出初等概率论中几个常用的广义积分以及由含参量无穷广义积分,瑕积分所定义的函数,其有关的结论的证明可参考文献[1].

1. 概率积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.\tag{1.2.12}$$

2. Γ 函数(Gamma)

Γ 函数是一个含参量广义积分，瑕积分所定义的函数，也称为**欧拉第二型积分**，其定义如下：

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0. \tag{1.2.13}$$

Γ 函数有如下性质：

(1) $\Gamma(\alpha)$是半轴 $\alpha>0$ 上的连续函数；

(2) 当 $\alpha>0$ 时有 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$；

(3) 对于自然数 n，$\Gamma(n+1)=n!$；

(4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

3. 贝塔(Beta)函数

Beta 函数是一个含两个参量的瑕积分所定义的函数，其定义如下：

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\quad p>0,q>0. \tag{1.2.14}$$

Beta 函数也称为**第一型欧拉积分**，其具有如下性质：

(1) $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$；

(2) 对 $p>0,q>0$，有 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma q)}{\Gamma(p+q)}$.

例 1.2.5 计算二重广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 首先作变量代换

$$\begin{cases}u=x\\ v=y-x\end{cases},$$

其逆变换及变换的雅可比行列式为

$$\begin{cases}x=u\\ y=u+v\end{cases},\quad J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1.$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2u^2+2u(u+v)-(u+v)^2}\mid J\mid\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

根据化二重积分为累次积分的公式及式(1.2.12)的结果有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v=\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}=\pi.$$