

第一模块教材

高中新课标

数学



总主编：毛文凤 / 本册编著：杨润生 周 蕾

解析几何的 方法和技巧

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

解析几何的方法和技巧

《新课标数学模块教材》丛书编委会

总主编:毛文凤 博士

执行主编:李君华 教授

执行副主编:肖柏荣(江苏教育学院数学系教授,江苏省中学数学教学专业委员会副理事长)

袁 桐(扬州新东方中学数学特级教师,江苏省名教师)

周敏泽(常州高级中学数学特级教师,全国模范教师)

徐沥泉(无锡市教学研究中心数学特级教师,全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长)

丛书编委:	李君华	肖柏荣	袁 桐	周敏泽	徐沥泉
	刘云章	马永培	朱平天	杨润生	葛福生
	周冠廷	孙志人	刘国祥	何继刚	卫 岗
	蔡伟元	周公贤	刘威伯	顾曼生	管义桂
	顾继玲	方彩云	张新华	陈小红	徐德同

本册编著:杨润生(南京师范大学数科院教授)

周 蕾(南京二十九中数学优秀青年教师)

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚

社 长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

解析几何的方法和技巧/毛文凤主编.-北京:中国

大百科全书出版社,2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7217-1

I.解... II.毛... III.解析几何课—高中—教学参考资料

IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142246 号

策划设计:可一图书 (<http://www.keyibook.com>)

责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材

解析几何的方法和技巧

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

<http://www.ecph.com.cn>

北京阜成门北大街 17 号 邮编:100037 电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 11.25 印张 200 千字

ISBN 7-5000-7217-1/G·815

定 价:16.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵,已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中,编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书,从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学,应注重概念清晰、计算正确、论证有据;数学作为一种文化,应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的,是符合新课标理念的。当然,归根结底,针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的,在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合:适度的形式化与启发兴趣形式相结合,发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合,掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论、背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前 言

解析几何是自然科学和工程技术中的一种最基本的数学工具,是近代数学的基础。

解析几何的方法由于具有解决各类问题的普遍性,如今不仅成为几何研究中的一个基本方法,而且已远远超出数学领域,而被广泛应用于精确的自然科学领域(如物理学)之中。

解析几何是中学数学的重要组成部分。本书按照教育部于2003年制定的《普通高中数学课程标准(实验)》中有关解析几何的必修和选修的内容标准进行编写。着重介绍解析几何的几种基本方法:坐标法、向量法、参数法和变换法,以便能使读者从中获得解决问题的更多的有力工具。同时,我们通过一系列例题探讨、总结了解析几何的一些常用技巧,揭示了学生容易陷入的思维误区。本书力求内容新颖,重点突出;深入浅出,便于自学;论证严谨,方法简捷。为便于读者复习、巩固,我们注意了习

题的选择和配置,每一节后面都有“习题”,每章后配有“总习题”,书末又配置了“综合练习”,每一习题都附有提示或答案,供读者参考。我们期望这本书能成为引导学生了解解析几何的历史和功绩,领略解析几何的精美内蕴,掌握解析几何的思想和方法的良师益友。

本书适合高中学生使用,也可供中学数学教师阅读参考。

由于编者水平和时间所限,书中不妥和疏漏之处敬请有关专家和读者不吝赐教。

编者

目 录

第一章 解析几何的创立

——彪炳数学史册的伟大变革·····	(1)
--------------------	-----

第二章 坐标法

——观苍蝇爬行而突发的灵感·····	(5)
--------------------	-----

§ 1 坐标系寻踪探秘·····	(7)
------------------	-----

§ 2 精挑细选坐标系·····	(37)
------------------	------

§ 3 “牵线搭桥”巧转化·····	(49)
--------------------	------

§ 4 代数技巧觅捷径·····	(57)
------------------	------

§ 5 数形结合放异彩·····	(66)
------------------	------

总习题二·····	(85)
-----------	------

第三章 向量法

——使空间结构代数化的新途径·····	(91)
---------------------	------

总习题三·····	(106)
-----------	-------

第四章 参数法

——在变量间架设金色桥梁	(111)
§ 1 奇思与妙用, 参数法显神通	(111)
§ 2 寻觅参数建方程(参数方程法)	(114)
§ 3 利用参数巧过渡(参数过渡法)	(178)
§ 4 确定系数定方程(待定系数法)	(192)
总习题四	(199)

