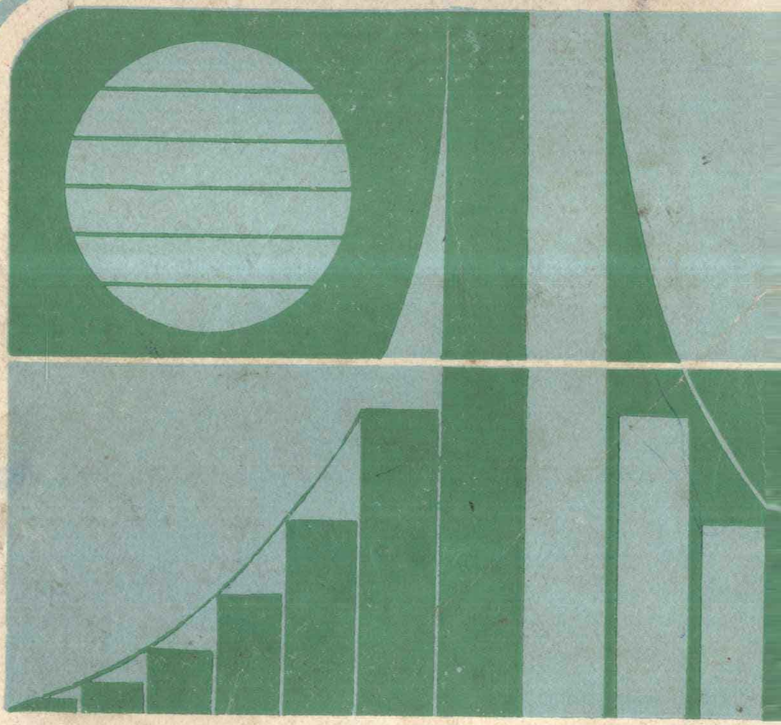
《中学课程课外读物》

北京市海淀区教师进修学校主编

高三微积分初步

自学解难



重庆出版社　　华夏出版社

中学课程课外读物

高三微积分初步

自学解难

附答案与提示

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社　华夏出版社

一九八七年·重庆

责任编辑　赵　剑

高三微积分初步自学解难

重庆出版社　华夏出版社　出版
新华书店重庆发行所发行　重庆印制第一厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　　印张 7　　字数 160 千
1987年7月第一版　　1987年7月第一版第一次印刷
印数：1—200,000

*

ISBN 7-5366-0092-5

G·62

书号：7114·592　定价：0.97 元

前　　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和初、高中学生更好地掌握中学课程内容并提高他们的文化科学知识水平，由部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员，编写了这套《中学课程课外读物》丛书，它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物等学科。

编写时，我们注意依据教学大纲，紧密结合教材，力求体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开阔视野，启迪思维，开发智力，培养能力，使丛书成为中学生和知识青年的具有针对性、启发性、实用性的读物，成为家长指导和检查学生学习的助手，并可供教师备课时参考。

数学部分，每讲包括四节：系统与结构，理解与思考，方法与能力，回味与引申。

系统与结构，是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重难点进行了较详细的讲述。同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力，一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另方面通过对综合性较强的例题的剖析，加强了能力的培养。这一部分之后，配备了A，B两组练习题，供不同水平的读者选用。此外，还编拟了一份自测题并给出了答案，以便自学的读者自我检查。

