模糊数学

基础及应用

化学工业出版社 | 教学资源网
www.cipedu.com.cn
专业教学服务支持平台

ISBN 978-7-122-11771-7

9 787122 117717 >

定价：28.00元

普通高等教育"十二五"规划教材

模糊数学基础及应用

张国立　张　辉　孔　倩　编著

化学工业出版社

·北京·

本书简明地阐述了模糊数学的基础理论、基本方法及其应用，开发了模糊数学实验。全书共分七章，主要内容有模糊集合基本理论、模糊关系、模糊扩张原理与模糊数、模糊模式识别、模糊聚类分析、模糊综合评判、模糊推理与模糊控制以及相应的应用实例。每章都配备了模糊数学实验，所提供的源程序可以作为读者自主开发的素材。每章还有一节相关内容讨论，扩充与延伸本章内容，尤其是目前没有定论、尚待解决的内容，旨在拓宽学生的视野，启发学生的思路，增强学生的创新能力。各章配有习题。

本书适合作为非数学专业研究生教材，也可作为理工科本科生教材以及供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

模糊数学基础及应用/张国立，张辉，孔倩编著．—北京：化学工业出版社，2011.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-11771-7

Ⅰ．模…　Ⅱ．①张…②张…③孔…　Ⅲ．模糊数学-高等学校-教材　Ⅳ．O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 131564 号

责任编辑：刘俊之　　文字编辑：吴开亮
责任校对：蒋　宇　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 10½　字数 270 千字　　2011 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：28.00 元

前　言

众所周知，数学是科学的皇后。人们在生产实践、科学研究以及日常生活中经常使用数学理论、方法解决问题。其中最基本的概念就是集合，常常把讨论对象的全体拿来作为论域，也就是经典的集合。集合可以表示概念，符合概念的全体构成集合的外延。我们交流信息、解决各种问题一般都是把符合某个概念的全体对象拿来讨论。然而许多时候这是做不到的，一些对象无法判断它是否属于这个集合。例如，考虑我国是否有两个人头发根数一样多？问题好像不难理解，然而细细想来，真正要解决这个问题就会遇到困难！关键问题就是：什么是“头发”？可以认为人身上的全体汗毛是论域，有些汗毛毫无疑问是头发，有些不是，还有一些我们难以判断，如耳朵附近的汗毛是头发吗？不同的人意见可能不一样。也就是说符合头发这个概念的对象是不确定的，或者说由头发构成的集合的边界是不确定的。传统集合最本质的特性就是任一对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一且仅居其一。换句话说，对一个概念，任一对象要么符合这个概念，要么不符合这个概念，二者必居其一且仅居其一。事实上，我们平时使用的大量概念都是类似头发这样的、外延不确定的概念。

正是看到了这种外延不确定的概念，为了描述、处理这样的概念，解决涉及这样概念的问题，美国加州大学伯克利分校自动控制论专家查德（L. A. Zadeh）教授 1965 年在信息与控制国际杂志上发表了开创性论文《Fuzzy sets》，从此诞生了一门新的学科——模糊数学(Fuzzy mathematics)。四十多年来，模糊数学理论与技术得到了迅猛的发展，国内外学者在这一领域做了大量卓有成效的工作。不仅理论研究日益深入、完善，而且应用理论、技术发展更有突破性。描述和仿效人的思维、推理、判断与决策的方式和过程等一系列方法不断产生和成熟。目前，模糊理论与技术已在过程控制，人工智能，气象预测，医学诊断，家电产品，人文、社科等众多领域得到了广泛的应用。

迄今为止，国内外关于模糊数学理论及其应用的著作、教材很多。多数教材内容太多，篇幅过大，课内无法完成。虽然可以选择内容授课，但必将打乱体系，增加学生学习困难和购书的经济负担。本书结合编者多年在教学实践中的经验和体会，本着精选基础内容、注重应用、强调实践的原则编写。全书共分七章。第 1 章简单介绍经典集合理论；第 2 章介绍模糊集合基本理论；第 3 章介绍模糊模式识别原理与方法；第 4 章介绍模糊关系以及模糊聚类分析；第 5 章介绍模糊映射、模糊变换以及模糊综合评判；第 6 章介绍模糊扩张原理与模糊数基本理论；第 7 章介绍模糊推理与模糊控制一般理论。

