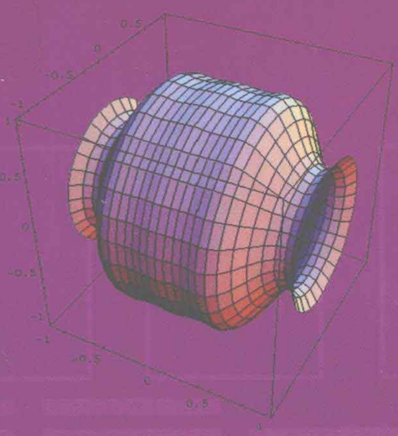
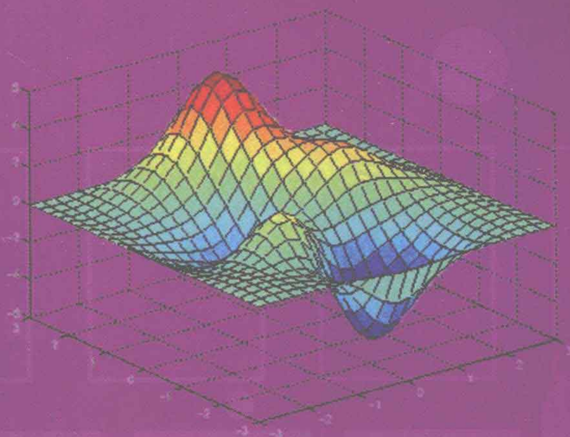


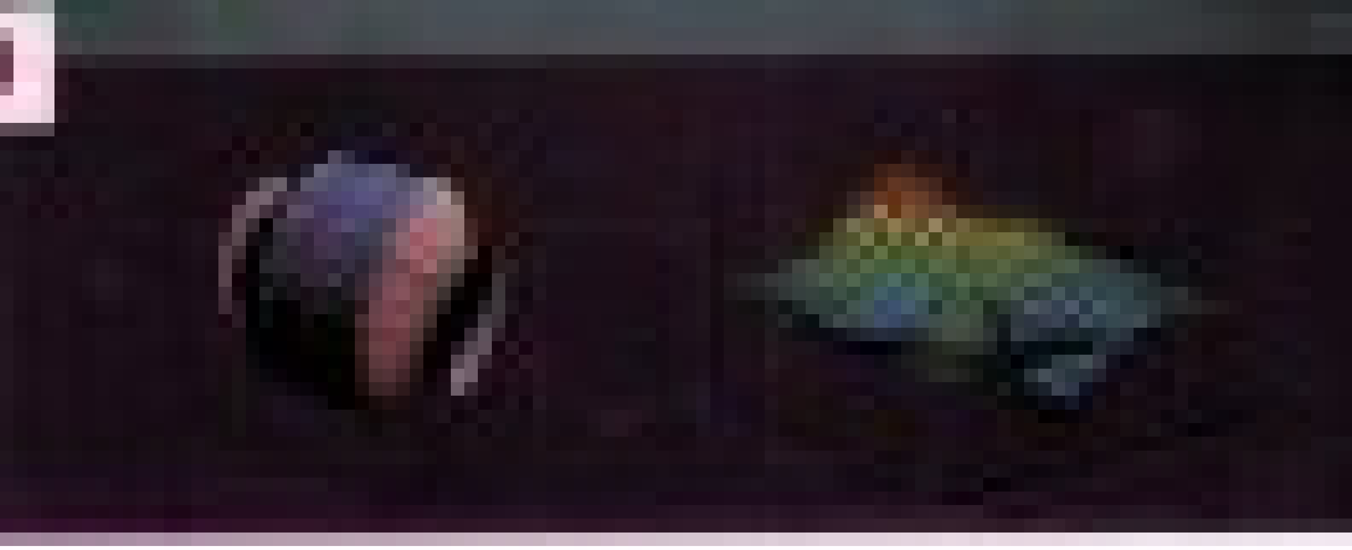


普通高等学校“十二五”规划教材

# 运筹学

王春华　陈海杰　主　编
魏云超　刘明华　副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE



# 运筹学

普通高等学校“十二五”规划教材

# 运　筹　学

王春华　陈海杰　主　编
魏云超　刘明华　副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

## 内 容 提 要

本书是作者根据多年运筹学教学经验，针对经济、管理类学科对运筹学的需求编写而成的。本书的主要特色是：由实例出发，引入运筹学的基本概念，使读者更容易理解运筹学的理论方法；注重理论与实际问题的结合，使读者在做中学，学中悟；每章内容都与 WinQSB 软件组结合，用软件解决实际问题，避免了繁杂的数学运算。全书内容共 6 章，分别是线性规划及单纯形法、对偶理论、目标规划、整数规划、运输问题、图与网络规划，每章均附有适量习题以巩固所学知识，并在书后提供详细习题答案。

本书适合作为高等院校经济、管理类学科的运筹学教材，也适合对运筹学感兴趣的读者自学参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学/王春华，陈海杰主编. —北京：中国铁道出版社，2010. 8

