GB 工科类本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

概率论与数理统计同步学习辅导

■ 主编 邰淑彩 孟新焕

GB 工科类本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

概率论与数理统计同步学习辅导

■ 主　编　郃淑彩　孟新焕

■ 主　审　刘金舜

■ 参编者　杨丽华　唐五龙　刘园园

安徽建筑大学藏書
图书馆

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步学习辅导/郜淑彩,孟新焕主编.—武汉:武汉大学出版社,2011.6
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-08675-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①郜… ②孟… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第064957号

责任编辑:李汉保　　　责任校对:黄添生　　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:荆州市鸿盛印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:12.5　字数:262千字　插页:1
版次:2011年6月第1版　　2011年6月第1次印刷
ISBN 978-7-307-08675-3/O·450　　定价:20.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

主　　任　羿旭明　武汉大学数学与统计学院，副院长，教授

副 主 任　何　穗　华中师范大学数学与统计学院，副院长，教授

蹇　明　华中科技大学数学学院，副院长，教授

曾祥金　武汉理工大学理学院，数学系主任，教授、博导

李玉华　云南师范大学数学学院，副院长，教授

杨文茂　仰恩大学（福建泉州），教授

编　　委　（按姓氏笔画为序）

王绍恒　重庆三峡学院数学与计算机学院，教研室主任，副教授

叶牡才　中国地质大学（武汉）数理学院，教授

叶子祥　武汉科技学院东湖校区，副教授

刘　俊　曲靖师范学院数学系，系主任，教授

全惠云　湖南师范大学数学与计算机学院，系主任，教授

何　斌　红河师范学院数学系，副院长，教授

李学峰　仰恩大学（福建泉州），副教授

李逢高　湖北工业大学理学院，副教授

杨柱元　云南民族大学数学与计算机学院，院长，教授

杨汉春　云南大学数学与统计学院，数学系主任，教授

杨泽恒　大理学院数学系，系主任，教授

张金玲　襄樊学院，讲师

张惠丽　昆明学院数学系，系副主任，副教授

陈圣滔　长江大学数学系，教授

邹庭荣　华中农业大学理学院，教授

吴又胜　咸宁学院数学系，系副主任，副教授

肖建海　孝感学院数学系，系主任

沈远彤　中国地质大学(武汉)数理学院,教授
欧贵兵　武汉科技学院理学院,副教授
赵喜林　武汉科技大学理学院,副教授
徐荣聪　福州大学数学与计算机学院,副院长
高遵海　武汉工业学院数理系,副教授
梁　林　楚雄师范学院数学系,系主任,副教授
梅汇海　湖北第二师范学院数学系,副主任
熊新斌　华中科技大学数学学院,副教授
蔡光程　昆明理工大学理学院数学系,系主任,教授
蔡炯辉　玉溪师范学院数学系,系副主任,副教授
执行编委　李汉保　武汉大学出版社,副编审
黄金文　武汉大学出版社,副编审

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

内容简介

本书是与《概率论与数理统计》配套使用的同步辅导教材。内容涉及概率论的基本概念，随机变量及其分布，二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计与假设检验等。各章内容包括：内容提要、重点难点、疑难解答和习题详解四部分。本书可以供高等院校（非数学专业）本、专科生使用，对报考硕士研究生的考生也具有重要的参考价值。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版

社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作,力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材,为高等教育的发展贡献力量!

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

概率论与数理统计是高等学校理、工科与经济类专业本科生的必修课程，也是硕士研究生入学考试的必考科目。一方面，由于这门课程所涉及的基础数学知识面较广，且思维方式不同于传统的恒等变形、演绎推理的数学方法，再加上其应用的广泛性和复杂性，从而使学生普遍感到学习困难；另一方面，由于教学学时的原因，许多概念、定理等知识，教师在课堂内不能进行详细的讨论和论证。鉴于以上原因，作者根据多年的教学实践经验，并充分考虑学生学习该课程存在的主要问题，特编写了与《概率论与数理统计》(武汉大学出版社出版，作者编)相配套的同步辅导教材。本书内容编排次序与大部分工科专业使用的概率统计教材基本一致，因此，无论使用哪种版本的同类教材，本书都是学习该课程的极好参考书，对课堂教学内容将产生有益的强化和补充。