第五章 变换法

——于变化中谋求简单便捷	(205)
§ 1 平面上的点变换	(205)
§ 2 平面上的坐标变换	(226)
总复习五	(238)
综合练习	(242)
参考答案	(249)

第一章 解析几何的创立

——彪炳数学史册的伟大变革

“我决心放弃那种仅仅是抽象的几何……我这样做是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何。”

——笛卡尔

“解析几何提供了一个系统的工具，把数的关系转换成几何关系，或反过来把几何关系转换成数的关系。”

——波利亚

“只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善。”

——M·克莱因

几何学是数学中最古老的一门学科，其起源可追溯到史前时期，随着生产实践的需要不断地发展起来。至公元前3世纪几何学在古希腊已取得了令人惊叹的成果：产生了具有完整演绎体系的欧几里得（约公元前330～前275）的《几何原本》；阿波罗尼斯（约公元前260～前170）的《圆锥曲线论》问世，它几乎包括了圆锥曲线的所有性质；阿基米德（约公元前287～前212）找出了球与外切圆柱体体积之比为

2:3;……但在其后的1800余年中,几何学的发展却徘徊不前.究其原因在于研究方法仍局限于纯综合推论,未脱离欧几里得的窠臼.

14世纪以来,欧洲的生产方式及航海贸易等有了迅速的发展,迫切要求生产技术和有关自然科学的大发展.对运动的研究已成为当时自然科学的中心问题.16世纪以后,一方面哥白尼(1473~1543)提出日心说,伽利略(1564~1642)由研究物体运动得出自由落体定律和抛体运动规律等都向几何学提出了用运动观点认识、处理几何曲线的课题.另一方面,1591年法国数学家韦达(1540~1603)在代数中系统地使用字母,将代数符号化,从而将代数从过去分别解决各类特殊问题、侧重于计算的数学分支转变成一门研究一般类型问题和方程的学科,为将曲线转化为方程,由方程研究曲线铺平了道路.

法国哲学家笛卡尔(René Descartes 1596~1650)对研究问题的方法论有特别的兴趣.他分析了以往几何与代数方法的各自长处和缺陷后说:“我想应当寻求另一种包含这两门学科的长处而没有它们缺点的方法.”1637年发表了哲学著作《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》,在作为附录之一的《几何学》中,他从自古已知的天文和地理的经纬制出发指出平面上的点和实数对 (x, y) 的对应关系,并进一步考察二元方程 $F(x, y) = 0$,将它看成两变量间的关系式,当 x 变化时, y 随之变化, x 、 y 不同的数值所确定的平面上的许多不同的点便构成一曲线,笛卡尔称它为该方程表示的曲线.这样,一个方程就可通过几何的直观和方法去处理;反过来,可离开几何图形用代数方法研究曲线的性质,从而笛卡尔借助于坐标系在互相隔绝的代数和几

何之间架起了一座桥梁,并在数学中首先引入“变量”的概念,宣告了解析几何的诞生,完成了数学史上一项划时代的变革,开拓了一个变量数学的崭新领域.恩格斯对笛卡尔给予了极高的评价:“数学中的转折点就是笛卡尔的变数,有了变数,运动进入数学,有了变数,辩证法进入数学……”解析几何的产生是建立变量数学的第一个巨大成就,它推动着微积分及整个数学研究的突飞猛进.数学史家们称笛卡尔的《几何学》中阐述的思想是“精密科学中最伟大的一步.”中国科学院院士、国家最高科学技术奖获得者吴文俊先生说:“我认为真正在历史上起推动作用最大的,在近代数学上,一个是解析几何,一个是微积分的创造,特别是解析几何的创造它更是一个历史的转折.近代数学之所以有今天,是得力于这两大突破.”