本书主要有以下特点。

第一，在内容与体系方面。一是精选模糊数学基础内容，这部分内容目的是让学生掌握处理不确定性问题的基本理论和方法，为学生进一步结合自己研究课题，学习相关模糊数学知识奠定基础。主要包括：模糊集合基本理论、模糊关系、模糊扩张原理、模糊数、模糊推理等。二是精选模糊数学应用最广泛、最成熟的几个领域。这部分内容既介绍常用的模糊技术，又介绍应用实例。包括模糊模式识别、模糊聚类分析、模糊综合评判和模糊控制四个领域。

第二，每章的数学实验都是基于 C# 平台开发的，在介绍程序源代码时添加了相应的注解，提高了代码的可读性。算例贯穿本书的始终，既可以带给读者感性认识，也是对应用程

序使用方法的直观说明。这些实验既可以用于课上教学，也可以让学生课下用书中提供的源程序开发模糊数学实验，以帮助学生更准确地理解模糊数学的基本概念、基本理论，掌握模糊数学原理、方法及其在一些领域的应用，激发学生自主学习兴趣，培养其分析问题解决问题的能力，提高学生的综合素质。

第三，每章有一节相关内容讨论，扩充与延伸相关内容，尤其是目前没有定论、尚待解决的内容，旨在拓宽学生的视野，启发学生的思路，增强学生的创新能力。

本书内容丰富，结构合理，可读性强，面向读者对象广而多，既适合作为非数学专业研究生的教材，也可作为理工科本科生教材以及供工程技术人员参考。

书中各章的实验内容由孔倩开发、编写，第 3 章、第 4 章由张辉编写，其余各章由张国立编写。

书中引用了诸多文献资料，在此谨向这些文献的作者表示衷心感谢！

限于我们的水平，书中难免存在疏漏和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

张国立　张　辉　孔　倩

2011 年 5 月于华北电力大学

目　　录

第 1 章　集合与映射

1.1　普通集合

1.1.1　集合的概念

集合论是德国数学家康托（G. Cantor）在 19 世纪末创立的。集合是数学中的一个基础概念，只有描述性定义，没有精确的数学定义。我们通过例子说明这个概念。例如，一个教室里的全体学生构成一个集合，全体实数构成一个集合，等等。一般地，集合可以这样来描述：具有某种特定性质的事物的全体组成一个集合，常用大写英文字母表示，如 A,B,X,Y 等表示集合；集合内的对象称为元素，常用小写英文字母 a,b,x,y 表示。x 是集合 X 的元素记作 $x\in X$（读作 x 属于 X）；x 不是集合 X 的元素记作 $x\notin X$（读作 x 不属于 X）。这种对集合概念的描述仅仅是一种解释，并没有真正定义什么是"全体"和"对象"，因此也没有真正定义"集合"和"元素"。

集合的内涵指有别于其他集合的本质属性，外延是指属于集合的元素全体。通常，一个集合表示一个概念，符合这个概念的全体对象也就是概念的外延。

在考虑具体问题时需要把议题限制在一定的范围内，这个范围称为论域，论域也是集合。

为了研究集合的方便，规定一个集合可以不包含任何元素，称为空集，记作 $\varnothing$。包含有限个元素的集合称为有限集，包含无限个元素的集合称为无限集。

一个集合的最根本属性是有一个明确的规则判断一个对象是否属于集合。所谓给出一个集合实际上就是给出了一个规则，按照给定的规则，一个对象要么属于集合，要么不属于集合，二者必居其一，且仅居其一。例如，某班学生构成一个集合，有理数全体构成一个集合，因为任意给定一个人都可以判断他是不是该班的学生，任意给定一个数也可以判断它是不是有理数。如果考虑某班中的高个子同学，或者考虑大的有理数，那么它们不能成为一个集合，该班的许多同学都难以判断他是不是高个子，类似地，也没有明确界限来判定哪些数是大的有理数。

为了明确集合由哪些元素组成，常用列举法和条件法来表示集合。

列举法适合于有限集或元素可依某种次序排列的无限集，其表示法是将元素写成一行并用花括号括起来。例如

$$A=\{a,b,c,d,e\}$$

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

集合 A 由 5 个不同的元素组成，集合 X 则由一个无穷序列组成，可以简写为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