本书每章均包括以下内容：

一、内容提要：对本章的基本概念、理论、计算公式和方法进行归纳和总结，在学习中起到提纲挈领的作用，使学生了解本章的基本要求。

二、重点难点：给出了本章的重点和难点内容，可以使学生对重点内容给予足够的重视，集中力量攻克难点内容。

三、疑难解答：提出了本章若干疑难问题或容易混淆概念的问题，并给予解答。可以帮助学生正确理解概念、理论和方法，培养学生正确思考问题、解决问题的能力。

四、习题详解：给出了教材中全部习题及综合练习的详细解答。通过解题帮助学生提高正确分析问题和解决问题的能力，从而加深对《概率论与数理统计》这门课程的概念、理论的认识和理解。

本书第 1 章至综合练习 1 由孟新焕编写，其中第 2 章、第 4 章的习题详解由杨丽华编写，第 5 章的习题详解由唐五龙编写，第 6 章至综合练习 2 由郃淑彩编写，其中第 6 章的习题详解由刘园园编写。刘金舜主审。

限于作者水平，书中错误之处在所难免，恳请专家、同行、读者指正。

作　者

2011 年 2 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　概率论的基本概念

§1.1　内 容 提 要

1.1.1　随机试验

称满足以下三个条件的试验为随机试验：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确所有的可能结果；

(3) 进行试验之前不能确定哪个结果出现.

1.1.2　样本点　样本空间　随机事件

随机试验的每一个可能结果称为一个样本点，也称为基本事件.

样本点的全体所构成的集合称为样本空间，也称为必然事件. 必然事件在每次试验中必然发生.

样本空间的子集称为随机事件，简称事件.

在每次试验中必不发生的事件为不可能事件.

1.1.3　事件的关系与运算

(1) 包含关系　$A \subset B$，即事件 A 发生，导致事件 B 发生；

(2) 相等关系　$A = B$，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$；

(3) 和事件　$C = A \cup B$，即事件 A 与事件 B 至少有一个发生；

(4) 积事件　$C = AB = A \cap B$，即事件 A 与事件 B 同时发生；

(5) 差事件　$C = A - B$，即事件 A 发生，事件 B 不发生；

(6) 互不相容事件　A, B 满足 $AB = \varnothing$，事件 A 与事件 B 不同时发生；

(7) 逆事件　$\overline{A} = S - A$，即 $A \cup \overline{A} = S$, $A\overline{A} = \varnothing$.

1.1.4　事件的运算律

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$；

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A(BC) = (AB)C$；

(3) 分配律　$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$；

(4) 幂等律　$A\cup A=A,\ AA=A$;

(5) 差化积　$A-B=A-(AB)=A\overline{B}$;

(6) 德・摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.5 概率的公理化定义

设E为随机试验,S为样本空间,对于S中的每一个事件A,赋予一个实数$P(A)$,称之为A的概率,$P(A)$满足:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互不相容,则有

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$.

1.1.6 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$. 特别地,若$A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(A)\leqslant P(B);$$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,更一般地,$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

1.1.7 古典概率　几何概率

古典概率 $P(A)=\dfrac{A\text{所包含的样本点数}}{\text{样本空间}S\text{中所包含的样本点总数}}$

几何概率 $P(A)=\dfrac{A\text{发生的区域的“度量”}}{\text{样本空间}S\text{的“度量”}}$.

(度量或为长度、面积、体积等)

1.1.8 条件概率　乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式

(1) 条件概率　$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},P(A)>0$;

(2) 乘法公式　$P(AB)=P(B\mid A)P(A),P(A)>0$;

(3) 全概率公式

$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n)$

其中$P(B_i)>0,B_1,B_2,\cdots,B_n$为$S$的一个划分;

(4) 贝叶斯公式　$P(B_i\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{P(A)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

1.1.9　事件的独立性

若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立.

若
$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$
则称事件 A,B,C 相互独立，若前三式成立，则称事件 A,B,C 两两相互独立.

若事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

§1.2　重点难点

重点　理解随机事件的概念，掌握事件的运算及运算律；理解概率、条件概率的概念，掌握概率的性质，会计算古典概率和几何概率；掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式；理解事件的独立性的概念，掌握用事件的独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念.