笛卡尔 1596 年 3 月 31 日生于法国土伦的拉哈耶,8 岁时入拉夫雷士耶稣会学校学习,16 岁进入普瓦捷大学攻读法学,20 岁时获博士学位并迁居巴黎,1628 年移居荷兰.长期从事哲学、天文学、物理学、化学、生理学和数学的研究.主要著作有《思想的指导法则》、《世界体系》、《哲学原理》、《音乐概论》、《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》及三篇附录:《折光学》、《气象学》和《几何学》.笛卡尔一生中对数学有浓厚的兴趣但并没有花太多的时间,《几何学》是他的惟一数学著作.因此美国的著名数学史家 M·克莱因在他的《古今数学思想》一书中称笛卡尔“是第一个杰出的近代哲学家,近代生物学的奠基人,第一流的物理学家,但只偶然地是个数学家.”然而,这个“偶然的数学家”完成的惟一数学著作却是数学史上划时代的光辉巨著!1649 年,

笛卡尔接受瑞典女王克利斯提娜的邀请,到斯德哥尔摩出任女王的哲学老师,不幸数月后(1650年2月11日)病逝,一颗科学巨星陨落!

和笛卡尔同时代的法国业余数学家费尔马(Pierre de Fermat 1601~1665)分享着创立解析几何的荣誉.他是一个博览群籍、见多识广的学者,也是一位精通各种文字的语言专家,并且还是一位社会活动家,一位清正廉洁的图鲁斯议会的议员.年近30岁时才认真注意数学,但对数论、解析几何、概率论都作出了开创性的贡献.他对著述无意发表,去世后后人在他遗留的笔记、批注和书信中找出并汇集成书.1630年写成,而发表于1679年的《平面与立体轨迹引论》中他把希腊数学家阿波罗尼斯等人用综合几何方法研究得出的曲线的特征,通过引进坐标以统一的方式译成了代数语言,还具体地研究了直线、圆及其他圆锥曲线的方程,并在一定程度上掌握了利用移轴和转轴的办法化简方程的技法.

笛卡尔、费尔马创立了解析几何,但他们的工作还很不完善.17、18世纪的众多数学家,其中最主要的是欧拉(1707~1783)、拉格朗日(1736~1813)和蒙日(1746~1818)为解析几何的发展、完善作出重要贡献,使解析几何逐渐成为一门独立的、充满活力的数学学科.其中1748年出版的欧拉的《分析引论》被视为现代意义下的第一本解析几何教程.

虽然19世纪后解析几何已发展得较为完善,但这并不意味着解析几何已丧失活力.作为解析几何的延续和推广,早已出现了代数几何这一学科.代数几何所研究的对象是代数方程所表示的曲线、曲面和超曲面,这些方程不仅有一次、二次的,更有高次的,不仅在实空间还在复空间研究几何图形的性质.代数几何仍是一个蓬勃发展着的学科.

第二章 坐标法

——观苍蝇爬行而突发的灵感

传说笛卡尔终身保持着在耶稣教会学校读书时养成的“晨思”习惯。在一次“晨思”时，他看见一只苍蝇正在天花板上爬行，忽然灵感突现，他想：如果知道了苍蝇与相邻两墙壁的距离之间的关系，不就能描述它的爬行路线了吗？坐标法的闪念由此而生！

坐标法就是通过建立坐标系，建立起点与实数组的一一对应，从而图形可由方程来表示，进而通过对方程的讨论来研究图形的性质，这是解析几何的最基本的方法。

用坐标系来确定点的位置并非笛卡尔的首创。公元前 2000 年，美索不达米亚地区的巴比伦人已能用数字表示一点到另一固定点、直线或物体的距离，已有原始的坐标思想。公元前 4 世纪，我国战国时代的石申就曾利用坐标方法记录了一百多颗恒星的方位，著成世界上最早的星表——《石氏星经》。阿波罗尼斯在研究圆锥曲线时，也曾引用两条互相垂直的直线作为坐标轴，只是他的几何仍是静态的，并未把曲线作为动点的轨迹，也未给出圆锥曲线的一般表示法。14 世纪，奥力森（1323～1382）在他的书中陈述了一种坐标几何，用坐标来确定点的位置，这是从天文、地理坐标到近代坐标几何学的过渡。然而，这些工作