集合的条件表示法的一般形式为

$$X=\{x\mid P(x)\} \tag{1-1}$$

式中，$P(x)$是关于 x 的命题，表示 x 应该满足的条件，$X=\{x\mid P(x)\}$就代表使命题 $P(x)$成立的全体 x 组成的集合。

【例 1.1】　自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**，复数集 **C** 可以表示为以下

形式。

$$\mathbf{N}=\{n|n=1,2,3,\cdots\}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}=\{n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\mathbf{Z}=\{x|x=0\text{ 或 }x\in N\text{ 或}-x\in N\}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

$$\mathbf{Q}=\left\{x=\frac{p}{q}\,|\,p\in Z,q\in N,p\text{ 与 }q\text{ 互素}\right\}$$

$$\mathbf{R}=\{x|-\infty<x<\infty\}$$

$$\mathbf{C}=\left\{x=a+bi\,|\,a,b\in\mathbf{R},i=\sqrt{-1}\right\}$$

【例 1.2】 n 维欧几里德空间 E^n 中点的全体所组成的集合记作 R^n。

$$\mathbf{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

特别地，$\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$。

定义 1.1 如果集合 X 的元素都是集合 Y 的元素，即 $x\in X\Rightarrow x\in Y$，则称 X 是 Y 的子集，记作 $X\subseteq Y$ 或 $Y\supseteq X$，读作"X 包含于 Y"，或"Y 包含 X"；如果 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$，则称集合 X 与 Y 相等，记作 $X=Y$。如果 $X\subseteq Y$，但 $X\neq Y$，则称 X 是 Y 的真子集。规定空集是任何集合的子集。

定义 1.2 设 X 是一个集合，则以 X 的所有子集为元素构成一个新的集合，称为 X 的幂集，记作 $P(X)$。

显然，幂集有如下性质。

① $\emptyset\in P(X)$，$X\in P(X)$；

② $x\in X\Leftrightarrow\{x\}\in P(X)$；

③ $Y\subseteq X\Leftrightarrow Y\in P(X)$，即 $P(X)=\{Y|Y\subseteq X\}$。

1.1.2 集合的运算

定义 1.3 设 X 为论域，$A,B,C\in P(X)$。集合的运算定义如下。

① 由属于 A 或 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}\tag{1-2}$$

② 由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}\tag{1-3}$$

③ 由 X 中不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的余集，记作 A^c 或 $\overline{A}$，即

$$A^c=\{x\in X|x\notin A\}\tag{1-4}$$

④ 由属于 A 不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\in X|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}\tag{1-5}$$

上述运算可以用文氏图（图 1-1）表示。

由上面定义可以推出集合的运算满足下面性质。

定理 1.1 设 X 为论域，$A,B,C\in P(X)$，则下面运算规律成立。

① 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

② 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

③ 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

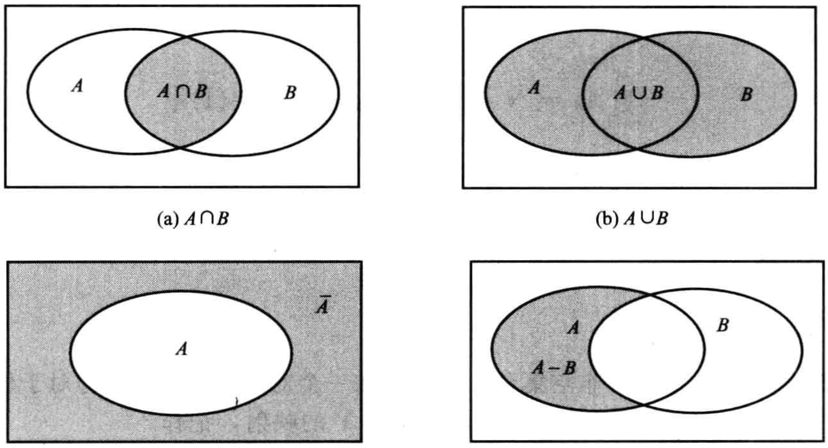
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

④ 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

⑤ 吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$；$A\cup(A\cap B)=A$

⑥ 零一律 $A\cup X=X$；$A\cap X=A$



(a) $A\cap B$　(b) $A\cup B$　(c) $\bar{A}$　(d) $A-B$

图 1-1　集合运算文氏图

$$A\cup\varnothing=A;\ A\cap\varnothing=\varnothing$$

⑦ 复原律　$(A^c)^c=A$

⑧ 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$；$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