回味与引申，想通过这部分对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思想方法上给以指点。

本书编写者：

北京石油学院附中　　薛文叙
北京矿业学院附中　　李公月
北京清华大学附中　　孔令颐
北京市123中学　　陈颖
北京市海淀区教师进修学校　　张士充　嵇燕竹

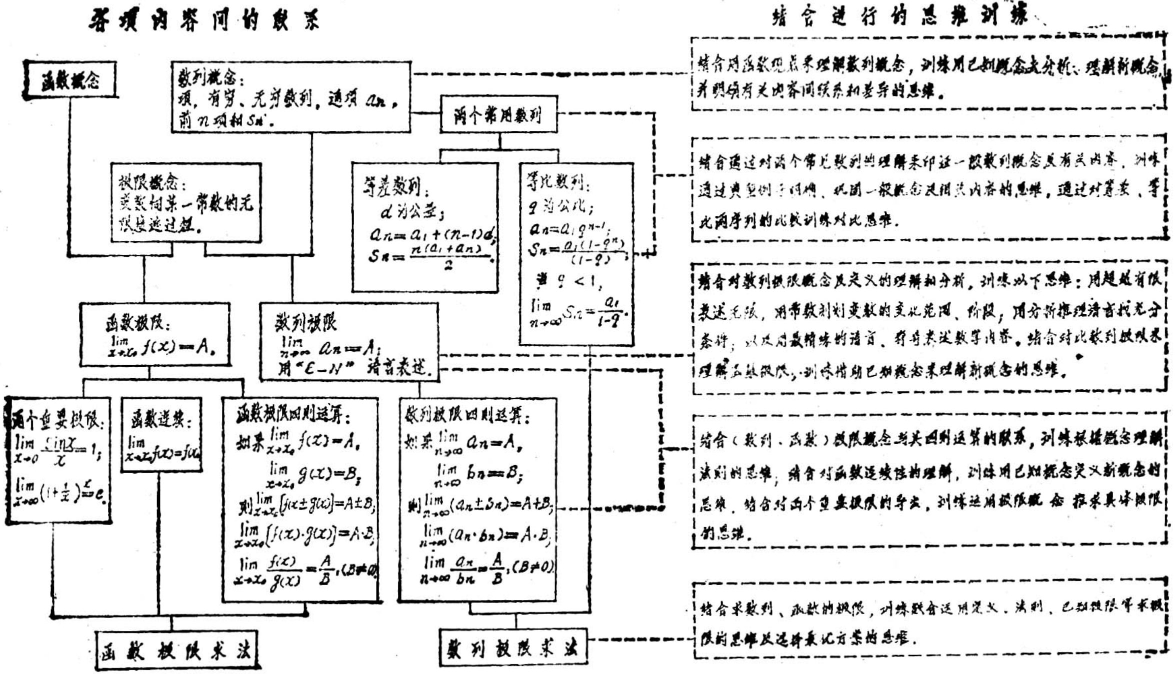
由于编者水平有限，书中如有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

目　录

第一讲　极限和连续

一、系统与结构



[**说明**]

（1） 本讲内容作为一个系统总体，在结构上包含三个子系统：①数列概念及两个常用数列；②数列极限概念及其运算法则和求法；③函数极限概念及其四则运算和求法。在结构中，第二子系统为主干；在第一子系统中引进数列及有关概念，介绍等差、等比两类常用数列及它们的性质，为第二子系统作必要的准备；第三子系统，则是以在第二子系统中初步介绍的极限思想为基础，对比地介绍相应概念、法则和方法。学习中要注意前一子系统中信息向后一子系统的输送，形成正迁移；在后面子系统中则要对前者进行及时反馈，以达到深化、巩固。

（2） 在本讲中，初次遇到用逻辑语言和符号表述无限过程的思维训练，它不可能一次完成，要在以后几讲中反复进行。这是本讲作为全书五系统之首，与其它四系统间的主要思维联系之一。

（3） 本讲中突出两类思维训练：明确各概念间的导出关系和相互联系；理解如何以概念定义为根据，推演出定理法则及具体方法。这两类训练，要结合对具体内容的理解与思考来进行。

二 理解与思考

从本讲开始，中学数学进入到学习微积分初步知识的阶段。

微积分学是高等数学的基础，它在学习其他自然科学和许多社会科学以及掌握现代生产技术等方面有着极为广泛的应用。

开始学习微积分，首先应该注意到：微积分学一般是以极限为基本工具研究函数的微分与积分理论及应用的一门数学学科。这就是说，微积分学与初等数学的研究方法不同，它用极限运算作为基本工具，而极限运算与读者所熟悉的加、减、乘、除、乘方、开方等代数运算有所不同。微积分研究的对象虽然还是函数，但因为研究函数的方法发生了质的变化，使得以前不能解决的一些数学问题有了解决的可能。

学习这一讲，要注意极限的概念、极限的运算、函数的连续性等微积分的基础知识。其中极限和连续两个概念，求极限的方法是重点，极限概念又是难点。

学习这一讲，除了要把基本概念与有关知识学好，还要掌握用极限来研究问题的思想方法。

下面就这些内容进行一些简要的分析。

1. 极限概念

极限概念是微积分中最基本最重要的概念。微积分中几乎所有的基本概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来定义的。

函数在变化过程中，由于自变量的变化方式有两大类：以离散方式，跳跃地进行变化或连续地进行变化。极限也分为两种类型：数列的极限和函数的极限。从历史上看，研究数列的极限要早，并且前者又是后者的基础。我们先分析数列的极限。