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-11665-1

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①王… ②陈… Ⅲ. ①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164899 号

**书　　名：运筹学**
**作　　者：** 王春华　陈海杰　主编

---

**策划编辑：** 祁　云　路　璐
**责任编辑：** 李小军　　**读者热线电话：** 400-668-0820
**助理编辑：** 何　佳
**封面设计：** 付　巍　　**封面制作：** 李　路
**责任印制：** 李　佳

---

**出版发行：** 中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054)
**印　　刷：** 三河市华丰印刷厂
**版　　次：** 2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月第 1 次印刷
**开　　本：** 787mm×1092mm　1/16　**印张：** 11.5　**字数：** 281 千
**书　　号：** ISBN 978-7-113-11665-1
**定　　价：** 26.00 元

---

# 前　言

运筹学是20世纪30年代末诞生并逐步发展起来的一门应用性科学，它是根据实际问题，利用科学的方法，特别是数学的方法，在建立模型的基础上，解决有关人力、物资、货币等复杂系统的运行、组织、管理等方面有关课题的学科。运筹学已成为经济管理类专业普遍开设的一门重要专业基础课。

本书的宗旨是适应经济管理运筹学人才对运筹学教学的一般需求，根据第一线教师对学生各方面的了解，做到既反映运筹学的发展，又能深入浅出地讲清运筹学的基本概念、理论和方法，以及推广软件的应用，使学生能熟练应用于实践中。本书主要对象是经济管理专业的大学本科学生，并且对实用性不大的内容进行了删减，删减的内容希望学生能在本书学习的基础上日后根据实际情况进行自学。

本书内容包括：绪论，线性规划及单纯形法，对偶理论，目标规划，整数规划，运输问题，图与网络规划。

本书是由第一线工作的、已从事运筹学教学10多年至30多年的教师编写的，由王春华、陈海杰任主编，刘明华、魏云超任副主编。其中第1、2章由陈海杰编写，第3、4章由刘明华编写，第5章由王春华编写，第6章由魏云超编写，软件操作部分由陈海杰完成。一本好的教材，重在特色，贵在质量。为此需要不断磨砺，反复修改提高。鉴于编者水平有限，书中不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2010年8月

于上海海洋大学

# 目　录

# 绪 论

运筹学是20世纪30年代末诞生并逐步发展起来的一门应用性学科,它是根据实际问题,利用科学的方法,特别是数学的方法,在建立模型的基础上,解决有关人力、物资、货币等复杂系统的运行、组织、管理等方面有关课题的学科.

运筹学一词的英文名称是 Operations Research(美)或 Operational Research(英),缩写为O. R.,原意为"作战研究",它是1938年英国空军为了研究诸如雷达和新型作战飞机等而建立的组织名称.在第二次世界大战期间盟军中同类组织不断增加和扩大,其所建立起来的方法在战后被转移到民用事业中去,从而 O. R. 一词的含义不再局限于军事方面.

运筹学是 O. R. 的意译,取自成语"运筹帷幄之中,决胜千里之外",具有运用筹划、出谋献策、以策略取胜之意,它恰当地反映了这门学科的性质和内涵.

要掌握好运筹学方法并灵活地应用于实践,除了要掌握丰富的自然科学和社会科学的知识外,还需要掌握一定的数理基础方法,在此基础上系统地分析问题,使研究的对象得到最优或最满意的效果.

例如,企业在编制年度计划时,第一步,收集产品上市场需求量、竞争对手的情况、国内外经济政策环境、利率变化、环境保护等外部信息,掌握企业内部的技术力量、设计能力、生产能力和资源分布等资料;第二步,通过分析和整理得到的外部信息和内部资料,制定企业的预定目标,建立产品与资源消耗的关系表达式(即数学模型),充分利用企业资源,使得企业得到最大或较大的收益;第三步,运用数学方法求解数学模型,得到产品的生产量、资源消耗量和收益等理论值;第四步,分析并运用所求结果,在计划的实施过程中进行有效的监督、控制和调整,尽可能达到预期目标.由此可以看出,要编制出一个合理优秀的计划,需要多学科的知识并运用系统的方法.运筹学方法则贯穿上述四个步骤的全过程,即

收集资料 → 建立模型 → 寻求解法 → 方案实施

许多学生喜欢运筹学在经济、管理方面运用的思路和方法,同时又畏惧运筹学繁杂的数学计算,尤其是规划论部分和大型模型,为此我们编写此教材.本书的基本特色:

(1)由实例出发,引入运筹学的基本概念、基本内容,使得学生比较容易理解运筹学的基本理论与方法;

(2)注重理论与实际相结合.例题尽可能将经济和管理的实际背景相联系,让学生在做中学,学中悟;

(3)介绍软件操作,通过 WinQSB 向学生演绎用单纯形法求解线性规划的迭代原理及其他原理,使得同学们能在掌握了基本概念、基本理论后,用计算机求解问题,避免了繁杂的数学计算.

