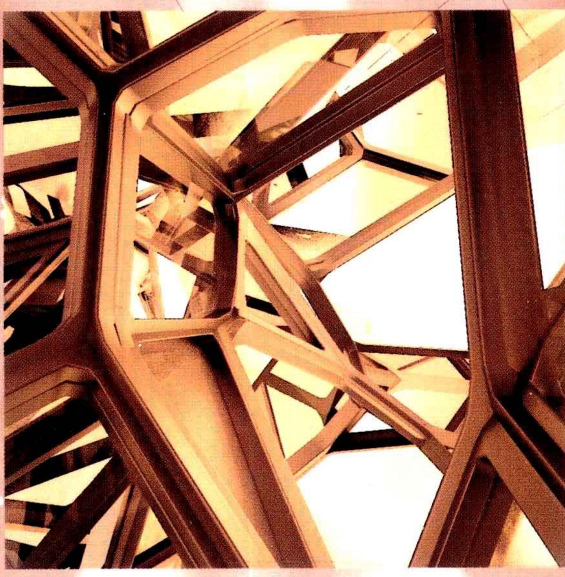
高等学校教材

离散数学

Discrete Mathematics

段禅伦 斯勤夫 宋世军 冯 源 杜清晏 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书依据教育部高等学校计算机科学与技术教学指导委员会编制的《高等学校计算机科学与技术专业规范》和《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》编写而成。本书不仅覆盖逻辑演算、集合与关系、数论、组合计数、代数结构、图论等基础理论部分，还包括这些基础理论在粗糙集、模糊集、人工智能、纠错码、加密技术等领域的应用，并涉及数理逻辑形式系统等相关内容。本书体系严谨、选材精练、讲述翔实、语言通俗，注重与计算机科学与技术的实际问题相结合，强调应用能力与计算思维的培养。

本书不仅可作为高等学校计算机及相关专业本科生的离散数学课程教材，也可供相关工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/段禅伦等编著.—北京：高等教育出版社，2011.6

ISBN 978-7-04-031901-9

Ⅰ.①离… Ⅱ.①段… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 084086 号

策划编辑	刘　艳	责任编辑	张海波	封面设计	王凌波	版式设计	王艳红
插图绘制	郝　林	责任校对	陈旭颖	责任印制	张泽业		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.25	版　　次	2011年6月第1版
字　　数	490 000	印　　次	2011年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	32.00元

物 料 号　31901-00

前　言

离散数学成为计算机类专业的核心课程，是计算机科学与技术飞速发展的必然结果。学习本课程的主要目标是培养抽象思维和严格的逻辑推理能力，为处理离散信息、从事计算机软件开发和设计以及计算机其他实际应用奠定数学基础。

本书的主要内容包括逻辑演算、集合与关系、代数结构、图论等知识，对初等数论、组合计数的基础知识以及模糊子集、粗糙集和超图的基本概念也做了相应介绍。几十年来，我国高校一般把离散数学划分为几门课程或把几个课程糅合成一门课程向本科二、三年级的学生开设。由于计算机科学与技术领域在很大程度上依赖于离散数学提供的数学理论工具，但其内容的繁杂增加了课程教学的难度。为计算机专业编写离散数学教材，以简明的方法叙述它的主要内容，并以计算机专业教学为度，不讨论过于艰深的研究课题，应当说这是课程教学的需要。本书可作为计算机专业本科生离散数学课程的教材或教学参考书，也可作为计算机工作者拓广理论基础而自学的读本。

全书共七章，统稿工作由段禅伦完成,参编的还有斯勤夫、宋世军、冯源、杜清晏。在内容编排上，供教学选用的例子以练习的形式置于所在章各节之后并附有参考答案。配套的习题另编于各章之后，作为作业使用。这样做的目的旨在满足各个层次的不同需要。