（1） 数列的极限

这部分知识有两个要点：用“ε-N”语言来表达数列极限的定义；数列极限的几何意义。

数列极限是中学数学的大难题之一。难在什么地方呢？

第一，研究的问题由“有限”发展到“无限”；第二，用静态的极限定义描述动态的极限过程；第三，思维的形式从具体过渡到抽象。为了突破难点，在学习过程中，要注意以下几点：

① 明确“数列的极限”是表述“无限”思想的一个崭新的课题。

数列的极限的观念起源于解决“有限”与“无限”的矛盾问题。人们认识自然界是从“有限”开始的，随着生产和科学的发展，又要求大量地解决“无限”的问题。例如人们研究数列时，前n项的情况可以一项项地观察，但是当n无限增大，即项数无限增多时，数列的情况无法逐项观察得出，只能根据有限项的情况去推理判断。这是和初等数学完全不同的一种崭新的方法。即“极限方法”。但是由于初学者不熟悉这种方法，在研究数列时，还想追究或找出无限项a_1，a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1}，…，a_{n+m}，…的“尽头”或“最后”一项，这会使对极限概念的理解走入歧途。

② 数列极限的概念和定义

“数列$\{a_n\}$的极限是A”这个概念可以粗略的解释为：“当序数n无限增大时，变量a_n无限接近于常数A。”这里我们对用语“无限接近”解释一下：接近是说a_n在数轴上所对应的点与A所对应点之间，有一个不大的确定的距离，若从数值关系上看，如有$|a_n-A|<0.01$，即是对一个具体的接近（程度）的表述；无限接近，则既不是一个具体的接近，也不是一系列有限多次（不论怎样多）越来越近的接近，而是由无限多次具体接近所构成的一个特定的过程。正是因为对这个过程尚未确切说明，所以上述概念是粗略的。（在这里，我们没有用“无限趋近”的说法，是因为无限趋近、趋近、趋

向这几个概念易于混淆。有些书常用趋近代替无限趋近，与定义中说的“趋近”的意义不同。为了避免相混，我们认为定义中的“趋近”改为“接近”为宜。）

怎样严格地描述“数列的极限”呢？这就需要用“ε-N”语言把这个无限接近过程，与作为它的条件的另一过程——序数n无限增大的过程联系起来，作出确切的表述。

定义对于一个无穷数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数A，无论预先指定多么小的正数ε，都能在数列中找到一项a_N，使得这一项后面所有的项与A的差的绝对值都小于ε（即当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立），就把常数A叫做数列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A.$$

上述定义可以简述为

任意给定$\varepsilon>0$，如果总存在自然数N，使得当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，就说数列$\{a_n\}$的极限是A。

这个定义还可以用记号表示为

$$\begin{array}{c} |a_n-A|<\varepsilon \\ \nwarrow \qquad \swarrow \\ n>N \end{array}$$

怎样理解这个定义呢，我们体会，简述定义共有四小段话。首末两小段：“任意给定$\varepsilon>0$，…，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”表明$\{a_n\}$的项与A要多接近有多接近。确切地说，就是达到超越任意提出的（一切有限）接近要求的程度。从而表达了无限（即超越一切有限）接近的确切含意。中间两段话：“如果总存在自然数N，使得当$n>N$时，…”，则是说明上述无限接近过程与其条件“n无限增大”过程的具体联系：当n在其增大过程中到达由某一N划分的阶段，即$n>N$

后，能保证 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，即保证$\{a_n\}$对A的接近超越由给定的ε而提出的接近要求；同时由于ε是任意给定的，所以$|a_n-A|<\varepsilon$就更代表超越任意提出的接近要求，即是无限接近；如果对任意给定的ε总存在保证上述要求的N，则说明$\{a_n\}$对A的无限接近是有保证的，即$\{a_n\}$以A为极限。

以上是对定义的主要思想内容的分析。为精确地理解这些思想，还需要对关键字词和符号作仔细的分析。首先$|a_n-A|<\varepsilon$中的"$<$"号，表述前面分析中超越一词，若改用"$=$"则表述达到而并未超越，不超越（一切）有限，就不是无限。其次，"不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立"中的恒字，是指对于一切a_{N+1}，a_{N+2}，…，等，不等式都无例外的成立，这才叫做$\{a_n\}$对A的接近。再次"任意给定$\varepsilon>0$，如果总存在自然数N，…"两句话中，"任意给定"与"总存在"相呼应，是说明对任意提出的接近要求都有相应的N作保证，才使得$\{a_n\}$对A的无限接近成立。