⑨ 互补律　$A\cup A^c=X$；$A\cap A^c=\varnothing$。

对偶律是联系并交两种运算的两个非常重要的恒等式，也称为德·摩根（De Morgan）公式。

【例 1.3】 证明分配率 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

证明：

$$\begin{aligned}\forall x\in A\cap(B\cup C)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B\cup C\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B \text{ 或 } x\in C\\&\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ 或 } x\in A\cap C\\&\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

所以 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

1.1.3　集合族的并与交

定义 1.4　设 X 为论域，$A_t\in P(X)$，$t\in T$，T 为指标集，则称集合 $\{x\mid x\in X,\ \exists t\in T,\ s.t.\ x\in A_t\}$ 为集合族 $\{A_t\}$ 的并集，记作 $\bigcup\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x\in X\mid \exists t\in T,\ \text{使得 } x\in A_t\} \tag{1-6}$$

集合 $\{x\in X\mid \forall t\in T,\ x\in A_t\}$ 为集合族 $\{A_t\}$ 的交集，记作 $\bigcap\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{x\in X\mid \forall t\in T, x\in A_t\} \tag{1-7}$$

常见的指标集有

$$T=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}=N,\ T=[0,1]$$

集合族的并与交运算满足分配律

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t) \tag{1-8}$$

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t) \tag{1-9}$$

【例 1.4】 设 $A_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$B_n=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$，$n\in N$，求集合族 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$

的并集和交集。

解：按定义

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = N = \{1,2,\cdots\}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = N = \{1,2,\cdots\}, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

1.2 映射

1.2.1 映射与逆映射

定义 1.5 设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对于任意元素 $x\in X$，都有唯一元素 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X\to Y$$

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的象，记作 $y=f(x)$。对于任一固定 $y\in Y$，集合 X 中在 f 下的象是 y 的元素组成的集合（可以是空集）

$$\{x\in X \mid f(x)=y\}$$

称为 y 在映射 f 下的原象或逆象。集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$。集合

$$f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}$$

称为映射 f 的值域，记作 $R(f)$。一般 $f(X)\subseteq Y$，$f(X)$ 可以是 Y 的真子集，如果 $f(X)=Y$，则称 f 是从 X 到 Y 的满映射。如果对任意 $x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是从 X 到 Y 的一对一映射（单映射）。如果 f 既是满映射又是单映射，则称 f 为双射。如图 1-2 所示。

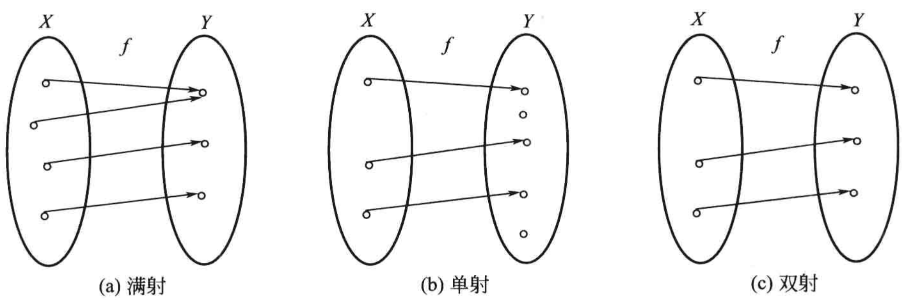


图 1-2 映射示意图

【例 1.5】 ①设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，则 f 既不是满映射也不是单映射；

$g: \mathbf{R}\to[0,1], g(x)=\sin x$，则 g 是满映射但不是单映射。

② 设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=e^x$，则 f 不是满映射但是单映射；

$g: \mathbf{R}\to(0,\infty), g(x)=e^x$，则 g 既是满映射又是单映射，也即是双映射。

③ 设 X 是某高校全体在校学生，$Y=\{x_1x_2\cdots x_{18} \mid x_i\in K, i=1,2,\cdots,18\}$，式中 $K=\{0,1,2,\cdots,9\}$，即 Y 由全体 18 位数字序列构成的集合，可以代表身份证号码。令 $f: X\to Y$，$f(x)=x$ 的身份证号码，则这个映射是单映射，但不是满映射。