欢迎各位读者提出对此书的看法与意见，更希望读者指出书中的纰漏与谬误，以携作者日后改进，甚谢！

作　者

2010 年 6 月于内蒙古大学桃李湖畔

目　录

第一章 命题逻辑

本章介绍命题逻辑 (也称命题演算) 的基本概念, 以及等值演算和推理理论。

那么, 什么是命题? 命题与命题公式如何表示和构成? 命题逻辑怎样研究问题? 下面我们先从一个例子谈起。

例 1 爱因斯坦的帽子故事。

一个土耳其商人, 想找一个十分聪明的助手协助他经商。有两个人来应聘。商人为测试他们哪个更聪明, 带他们来到一间漆黑的屋子里。商人打开灯说, 桌子上有五顶帽子, 其颜色是两顶红色、三顶黑色。现在我将灯关闭并把帽子摆放的位子弄乱, 然后我们三个人每人摸一顶戴到自己头上。在我开灯后, 请你们尽快猜出自己头上所戴的帽子是什么颜色。

说完后, 商人把灯关掉。在三个人各戴了一顶帽子之后, 商人将余下的两顶帽子藏了起来, 接着将灯打开。

两个应聘者看到商人头上戴的是一顶红色帽子, 过了一会儿, 其中一个人说道, 我戴的是黑色帽子。于是商人认为该人比较聪明, 他得聘。

这个聪明人是怎么猜测或推算 (推理) 的呢?

下面, 就是应聘成功者 (他或许学习过命题逻辑) 的推算过程和推理结果。

令:

P_1 表示“猜对的人戴红色帽子”, P_2 表示“猜对的人戴黑色帽子”;

Q_1 表示“另一个人戴红色帽子”, Q_2 表示“另一个人戴黑色帽子”;

R 表示“商人戴红色帽子” (语句符号表意化)。

现在知道, 商人头上戴的是红色帽子, 即 R 为真。又知道另一个人没有作出判断, 也就是说既不能断定 Q_1 为真, 也不能断定 Q_2 为真 (为表意符号取值)。

在以上设定下, 根据故事, 可得如下判断公式 (形成命题公式):

$R \wedge P_1 \to Q_2$ 表示如果商人和猜对的人都戴红色帽子, 那么另一个人戴的就是黑色帽子 (因为只有两顶红色帽子)。

$R \wedge Q_1 \to P_2$ 表示如果商人和另一个人都戴红色帽子, 那么猜对的人戴的就是黑色帽子。

$\neg P_1 \to P_2$ 表示如果猜对的人戴的不是红色帽子, 那么他戴的就是黑色帽子。

$\neg Q_1 \to Q_2$ 表示如果另一个人戴的不是红色帽子, 那么他戴的就是黑色帽子。

于是, 可以形成如下推理过程:

设有 P_1 (猜对的人戴红色帽子), 则

(1) P_1 (推理假设)

(2) R (根据题设)

(3) $R \wedge P_1$ (构成合取式)

(4) $R \wedge P_1 \to Q_2$ (根据题设)

(5) Q_2 (由 (3) 与 (4) 作假言推理)

这就是说, "另一个人戴黑色帽子"这个结论是必然可以得出的。这与题设条件另一个人没有作出判断相矛盾, 因此 P_1 为假即 $\neg P_1$ 为真。故可得下述推理:

设有 $\neg P_1$ (猜对的人戴的不是红色帽子), 则

(1) $\neg P_1$

(2) $\neg P_1 \to P_2$ (根据分析形成的命题公式)

(3) P_2 (由 (1) 与 (2) 作假言推理)

P_2 即猜对的人戴的是黑色帽子, 故该人得聘。 □

从爱因斯坦帽子问题可以对命题逻辑作以下粗略理解:

1. 例中 P_1, P_2, Q_1, Q_2 和 R 称为命题符号 (命题标识符), 它们表示或真或假的 (陈述) 语句。
2. $\neg, \wedge, \to$ 等符号称为逻辑联结词 (简称逻辑联词), 用以生成复合命题。
3. $R \wedge P_1 \to Q_2$, $R \wedge Q_1 \to P_2$ 等由命题符号与逻辑联词所生成, 称为命题公式。
4. 建立在命题公式上的推理或演算称为逻辑推理。
5. "命题"仅被视为抽象的形式概念。
6. 命题值取真或取假, 由是否符合客观实际而确定。
7. 字母 P、Q 等 (也可以小写) 表示各个不同命题, 可抽象 (命题变元) 也可具体 (命题常元)。
8. 逻辑推理就是由一个或几个判断, 推出一个 (新) 判断的思维形式 (过程)。

§1.1 命题及其表示

数理逻辑是研究演绎方法的科学, 它从形式结构方面来研究推理和证明。命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑的基础, 使用精确而完全形式的语言来处理问题。命题逻辑主要从形式上研究怎么从已有命题产生新命题的方法。这些方法在英国数学家布尔[①]的著作 The Laws of Thought 中最早探讨过。

自然语言丰富多彩, 对于同一词语, 往往有不同的含义和理解, 或者说, 自然语言相比现代电子计算机符号语言不够精确、有歧义, 会产生含糊、混淆。这正是逻辑演绎所不允许的。逻辑演绎不能有丝毫的含糊不清, 要求一词一语均一义。为克服自然语言的歧义性, 数理逻辑引入了为自身所用的对象语言。

对象语言是一种特定的形式语言, 在命题逻辑中, 其基本成分是具有真、假值之一的陈述句。

① 布尔 (George Boole,1815 年 11 月 2 日— 1864 年 12 月 8 日), 英国数学家和哲学家, 他是 19 世纪最重要的数学家之一。1848 年, 他出版了 The Mathematical Analysis of Logic, 这是他对于符号逻辑领域诸多贡献中的第一次。 1854 年, 他的著作 The Laws of Thought 出版, 这是他最著名的著作, 书中介绍了现代数学中和计算机科学理论中具有广泛应用价值的、以他名字命名的布尔代数。他曾经撰写微分方程和差分方程课本, 在英国一直使用到 19 世纪末。 1864 年, 他因肺炎病重而去世。

具有确定真值的陈述句是命题。一切没有判断内容的句子都不能作为命题,无所谓是非的句子都不能作为命题。在一定的环境中可以确定真值的陈述句,在必要的上下行文中可以确定真值的陈述句也可以认为是命题。

命题分原子命题、复合命题两种类型。前者是简单陈述句,后者至少是对原子命题的否定或由几个原子命题组成的复合命题。

命题逻辑的特征在于,研究逻辑的形式结构时,只分析到原子命题为止。原子命题是命题的最小基本单位。

在命题逻辑中,我们规定用大写英文字母 P,Q,R 等以及 P_1,P_2,Q_1,Q_2 等符号表示命题,但不使用 T 和 F 表示一般的命题。T 和 F 专门用来表示永真和永假的命题或取真 (T) 及取假 (F) 的指定,其作用与逻辑真值 1 和 0 相同。

表示命题的符号称为命题符号。表示一个确定命题的命题符号称为命题常量。

表示任意命题的命题符号称为命题变元。命题变元以 $\{0,1\}$ 为变域。

命题变元表示任意命题,无确定的真值,不是命题。只有在为命题变元指定一个具体的命题后,才能确定在所作指定下它的真值是真还是假。这种给命题变元指定真、假值的方法称作指派。

复合命题使用符号表示以后,提供或留下的是称为命题形式的逻辑框架。一个逻辑框架可以为多个不同的命题所共有。

练习 1.1

1. 考虑下述陈述句中“是”的不同用法。
   (1) 鲁迅是《故乡》的作者。
   (2) 鲁迅是小说家。
   (3) 小说家是文学家。
2. 考虑下述陈述句的含义。
   (1) 我喜欢白头翁。
   (2) 我和小李的同级同学小赵去看电影。
   (3) 夕阳西下,断肠人在天涯。
   (4) 移民移出致富路。
3. 考虑下列语句是否为命题。
   (1) “离散数学”是计算机专业的专业基础课程。
   (2) 呼和浩特是自治区首府。
   (3) $1+101=110$。
   (4) 月球上也有生物。
   (5) $x \geqslant 8$。
   (6) 我正在说假话。
4. 下列命题是原子命题还是复合命题?
   (1) 多媒体计算机既可用于科学计算,也可用于课余娱乐。