难点　利用概率的性质进行推理和计算；将实际问题用事件表示；古典概率的计算.

§1.3　疑难解答

1. 如何确定随机试验的样本空间？

答　随机试验的样本空间不一定唯一. 在同一试验中，试验的目的不同时，样本空间往往是不同的. 如，将篮球运动员一次投篮作为随机试验时，若试验目的是考察命中率，则试验的样本空间为 $S_1 = \{中，不中\}$；若试验目的是考察得分情况，则试验的样本空间为 $S_2 = \{0分，1分，2分，3分\}$. 所以应从试验的目的出发确定样本空间.

2. 互逆事件与互不相容事件有何联系与区别？

答　(1) 两事件互逆，必定互不相容；但互不相容的事件未必互逆.

(2) 互不相容的概念适用于多个事件，但互逆事件只适用于两个事件.

(3) 两个事件互不相容只表明这两个事件不能同时发生，但可以都不发生. 而两个事件互逆则表示这两个事件有且仅有一个发生.

3. 两事件相互独立与两事件互不相容有何联系？

答　没有必然联系，是完全不同的概念. 两个事件 A 与 B 相互独立，其实质是事件 A 发生的概率与事件 B 是否发生没有关系. 即 $P(A) = P(A \mid B)$. 而事件 A 与事件 B 互不相容，则是指事件 A 的发生必然导致事件 B 不发生，或者说事件 A 与事件 B 不同时发生. 即 $AB = \varnothing$.

再从直观上予以解释，如图 1-1 和图 1-2 所示，都是边长为 1 的正方形. 在图 1-1

中，事件 A 表示左上角的直角三角形 $\triangle abc$，事件 B 表示右上角的直角三角形 $\triangle bdc$，由几何概率知 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，因此 A 与 B 相互独立. 但 $AB\neq\varnothing$，不是互不相容. 在图 1-2 中，A 表示右上角的直角三角形，B 表示左下角的直角三角形，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=0$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，故事件 A 与事件 B 不相互独立，而 $AB=\varnothing$，事件 A 与事件 B 互不相容.

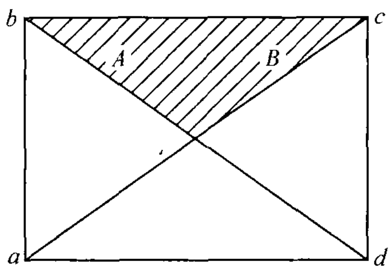

图 1-1

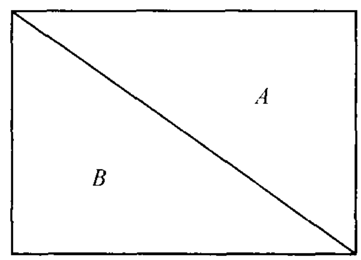

图 1-2

在 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的条件下，若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，若事件 A 与事件 B 互不相容，则 $P(AB)=0$，两个概念出现矛盾. 因此在一般情况下，事件相互独立与事件互不相容是两个互不等价，完全不同的概念.

4. 条件概率 $P(A\mid B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 有何区别与联系？

答 $P(AB)$ 表示在样本空间 S 中计算 AB 发生的概率；而 $P(A\mid B)$ 表示增加条件 B 后在缩减样本空间 S_B 中计算事件 A 发生的概率. 虽然两个都是计算事件 A,B 同时发生的概率，但其样本空间不同. 用古典概率公式，则

$$P(A\mid B)=\frac{AB\text{ 所包含的样本点数}}{S_B\text{ 中的样本点总数}}$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 所包含的样本点数}}{S\text{ 中所包含的样本点总数}}.$$

一般地说，$P(A\mid B)$ 比 $P(AB)$ 大. 而且还可以相互表出，即

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

5. 实际应用中，如何判断两事件的独立性？

答 实际应用中，对事件的独立性，常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，由试验的独立性来判断事件的独立性. 或者说根据问题的实质，直观上看一事件的发生是否影响另一事件的概率来判断. 例如，在放回抽样中，第一次抽取的结果与第二次抽取的结果是相互独立的；而在不放回抽样中是不相互独立的. 又如甲、乙两名射手在相同条件下进行射击，“甲击中目标”与“乙击中目标”是相互独立的.