定理 1.2 设 $f: X\to Y$ 是任一给定的映射，$A_1,A_2\in P(X), B_1,B_2\in P(Y)$，则有下面性质成立。

① $A_1\subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$

② $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$

③ $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$，当 f 是单映射时，等式成立

④ $f(A_1-A_2)\supseteq f(A_1)-f(A_2)$，当 f 是单映射时，等式成立

⑤ $B_1\subseteq B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$

⑥ $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

⑦ $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

⑧ $B_1\supseteq B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$

⑨ $f^{-1}((B_1)^c)=(f^{-1}(B_1))^c$

⑩ $f(f^{-1}(B_1))=B_1\cap f(X)$

⑪ $f^{-1}(f(A_1))\supseteq A_1$，当 f 是单映射时等式成立

这些性质可以按定义证明，留给读者自己完成。

【例 1.6】 设 $X=\{1,2\},Y=\{a,b,c\}$，映射

$$
\begin{aligned}
f: X&\to Y\\
1&\to a\\
2&\to c
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&P(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},X\};\\
&P(Y)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},Y\};\\
&f(\varnothing)=\varnothing,f(\{1\})=\{a\},f(\{2\})=\{c\};\\
&f(X)=\{f(1),f(2)\}=\{a,c\}\in P(Y);\\
&f^{-1}(\varnothing)=f^{-1}(\{b\})=\varnothing;\\
&f^{-1}(\{a\})=f^{-1}(\{a,b\})=\{1\};\\
&f^{-1}(\{c\})=f^{-1}(\{b,c\})=\{2\};\\
&f^{-1}(\{a,c\})=f^{-1}(\{a,b,c\})=f^{-1}(Y)=X\in P(X)。
\end{aligned}
$$

1.2.2　集合的特征函数

定义 1.6　设 $A\in P(X)$，称映射 χ_A

$$
\begin{aligned}
\chi_A: X&\to\{0,1\}\\
x&\mapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}
\end{aligned}
$$

为集合 A 的特征函数。

特征函数 χ_A 由 A 唯一确定，反之，给定 $X\to\{0,1\}$ 的一个映射 f，令 $A=\{x\in X\mid f(x)=1\}$，则 A 也由 f 唯一确定。这样就在 $P(X)$ 和 $\{f\mid f: X\to\{0,1\}\}$ 之间建立了一一对应关系。这为我们利用特征函数研究集合提供了理论基础。为书写方便，以后用 $A(x)$ 代替 $\chi_A(x)$。

集合与特征函数之间有下面几个基本关系。

定理 1.3　设 X 是任一给定的非空集合，$A,B,A_t\in P(X),t\in T$，则有下面性质成立：

① $A=\varnothing\Leftrightarrow A(x)=0$，$\forall x\in X$，

　$A=X\Leftrightarrow A(x)=1$，$\forall x\in X$；

② $A\subseteq B\Leftrightarrow A(x)\leqslant B(x),\forall x\in X$；

③ $A=B\Leftrightarrow A(x)=B(x),\forall x\in X$；

④ $(A\cup B)(x)=\max\{A(x),B(x)\}=A(x)\vee B(x)$，

$(A\cap B)(x)=\min\{A(x),B(x)\}=A(x)\wedge B(x)$；

⑤ $A^c(x)=1-A(x)$；

⑥ $\bigcup\limits_{t\in T}A_t(x)=\bigvee\limits_{t\in T}A_t(x)=\max\limits_{t\in T}\{A_t(x)\}$，

$\bigcap\limits_{t\in T}A_t(x)=\bigwedge\limits_{t\in T}A_t(x)=\min\limits_{t\in T}\{A_t(x)\}$。

式中，$\max\{A(x),B(x)\}=A(x)\vee B(x)$代表$A(x),B(x)$中较大者；$\min\{A(x),B(x)\}=A(x)\wedge B(x)$代表$A(x),B(x)$中较小者；$\bigvee\limits_{t\in T}A_t(x)$和$\bigwedge\limits_{t\in T}A_t(x)$分别为数集$\{A_t(x)\mid t\in T\}$的上确界和下确界。