(2) 北京不是大城市。
(3) 小周和小郑争论不休。
(4) 小孙否定了自己的提案。
(5) 哺乳动物未必是胎生动物。
(6) 不是西风压倒东风, 就是东风压倒西风。

§1.2 逻 辑 联 词

定义 1 否定 $\neg$

命题 P 的否定是命题 $\neg P$, 读作"非 P"。从真值表 1.2.1 易见 P 与 $\neg P$ 的取值关系: P 取真, 当且仅当 $\neg P$ 取假。

表 1.2.1

P	$\neg P$
F	T
T	F

定义 2 合取 $\wedge$

命题 P 与 Q 的合取是命题 $P\wedge Q$, 读作"P 与 Q"。$P\wedge Q$ 取真, 当且仅当 P 与 Q 都取真, 如表 1.2.2 所示。

$P\wedge\neg P$ 是一永假式。

表 1.2.2

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

定义 3 析取 $\vee$

命题 P 与 Q 的析取是命题 $P\vee Q$, 读作"P 或 Q"。$P\vee Q$ 取假, 当且仅当 P 与 Q 都取假, 如表 1.2.3 所示。

$P\vee\neg P$ 是一永真式。命题 P 与 Q 的析取命题 $P\vee Q$ 取真时, 允许 P 和 Q 同时取真, 即 P 与 Q 可同真, 因而也称析取 $\vee$ 为"可兼或"。

表 1.2.3

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

定义 4 条件 $\to$

命题 P 与 Q 组成条件命题 $P\to Q$, 读作"若 P 则 Q"。其中 P 称前件, Q 称后件。如表 1.2.4 所示,$P\to Q$ 取假, 当且仅当 P 取真而 Q 取假。

条件命题 $P\to Q$ 当前件 P 取假时, 无论后件取值是真还是假, 它都将获得真值, 即从假的前件出发不管推断的后件是真还是假, $P\to Q$ 都是真的。这一定义方法被理解为"善意的推定"。 $P\to Q$ 在 P 取假时被推定为真的规定称为"实质蕴涵"规定。

表 1.2.4

P	Q	$P\to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

定义 5 双条件 $\leftrightarrow$

命题 P 与 Q 组成双条件命题 $P\leftrightarrow Q$, 读作"P 当且仅当 Q"。 $P\leftrightarrow Q$ 取真, 当且仅当 P 与 Q 取相同的真值 (同真或同假), 如表 1.2.5 所示。这里称 P 为双条件命题的左支, 称 Q 为右支。

表 1.2.5

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

由原子命题通过逻辑联词连接或作用组成最简单的复合命题, 逻辑联词对复合命题的作用可以形成更为复杂的命题。命题都有真假, 原子命题的真假取决于它是否与客观实际相符合, 复合命题的真假由组成它的支命题和逻辑联词的严谨定义所确定。

需要注意的是, 逻辑联词与自然语言中相应词语的含义既有联系又有区别, 而且被逻辑联词连接和作用的支命题只要求是具有真假值之一值的命题, 而并不强调支命题间是否有内容上的联系。