6. n 个事件相互独立与 n 个事件两两独立是否一回事？

答　不是一回事，由前者可以推出后者，但反过来不行. 可以参考教材 §1.5 例 2，对于两个事件来说是一回事.

7. 全概率公式与贝叶斯公式有何联系，这两个公式反映什么样的概率问题？

答　这两个公式是计算复杂事件概率的重要工具.

全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$ 中的 A 若视为"果"，S 中的划分 B_i 视为"因"，该公式反映"由因求果"的概率问题. 该公式是根据以往信息和经验得到的，所以被称为先验概率. 而贝叶斯公式 $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{P(A)}$ 中的 $P(B_i\mid A)$ 是得到"信息"A 后求出的，称为后验概率. 该公式是"执果溯因"的概率问题.

先验概率与后验概率有不可分割的联系，后验概率的计算是以先验概率为基础的.

§1.4　习题详解

1. 设 A,B,C 为三个事件，用事件的运算关系表示下列事件：

(1) 至少有一个发生；

(2) 不多于一个发生；

(3) 不多于两个发生；

(4) 至少有两个发生；

(5) 都不发生.

解　(1) $A\cup B\cup C$；

(2) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(4) $AB\cup BC\cup AC$；

(5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

2. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.2$，求 $P(\overline{AB})$.

解　由于 $A-B=A-AB$，且 $AB\subset A$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，

于是　$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$，

因此　$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$.

3. 设 $A\subset B$，$P(A)=0.1$，$P(B)=0.5$，求 $P(AB)$，$P(A\cup B)$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解　因为 $A\subset B$，所以 $AB=A$，　$A\cup B=B$，　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$，

故　$P(AB)=P(A)=0.1$；　$P(A\cup B)=P(B)=0.5$，

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9.$$

4. 设 A,B,C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解 因为 $P(AB)=P(BC)=0$,且 $ABC\subset AB$,所以 $P(ABC)=0$,

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)\\&\quad-P(AC)+P(ABC)=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

5. 某城市的电话号码由8个数字组成,每个数字可以从0到9这10个数字中任选一个,试求电话号码是由8个不同的数字组成的概率.

解 设 $A=$“8个不同的数字组成的电话号码”

从10个数字中任选8个数字,共有 10^8 种选法. 故样本空间 S 中所包含的基本事件总数为 10^8;事件 A 所包含的基本事件数为从10个数字中任选8个不同的数字,共有 $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$ 种选法,所以

$$P(A)=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{10^8}\approx0.03629.$$

6. 一批产品共有50个,其中45个是合格品,5个是不合格品. 从这批产品中任取3个,试求其中有不合格品的概率.

解 设 $A=\{$任取的3个产品中有不合格品$\}$,则 $\overline{A}$ 表示取出的3个产品中无不合格品,从50个产品中任取3个,共有 $\binom{50}{3}$ 种选法;从45个合格品中任取3个,有 $\binom{45}{3}$ 种选法,故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{3}}\approx0.28.$$

7. 袋中有5个红球,6个黑球,8个白球. 现从袋中任取3个球,按下面两种方式分别求取出的球颜色相同的概率.(1) 放回抽样;(2) 不放回抽样.

解 设 $A=$“取出的球颜色相同”,$B_1=$“取出红色球”,$B_2=$“取出黑色球”,$B_3=$“取出 白色球”.

(1) 放回抽样:从19个球中取出3个红球的概率为 $P(B_1)=\left(\frac{5}{19}\right)^3$;3个黑球的概率为 $P(B_2)=\left(\frac{6}{19}\right)^3$;3个白球的概率为 $P(B_3)=\left(\frac{8}{19}\right)^3$,故取出的3个同色球的概率为

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\left(\frac{5}{19}\right)^3+\left(\frac{6}{19}\right)^3+\left(\frac{8}{19}\right)^3=0.2305.$$

(2) 不放回抽样:从19个球中取出3个红球的概率为 $P(B_1)=\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{19}{3}}$;3个黑球的

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com