要再深入一步理解定义，还要对定义中的常数ε、N和变数n、a_n及它们之间的关系进行分析。

1° ε是常数，又是任意常数。它是常数，才能通过它提出具体的接近要求；它又是任意常数，才又能通过它提出任意的接近要求。

2° N是常数，又是与ε相应的常数。是先给定ε，然后看相应的N是否存在。那么对于可以任意给定的ε，就须看是否总有相应的N存在。

3° 常数ε与变数a_n通过不等式$|a_n-A|<\varepsilon$相联系，ε起了限定$\{a_n\}$与A的接近程度的作用；常数N与变数n通过不等式$n>N$相联系，N起了限定n的取值范围，从而划分a_n变化阶段的作用；于是，把联系两个常数和两个变数的两个不等

式再联系起来，"当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立"就表明由N划出的a_n的变化阶段，来保证由预先给定的ε提出的，$\{a_n\}$对A的接近要求的超越。由于N起的是保证作用，所以对于给定的ε，它不是唯一的；例如，如N能保证不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，显然$N+1$，$N+2$，…等也都能满足保证该不等式成立的要求。

此外，关于用绝对值不等式$|a_n-A|<\varepsilon$表述$\{a_n\}$对A接近的含义，可参看下面对极限概念作几何解释的部分。

③ 极限的几何意义

用几何形象来描绘"当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立"的含义有助于对它的理解。这句话的描述是：不论开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）多么"小"，一旦取定后，数列a_n除有限项$a_1,a_2,a_3,\cdots$，a_N，外，其余的一切项a_{N+1}，a_{N+2}，…，a_{N+m}，…，全部进入此开区间，而与变数a_n在A附近的变化情况无关。如图1-1所示：

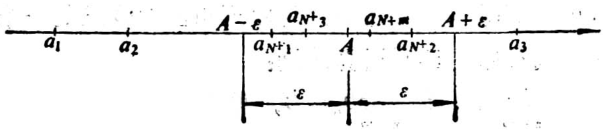


图 1-1

形象地说，我们把（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）比作一个在A处任意缩小的口袋，数列$\{a_n\}$的尾巴a_{N+1}，a_{N+2}，…，a_{N+m}，…全部跑进这小口袋不再出来。如果把这种情形称为数列最终地在开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）内，那么$a_n\to A$的几何特征是：不论正数ε如何小，$\{a_n\}$必最终地在开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）内。

④ 发散数列的两种重要情况。

我们知道，有极限的数列叫做收敛数列。还有许多数列没有极限，没有极限的数列叫做发散数列。如数列$\{n\}$和$\{n^2\}$都是无限增大而不趋近于任何常数的发散数列。还有一种情况，如数列$\{1+(-1)^n\}$永远在2和0间反复跳动，它的奇数项若看作一个数列（常数数列）可认为有极限0；偶数项单看作一个数列有极限2，而原数列却没有极限因而为发散的。

（2） 函数的极限

由于自变量变化的过程不同，存在两种不同类型的函数极限。一种是自变量x的绝对值无限增大，即$x\to+\infty$或$x\to-\infty$或$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限；另一类型是x无限趋近于常数x_0，即当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限。对这两种类型的函数极限，只要求结合图形和实例，对比数列极限，有个正确的直观的理解。

2. 极限的四则运算法则

运用法则时应注意之点，对数列和函数极限是一样的。以下是数列极限的四则运算法则：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}(b_n\neq0,\ B\neq0).$$

在使用它们时，要特别注意各个法则成立的条件。

（1） “两数列和、差或积的极限等于各数列极限的和、差或积”，只有当两数列各自都有极限时才能成立。如$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-1}$就是错误的，因

为当$n\to\infty$时，$\{\sqrt{n}\}$和$\{\sqrt{n-1}\}$的极限都不存在，就不能用此法则。正确的作法是$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0.$$

（2） 极限的运算法则，仅可以推广到有限个数列。下面又是一个读者经常出现的错误。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+0+\cdots+0=0.$$

由于当$n\to\infty$时，和$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$有无限多项，上式中第二步错在把法则用于无限多项和了。正确的作法是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

同样，积的极限运算法则，也是仅可推广到有限个数列。

（3） 求两个数列商的极限，必须两数列的极限都存在，且分母数列的极限不为零。如