逻辑联词反映复合命题与支命题之间的真值关系, 它们有确定的含义, 不能与自然语言中的相应词语混为一谈。逻辑联词是自然语言中相应词语的抽象。

从逻辑联词的真值表中可以看出, 逻辑联词是将 {T,F} 映射为 {T,F} 的函数。

练习 1.2

1. 指出下列语句中的“并非”、“并且”、“与”、“或者”、“只有···, 才···”、“如果···, 那么···”、“除非···, 否则···”等词是否是命题逻辑中的逻辑联词。
   (1) 她并非江雪。
   (2) 小朱拉开抽屉并且取出一本书。
   (3) 东风压倒西风, 或者西风压倒东风。
   (4) 如果说老李在学术上一窍不通, 那么在阴谋诡计上还是颇为能干的。
   (5) 小梁与小孟是好朋友。
   (6) 除非敌人投降, 否则他们没有出路。
   (7) 整数 i 只有能被 2 整除, i 才能被 4 整除。
   (8) 若老天不下雨, 则我去郊游。
2. 指出下列命题的真值。
   (1) 如果 $2+2=5$, 那么太阳从西边升起。
   (2) 如果太阳不从东边升起, 那么地球就停止自转。
   (3) 若 A 是胎生动物, 则 A 是哺乳动物。
   (4) 若元素 a 属于空集 $\varnothing$, 则属于集合 A。
   (5) 锄禾日当午, 汗滴禾下土。
   (6) 除非 $ABCD$ 是平行四边形, 否则它的对边不分别平行。
3. 令 $P=$ 天下雪, $Q=$ 我去镇上, $R=$ 我有空闲, 请将下列命题符号化。
   (1) 如果天下雪且我没有空闲, 那么我不去镇上。
   (2) 我去镇上当且仅当我有空闲。
   (3) 天不下雪。
   (4) 除非下雪, 否则我去镇上。
   (5) 或者下雪, 或者我有空闲。
   (6) 天在下雪, 我在去镇上。
4. 请将表 1.2.6～ 表 1.2.8 中括号空白处补充完整。

表 1.2.6

P	$(\ )\vee(\ )$
F	T
T	T

表 1.2.7

P	Q	$(\ )\leftrightarrow(\ )$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.2.8

P	Q	$(\ )P(\ )Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5. 在条件命题中, "善意的推定"是指什么? 在析取命题中,"可兼或"的含义是什么? 阐释以下命题。

   A : 若 $n > 2$, 则 $n^2 > 4$。

   B : 他的死重于泰山, 或轻如鸿毛。

   C : 去三楼需 6 分钟或 8 分钟。

§1.3 命题形式与真值函数

通过前面两节的讨论, 我们已经引入了五个逻辑联词, 得到了五个最简单的复合命题形式。从这些复合命题形式出发, 由逻辑联词再通过各种组合方式, 可以构成更多、更复杂的复合命题形式。那么怎样的组合形式才符合命题逻辑的命题形式呢?

定义 1 命题逻辑的命题形式称为合式公式 (wff) 或命题公式, 它是一个含有命题变元符号及逻辑联词的表达式, 以下述规则递归构成。

(1) 基础: 命题变元是合式公式, 称原子公式。

(2) 归纳: 若 A 是合式公式, 则 $\neg A$ 是合式公式; 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 是合式公式。

(3) 界限: 当且仅当由 (1)、 (2) 的有限次应用生成命题逻辑的全部合式公式。

为了简化圆括号的使用且不致引起表达的混淆, 我们约定:

(1) 合式公式的最外层括号可以略去。

(2) 规定逻辑联词的运算先后次序为 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。

(3) 命题公式 $(A \wedge \neg A)$, $(A \vee \neg A)$ 常分别记为 F 和 T。

例 1 设 P, Q 为命题变元, 按照命题逻辑合式公式的递归定义, 可知:

P, $\neg Q$, $(P \wedge \neg Q)$, $(\neg Q \vee P)$, $((P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow Q)$,

$(((P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)))$

都是合式的公式。再由圆括号省略和逻辑联词的优先次序的约定, 上述命题公式可以写为:

P, $\neg Q$, $P \wedge \neg Q$, $\neg Q \vee P$, $P \rightarrow \neg Q \leftrightarrow Q$, $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$。 □