数集$\{a_t\}$的上确界a就是$\{a_t\}$的最小上界，下确界就是最大下界，用数学式子可以描述如下。

定义 1.7 设$a,a_t\in\mathbf{R},t\in T$是指标集，如果$a$满足

① $a\geqslant a_t$，$\forall t\in T$

② $\forall b\geqslant a_t,\forall t\in T\Rightarrow b\geqslant a$

则称a是$\{a_t\}$的上确界，记作$\bigvee\limits_{t\in T}a_t$。

类似地，如果a满足

① $a\leqslant a_t,\forall t\in T$，

② $\forall b\leqslant a_t,\forall t\in T\Rightarrow b\leqslant a$

则称a是$\{a_t\}$的下确界，记作$\bigwedge\limits_{t\in T}a_t$。

注意一个数集的上、下确界与取大取小的区别。事实上，有限个数的上、下确界与这组数取大、取小是一致的。进一步，即使是无限数集，如果这个数集中有最大的数，这个数就是上确界，此时，上确界与取大也是一致的；如果无限数集中有最小的数，则该数就是下确界，这时下确界与取小也是一致的。

许多情况下，可以直接看出上、下确界。

例如：$\bigvee\limits_{t\in\mathbf{N}}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2$，

$\bigwedge\limits_{t\in\mathbf{N}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$。

【例 1.7】 证明 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

证明： $\forall x\in X$

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c(x)=1-(A\cup B)(x)&=1-\max\{A(x),B(x)\}\\&=\min\{1-A(x),1-B(x)\}\\&=\min\{A^c(x),B^c(x)\}\\&=(A^c\cap B^c)(x)\end{aligned}$$

因此，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$。

习题 1

1. 已知下列各集合

$$A=\{y\mid y=2x+1,x>0\},\ B=\{y\mid y=-x^2+9,x\in\mathbf{R}\}$$

则 $A\cap B=$________；　$A\cup B=$________。

2. 已知下列各集合

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z},x<10\},\ B=\{x\mid x\in\mathbf{Z},x>3\},$$

$C=\{x\mid x$是一个英文字母$\}$，$D=\{a,b,c,1,2,3,4,5\}$，式中$\mathbf{Z}$为整数集。试在下面的空格上填进一个适当的元素。

① ________ $\in A$但$\notin D$；　　② ________ $\in C$同时$\in D$；

③ ________ $\in A$ 同时 $\in B$；　　④ ________ $\in B$ 但 $\notin A$；

⑤ ________ $\in B$ 但 $\notin C$；　　⑥ ________ $\in A$，$\in B$ 但 $\notin D$。

3. 设 $A,B,C\in P(X)$，并且 $A\cup B=A\cup C$，则下列断言哪个成立？

① $B=C$；② $A\cap B=A\cap C$；③ $A\cap B^c=A\cap C^c$；④ $A^c\cap B=A^c\cap C$。

4. 用集合表示图中阴影部分。

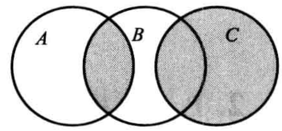


图 1-3　习题 4 图

5. 设 $A,B,C\in P(X)$，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)。$$

6. 设 $A_n=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right\}$，$B_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right\}$，$n\in\mathbf{N}$，求集合族 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 并集和交集。

7. 设已知映射 $f:A\to B$，其中集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$，且对任意 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则

① 集合 B 中元素的个数最少是__________。

② $f(\{-2,1,3\})=$__________；$f(A)=$__________；$f^{-1}(3)=$__________。

8. 设 $f:X\to Y,A\subseteq X,B\subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题中有且仅有一个正确。请找出正确的那个。

① (a) 若 $f(x)\in f(A)$，则 x 未必不在 A 中；
(b) 若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A$；
(c) 若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\notin A$；
(d) 若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A^c$。

② (a) $f(f^{-1}(B))=B$；　　(b) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$；
(c) $f(f^{-1}(B))\supseteq B$；　　(d) $f(f^{-1}(B))=B^c$。

③ (a) $f^{-1}(f(A))=A$；　　(b) $f^{-1}(f(A))\subseteq A$；
(c) $f^{-1}(f(A))\supseteq A$　　(d) 上面三个均不对。

④ (a) $f(A)\neq\varnothing$；
(b) $f^{-1}(B)\neq\varnothing$；
(c) 若 $y\in Y$，则 $f^{-1}(y)\in X$；
(d) 若 $y\in Y$，则 $f^{-1}(y)\subseteq X$。