都还没有建立起代数与几何的本质联系. 笛卡尔的功绩在于他不仅用坐标表示点的位置, 而且将坐标通过“点动成线”具体地运用到建立曲线方程, 同时他又把方程看作两个变量间的关系式, 从而使数学中的两大要素“数”与“形”统一起来. 即既可用代数方法研究几何问题, 又可运用几何方法解决代数问题.

§ 1 坐标系寻踪探秘

在中学教材中都采用直角坐标系,在平面上取定一个直角坐标系后,该平面上的点就与一对有序实数 (x, y) 一一对应.因此,直角坐标系在平面上的点与实数对之间架起了桥梁,实现了“形”与“数”的统一.在生活中我们见到过各式各样的桥梁:石板桥、拱形桥、斜拉索桥……我们自然要问:架设在点与实数组间的“桥梁”是否只有直角坐标系一种?读者能否设计出新的“桥梁”?

建桥是为了建立联系,因此任何桥梁的设计方案必须遵循便于联系、实用的准则.最方便的设计是将原方案(直角坐标系)进行适当的改造,如将直交的两条轴改为斜交,再如使斜交的两轴上的单位长度不必相等,这些改变显然并不影响建立起点与实数组的一一对应.还有其他坐标系的设计方案.现介绍如下:

一、平面上的仿射坐标系与笛卡尔坐标系

相交于原点的两条数轴,构成了平面仿射坐标系.如两条数轴上的度量单位相等,则称此仿射坐标系为笛卡尔坐标系,两条数轴互相垂直的笛卡尔坐标系,称为笛卡尔直角坐标系,否则称为笛卡尔斜角坐标系.两数轴分别称为 x 轴和 y 轴,统称为坐标轴.将 x 轴绕原点旋转,使 x 轴正向以最近的路径旋转到与 y 轴正向相合时,如旋转方向是逆时针的,称此坐标系为右手坐标系,否则称为左手坐标系.通常采用右

手坐标系,建立了坐标系的平面称为坐标平面.

面,令 P 为坐标平面上任一点如图 2-1-1,

从 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于 M 点,作 x

轴的平行线交 y 轴于 N 点,若 M 点在 x 轴

上的坐标为 x , N 点在 y 轴上的坐标为 y , 则

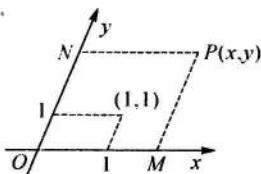


图 2-1-1

称实数对 (x, y) 为点 P 在坐标系 $O-xy$ 中的坐标. 若 $O-xy$ 是仿射(斜角或直角)坐标系, 则称 (x, y) 为点 P 的仿射(斜角或直角)坐标.

中学教材中都采用笛卡尔右手直角坐标系. 其实有些问题用仿射坐标系或斜角坐标系更方便. 当初笛卡尔在《几何学》中使用的也是斜角坐标系(虽然当时没有明白地出现 y 轴). 直角坐标系是后人为了讨论有关距离、垂直问题时的方便才加以规定的.

我们关心的是,在什么情况下采用仿射坐标系或斜角坐标系会给我们带来方便? 为此我们考察以下问题.

1. 平面上的直线方程及两直线的位置关系

(1) 直线方程

取定一个仿射坐标系 $O-xy$, 令过点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 的直线为 l 如图 2-1-2. 若 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, 则点 $P(x, y)$ 在直线 l 上的充要条件是

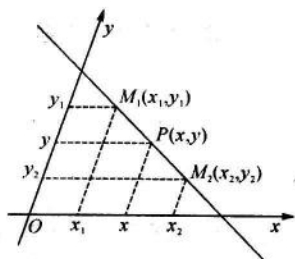


图 2-1-2

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (2-1)$$

(2-1)即为直线 l 的方程,此方程称为直线的两点式方程.