需要注意, 圆括号的使用仅仅是对运算施行先后的区分, 只要能够严格表述运算的次序, 圆括号省略或不省略都是允许的。

将由自然语言表述的命题写成符号形式，就是要寻找每一个称作自然语言命题的真值形式的合式公式的表达式，即将它们符号化或翻译为命题公式，这是一个困难而复杂的问题。一般只要求对一些常见的、逻辑结构较为清晰的命题语句能作出正确的翻译。

为了翻译准确，我们要客观地分析与理解自然语言命题。采用“真值表方法”取值对照是一种有效手段。通过对照真值表上的真值，容易检查公式翻译是否妥当，而且还能克服情感、心态等方面的干扰或影响。

例 2 符号化以下命题。

(1) 只有你走我才留下。

(2) 我今天进城，除非下雨。

(3) 小张或小李都可以办好这件事。

解：(1) 命题意为“若你不走，则我不留”，即“若我留则你得走”。因此，它的正确翻译是:

令 P 为“你走”，Q 为“我留”，则原命题的真值形式是: $\neg P \to \neg Q$，亦即 $Q \to P$。

与原命题类似的命题还有“仅当你走我才留下”、“我留下仅当你走”。

在一般的命题表述中，“仅当”是必要条件，译成条件命题时是后件；而“当”是充分条件，译成条件命题时是前件。

(2) 命题意为“若不下雨，则我今天进城”，即“若我今天不进城，则必下雨”。因此，它的正确翻译是:

令 P 为“我今天进城”，Q 为“今天下雨”，则原命题可以符号化为 $\neg Q \to P$，亦即 $\neg P \to Q$。

“除非”表示唯一的条件，相当于“只有不 $\cdots$ 才 $\cdots$”。因此，与原命题类似的命题还有“只有不下雨，我今天才进城”、“除了下雨，我今天进城”。

单用“除非”的命题，“非 $\cdots$”是充分条件，译成条件命题时，“非 $\cdots$”是前件。要是“除非 $\cdots$，否则 $\cdots$”的命题，其真值形式就是双条件了。

(3) 命题“小张或小李都可以办好这件事”。当令 P 为“小张可以办好这件事”，Q 为“小李可以办好这件事”时，原命题 $F(P,Q)$ 的真值表如表 1.3.1 所示。

表 1.3.1

P	Q	$F(P,Q)$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

从真值表可得，$F(P,Q) = P \wedge Q$。所以要翻译成合取形式，“都”字起了决定性作用。如果原命题中略去“都”字，那么就要翻译成析取形式的命题公式。 □

在例 2(3) 的讨论中，使用了标记“$F(P,Q)$”。其含义是: 要求的命题形式由命题 P,Q 组成，该命题形式在 $\{T, F\}$ 上定义，且在 $\{T, F\}$ 上取值。换句话说，$F(P,Q)$ 是函数，$F(P,Q)$ 是以 $\{T, F\}$ 为定义域和值域的真值函数。

每一命题形式都确定一个函数，这一函数的自变元是命题形式中的命题变元，它的定义域和值域都是真值集 $\{T, F\}$。这样的函数称为真值函数。

当命题变元给定以后，由这些命题变元组成的命题公式是无限多的，但以给定命题变元为自变元的真值函数是有限的。

例 3 考虑只含有一个命题变元 P 的真值函数 $F(P)$。

解：由于只含有一个命题变元 P, $F(P)$ 的真值取值只有两个选择，即当 P 分别取真值 T、真值 F 时 $F(P)$ 的取值各是什么。我们把 $F(P)$ 的取值列成如表 1.3.2 所示真值表。

表 1.3.2

P	$F_3(P)$	$F_2(P)$	$F_1(P)$	$F_0(P)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

其中，$F_3(P)$ 是一常真的函数，命题形式如 $P\vee\neg P$, $(P\vee\neg P)\vee X$(X 表示由命题变元 P 组成的任一命题公式) 等的都是这种真值函数。

$F_2(P)$ 取值与 P, $P\wedge P$, $P\wedge P\wedge P,\cdots$ 取值一致。

$F_1(P)$ 与 $\neg P$, $\neg P\vee\neg P$, $\neg P\vee\neg P\vee\neg P,\cdots$ 取值相同。