9. $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}\left(6+\frac{1}{n}\right)=$__________；$\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\left(6-\frac{1}{n}\right)=$__________。

10. 证明吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$。

11. 用特征函数表示下面集合。

① 小于 20 的质数；

② 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 及其内部的点；

③ 大于 $\sqrt{3}$ 小于 20 的实数。

12. 给定实数域 $\mathbf{R}$ 上集合：$A=\{x|x>3\}$，$B=\{x|1<x<8\}$。

求 $B(6)$，$B^c(6)$，$(A\cup B)^c(8)$，$(A^c\cap B^c)(8)$，$(A\cup B)(4)$，$(A\cap B)(4)$。

第2章 模糊集合

2.1 模糊集合

2.1.1 模糊集合

先看一个例子。甲、乙两人讨论一个问题：他们所居住的城市共有一千一百万人，已知每个人的头发不超过一千万根。甲认为至少有两个人头发根数相等，乙认为不可能。甲用数学中的“抽屉”原理进行证明，乙无法反驳，但就是不信。你认为如何？

这个问题的论域是人身上的全体汗毛，头发是个概念，人身上的全体汗毛数不超过一千万根，当然头也发不超过一千万根。实际上，人身上有些汗毛是头发，有些汗毛不是头发大家没有异议，但是有些汗毛是不是头发不仅不同的人意见可能不同，就是同一个人也难以判断那些汗毛是不是头发！比如耳朵附近的汗毛。因此一个人的头发不超过一千万根是确定的，但是具体有多少根头发是无法确定的，所以也就谈不上两个人的头发根数相等了。

上一章介绍的普通集合 X 与其元素 x 之间的关系只有属于（$x\in X$）或不属于（$x\notin X$）两种情况。现实世界中有许多事物并不如此明确，如“高个子”，“年老”，“阴天”，“伟人”，“产品质量好”等。多高算高？多大年龄算年老？都是没有明确的界限。其实在日常生活中，人们经常使用泾渭不分明的语言，即概念的外延不明确。像这样外延不清晰的概念就是模糊概念。有些概念看似清晰，细想一下就不清晰了，如“头发”这个概念。为了描述（表示）模糊概念，美国控制论专家查德（L. A. Zadeh）于 1965 年在信息与控制国际杂志上发表了开创性论文《Fuzzy sets》，从此产生了一门新的学科——模糊数学。

定义 2.1 设 A 是论域 X 到闭区间$[0,1]$的一个映射，即

$$\begin{aligned} A: X &\to [0,1] \\ x &\to A(x)\in[0,1] \end{aligned}$$

则称 A 是 X 上的一个模糊集合（或称 A 是 X 的一个模糊子集），$A(x)$称为模糊集合 A 的隶属函数，$A(x)$的值称为 x 对模糊集合 A 的隶属度。

论域 X 上的模糊集合全体记作 $F(X)$，称为模糊幂集。当 $A(x)$取值仅为 0 和 1 时，$A(x)$退化为普通集合的特征函数。因此，普通集合是特殊的模糊集合，模糊集合是普通集合的推广。

【例 2.1】 设 $X=[0,100]$为人的年龄论域，给出“年老”O，“年轻”Y 两个模糊子集，隶属函数为（图 2-1）

$$O(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 50 \\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50< x\leqslant 100 \end{cases}$$

$$O(60)=0.8$$
$$O(80)=0.97$$

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

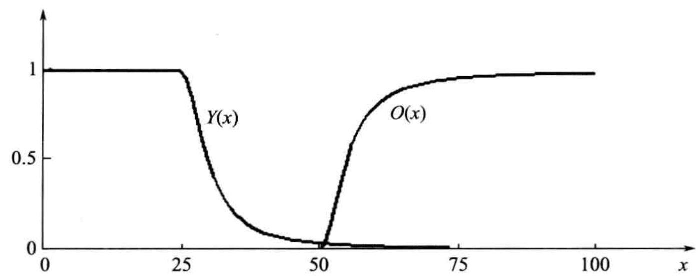


图 2-1　年老 O 和年轻 Y 的隶属函数

【例 2.2】 考虑五个人构成的论域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ 体温分别为：39.8℃，39.3℃，38.5℃，37.5℃，36.5℃。X 上“发高烧的人”的模糊集合为 A，隶属函数可以定义为

$$x_1\rightarrow 1$$
$$x_2\rightarrow 0.9$$
$$x_3\rightarrow 0.5$$
$$x_4\rightarrow 0.1$$
$$x_5\rightarrow 0$$