$F_0(P)$ 是一永假的函数，$P\wedge\neg P$, $(P\wedge\neg P)\wedge X$ 就是与它取值完全一样的命题形式。 □

当命题变元的数目确定以后，不同的真值函数的数目是有限且确定的。但命题形式的数目却是无限的，它们是分别与相应命题函数取值一致的一组组命题公式。不同的命题形式可以表示相同的函数，从中找出一个形式最简单的、具有某种标准形式的命题公式，将是我们感兴趣的问题。

练习 1.3

1. 下列字符串是否是命题逻辑的合式公式?

   (1) $RQ\rightarrow P$

   (2) $((\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P))$

   (3) $\neg(P\rightarrow Q)\leftrightarrow\neg\neg P\wedge Q\rightarrow R$

2. 公式的代入与代入实例是指对命题公式 $A(P)$, 将 A 中命题变元 P 的每一出现均代换为命题公式 B, 所得的公式 $A(B)$ 称为原公式的代入实例。

   (1) 考虑下列命题公式组中后一公式是否是前一公式的代入实例:

   $((P\rightarrow Q)\rightarrow Q)\rightarrow P$, $(((A\rightarrow C)\rightarrow((B\wedge C)\rightarrow A))\rightarrow((B\wedge C)\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow C)$(其中 A, B, C 是任意命题公式);

   $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$, $Q\rightarrow((P\rightarrow P)\rightarrow Q)$;

   $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$, $P\rightarrow((P\rightarrow(Q\rightarrow P))\rightarrow P)$。

   (2) 证明“代入原理”：设 $A(P)$ 为含有命题变元 P 的永真命题形式，B 是任一命题公式，则 $A(P)$ 的代入实例 $A(B)$ 仍为永真命题形式。

3. 翻译下列命题为命题公式 (真值形式)。

   (1) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了。

(2) 如果小张和小李都不去, 小王就去。

(3) 如果金是金属, 那么金能导电, 而金是金属, 故金能导电。

(4) 只有身体好, 才能学习好。

(5) 只要这本书有用, 他就买回来, 虽然他不富。

(6) 他一定能完成当前的工作, 除非他突然调走。

(7) 人不犯我, 我不犯人; 人若犯我, 我必犯人。

(8) 不管明天是刮风还是下雨, 我们必去郊游。

4. 利用列出不同真值取值的方法, 考虑 $F(P,Q)$ 的个数。对每个真值函数, 给出一个与它取值相同的至多含有两个命题变元的命题公式。

§1.4 真值表与等值公式

设含有 n 个不同的命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的命题公式是 $G(P_1,P_2,\cdots,P_n)$, 对这 n 个变元的所有不同指派, G 都有相应的真值。由这种命题变元指派真值, 命题公式对应取值所列成的一张表, 就是所谓真值表。含有 n 个相异命题变元的命题公式, 其真值表有 2^n 个指派行。

对于命题公式 (1)$\neg P\wedge P$, (2)$\neg Q\vee Q$, (3)$P\to Q$, (4) $\neg P\vee Q$ 的真值表如表 1.4.1 所示。为简化起见, 我们把它们合并在一张表中了。

表 1.4.1

P Q	$\neg P\wedge P$	$\neg Q\vee Q$	$P\to Q$	$\neg P\vee Q$
T T	F	T	T	T
T F	F	T	F	F
F T	F	T	T	T
F F	F	T	T	T

不论其所含命题变元取何种指派, 其真值永为真的命题公式称永真式, 记为 T, 如 (2); 其真值永为假的命题公式称永假式, 记为 F, 如 (1)。像 (3) 和 (4), 对于它们所含命题变元的全部真值指派, 都有相同 (对于每一指派) 的真值, 这样的命题公式称作逻辑等值式或等值公式。