模糊集合常用下面几种表示方法。

(1) 查德表示法

论域 X 只包含有限多个元素或可数无限多元素时，即 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 或 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots\}$ 时，则 X 上的模糊集合 A 可表示为

$$A=\frac{A(x_1)}{x_1}+\cdots+\frac{A(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}A(x_i)/x_i \tag{2-1}$$

或

$$A=\frac{A(x_1)}{x_1}+\cdots+\frac{A(x_n)}{x_n}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}A(x_i)/x_i \tag{2-2}$$

或写成

$$A=\int_X A(x)/x \tag{2-3}$$

式中，$\frac{A(x_i)}{x_i}$不表示分数，而是表示元素 x_i 隶属于 A 的程度为 $A(x_i)$；符号“+”也不表示“加号”，而是一种联系符号。式（2-3）中的“$\int$”不是普通的积分号，仅表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括。

用查德表示法，例 2.2 中表示“发高烧的人”的模糊集合 A 可以记为

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.9}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}+\frac{0}{x_5}$$

或

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.9}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}$$

即，在查德表示法中，隶属度为 0 的项可以不写。

(2) 序偶表示法

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots\}$，则 X 上的模糊集合 A 可表示为

$$A=\{(A(x_1),x_1),\cdots(A(x_n),x_n),\cdots\} \tag{2-4}$$

称为序偶表示法。

(3) 模糊向量表示法

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 X 上的模糊集合 A 可表示为

$$A=(A(x_1),\cdots,A(x_n))=(a_1,\cdots,a_n) \tag{2-5}$$

称为模糊向量表示法，其中 $a_k=A(x_k)$ 表示 X 中第 k 个元素 x_k 的隶属度，也是模糊向量 A 的第 k 个分量。

在这种表示法中，论域 X 中元素要排序，并且隶属度为 0 的项也要写上。用模糊向量表示法，例 2.2 中表示“发高烧的人”的模糊集合 A 应当表示为

$$A=(1,\ 0.9,\ 0.5,\ 0.1,\ 0)$$

(4) 解析表示法

设论域 X 为实轴 $\mathbf{R}$ 上的一个区间，即 $X=[a,b]$，给出 $A(x)$ 的解析表达式，这种方法称为解析表示法或条件表示法。

例 2.1 中查德给出的“年老” O 与“年轻” Y 两个模糊集合都是用的解析表示法。

2.1.2 模糊集合的运算

由于普通集合是模糊集合的特例，普通集合的特征函数是特殊的隶属函数。普通集合之间的关系和运算可以用特征函数，也即隶属函数来表示，因此容易想到利用隶属函数定义模糊集合之间的关系和运算。

定义 2.2 设 X 为论域，$A,B\in F(X)$，则模糊集合的包含、相等关系以及并、交、余运算定义如下。

① 如果 $\forall x\in X$，$A(x)\leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B，或称为 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$，即

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A(x)\leqslant B(x),\forall x\in X \tag{2-6}$$

这时也称 A 为 B 的子集，其隶属函数如图 2-2 (a) 所示。

② 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，即

$$A=B\Leftrightarrow A(x)=B(x),\forall x\in X \tag{2-7}$$

③ A 与 B 的并记作 $A\cup B$，其隶属函数定义为

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x) \tag{2-8}$$

如图 2-2(b) 所示。

④ A 与 B 的交记作 $A\cap B$，其隶属函数定义为

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x) \tag{2-9}$$

如图 2-2(c) 所示。

⑤ A 的余集记作 A^c，其隶属函数定义为

$$A^c(x)=1-A(x) \tag{2-10}$$

如图 2-2(d) 所示。

类似于普通集合的定理 1.1，模糊集合间的并、交、余运算满足定理 1.1 中的前 8 条运算规律，即有如下定理。

定理 2.1 在 $F(X)$中，幂等律、交换律、结合律、分配律、吸收律、复原律、零壹律和对偶律均成立，但互补律不成立。