我们约定, 将命题公式 A 与 B 等值记为

$$A=B$$

通过构造真值表, 容易证明下述 12 组基本等值式, 它们是命题逻辑等值演绎的 12 组运算定律。

1. 重非律 $\neg(\neg P)=P$
2. 幂等律 $P\wedge P=P$
   $P\vee P=P$
3. 结合律 $(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$
   $(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$

4. 交换律　$P \wedge Q = Q \wedge P$

$P \vee Q = Q \vee P$

5. 分配律　$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

6. 吸收律　$P \wedge (P \vee Q) = P$

$P \vee (P \wedge Q) = P$

7. 反演律　$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

8. 一律　$P \wedge \mathrm{T} = P$

$P \vee \mathrm{F} = P$

9. 零律　$P \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$

$P \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$

10. 矛盾律　$P \wedge \neg P = \mathrm{F}$

11. 排中律　$P \vee \neg P = \mathrm{T}$

12. 联词化归律　$P \to Q = \neg P \vee Q$

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

在复合命题公式中, 其部分子公式 (必须也是合式公式) 可以用与其等值的命题公式替换, 替换后所得的新公式与原公式逻辑等值。这一事实我们常称之为替换原理。使用替换原理时, 被替换掉的子公式并不必须是命题变元, 而且也未必对复合命题公式中的同一子公式的每一出现都做替换。替换原理与代入原理是不同的。

利用基本运算定律和替换原理, 可以进行命题公式间的等值推演, 称命题演算。

例 1　证明公式 $P \to (Q \to R)$ 与 $Q \to (P \to R)$ 等值。

证:

$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \to R) & \\
= \ & \neg P \vee (\neg Q \vee R) & \text{(联词化归、替换原理)} \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q) \vee R & \text{(结合)} \\
= \ & (\neg Q \vee \neg P) \vee R & \text{(交换、替换原理)} \\
= \ & \neg Q \vee (\neg P \vee R) & \text{(结合)} \\
= \ & Q \to (P \to R) & \text{(联词化归、替换原理)}
\end{aligned}
$$

□

本例就是一个等值推演。在这一命题演算下, 我们无须使用真值表, 证明了公式 $P \to (Q \to R)$ 与 $Q \to (P \to R)$ 逻辑等值。

练习 1.4

1. 构造下列命题公式的真值表。

(1) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

(2) $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

(3) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(4) $\neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$(或$\neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$)

2. 已知命题形式的真值表如表 1.4.2 和表 1.4.3 所示, 分别求符合真值表、具有两个变元及三个变元的命题形式 (答案要尽量简单)。

表 1.4.2

P	Q	$F(P,Q)$
F	F	F
F	T	T
T	F	F
T	T	F

表 1.4.3

P	Q	R	$F(P,Q,R)$
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

3. 用等值推演法证明以下永真式。

(1) $P \to (Q \to P)$

(2) $\neg P \to (P \to Q)$

(3) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

(4) $(P \to Q) \to (P \to (Q \vee R))$

4. 下列判断 (命题) 是否正确 (真)? 其中 A, B, C 是任意命题公式。

(1) 若 $A \vee C = B \vee C$, 则 $A = B$。

(2) 若 $A \wedge C = B \wedge C$, 则 $A = B$。

(3) 若 $\neg A = \neg B$, 则 $A = B$。

(4) 若 $A \to B$ 是永真式, 则 $\neg B \to \neg A$ 是永真式。

§1.5 重言式与蕴涵式

永真公式称重言式, 永假公式称矛盾式, 不是矛盾式的命题公式称为可满足式。命题逻辑中数量无限的命题形式仅此而已。取值永真的真值函数称为重言的真值函数。重言式是我们特别感兴趣的, 因为它反映的是命题逻辑中的逻辑规律。例如, 重言式的合取式还是重言式。命题公式 G 是重言式, 无论它所含的命题变元取真还是取假, G 都取真值 T。因此, 在 G 中, 将其所含某变元, 以某一命题公式作代入, 所得的命题公式 G' 还是重言式。换句话说, 决定命题公式