# 第 1 章　线性规划及单纯形法

## ■ 引例

**例 1.1**　工厂每月生产 A、B、C 三种产品，单件产品的原材料消耗量、设备（台时）消耗量、资源限量及单件产品利润如表 1-1 所示.

**表 1-1**

| 资源＼产品 | A | B | C | 资源限量 |
|---|---|---|---|---|
| 材料(kg) | 1.5 | 1.2 | 4 | 2500 |
| 设备(台时) | 3 | 1.6 | 1.2 | 1400 |
| 利润(元/件) | 10 | 14 | 12 | |

根据市场需求，预测 A、B 产品最低月需求量分别是 150、260，最高月需求是 250、310，C 产品最高月需求是 130. 企业决策者应如何安排生产计划，使企业每月利润最大.

**解**　这是一个规划问题，用数学语言描述：设 $x_1, x_2, x_3$ 分别为产品 A、B、C 的产量，产量非负，所以 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$，企业的目标是要使每月利润最大，用 $Z$ 表示企业每月利润，则 $Z=10x_1+14x_2+12x_3$ 称为目标函数. 产品生产得越多，获利就越多，但产量要受到设备与生产能力的限制，这种限制就是约束条件. 因材料的总消耗量不能超过总供应量，故应有 $1.5x_1+1.2x_2+4x_3 \leqslant 2500$，类似设备也有限制 $3x_1+1.6x_2+1.2x_3 \leqslant 1400$，同时由市场需求得 $150 \leqslant x_1 \leqslant 250, 260 \leqslant x_2 \leqslant 310, x_3 \leqslant 130$.

根据题意，求解在约束条件

$$\begin{cases} 1.5x_1+1.2x_2+4x_3 \leqslant 2500 \\ 3x_1+1.6x_2+1.2x_3 \leqslant 1400 \\ 150 \leqslant x_1 \leqslant 250 \\ 260 \leqslant x_2 \leqslant 310 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 130 \end{cases}$$

下，目标函数 $Z=10x_1+14x_2+12x_3$ 的最大值问题.

在生产和经营管理等工作中，经常会遇到同上例类似的计划或规划问题. 例如，城市的规划，投资，生产计划和库存控制，人力规划和排序等，虽然各行各列的规划内容各不相同，但均可归结为：在现有的资源条件限制下，如何确定方案，使预期目标达到最优；或为了达到预期的目标，如何确定方案，使资源消耗最少. 用数学语言描述：它是研究在给定的约束条件下，求所得的目标函数的**极（最）大值**(max)或**极（最）小值**(min).

本章着重介绍线性规划(Linear Programming，缩写为 LP)模型的建立与计算，纲要如下：

1. 介绍线性规划模型的建立；
2. 求解二维变量线性规划模型的图解法（图解法有助于了解线性规划的基本概念的框架）；
3. 线性规划的基本概念及原理；

4. 详细论述求解一般线性规划问题的单纯形法；

5. 介绍软件包 WinQSB 规划求解，用它来求解课文中的模型，这使得反复重复计算的单纯形法变得简单，同时通过显示单纯形法迭代过程使得你能了解单纯形法的原理.

# 1.1 线性规划的数学模型

## 1.1.1 应用模型

**例 1.2** 配料问题. 某钢铁公司生产一种合金，要求的成分规格是：锡不少于 28%，锌不多于 15%，铅恰好 10%，镍要界于 35%～55%之间，不允许有其他成分. 钢铁公司拟从五种不同级别的矿石中进行冶炼，每种矿物的成分含量和价格如表 1-2 所示. 矿石杂质在冶炼过程中废弃，现要求每吨合金成本最低的矿物数量. 假设矿石在冶炼过程中，合金含量没有发生变化.

表 1-2 矿石的金属含量

| 矿石 \ 合金 | 锡，% | 锌，% | 铅，% | 镍，% | 杂质，% | 费用，元/t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 10 | 10 | 25 | 30 | 340 |
| 2 | 40 | 0 | 0 | 30 | 30 | 260 |
| 3 | 0 | 15 | 5 | 20 | 60 | 180 |
| 4 | 20 | 20 | 0 | 40 | 20 | 230 |
| 5 | 8 | 5 | 15 | 17 | 55 | 190 |

**解** 设 $x_j(j=1,2,\cdots,5)$是第 $j$ 种矿石数量，根据题意由表 1-2 知求在条件

$$\begin{cases} 0.25x_1+0.4x_2+0.2x_4+0.08x_5\geqslant 0.28 \\ 0.1x_1+0.15x_3+0.2x_4+0.05x_5\leqslant 0.15 \\ 0.1x_1+0.05x_3+0.15x_5=0.1 \\ 0.35\leqslant 0.25x_1+0.3x_2+0.2x_3+0.4x_4+0.17x_5\leqslant 0.55 \\ 0.7x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.8x_4+0.45x_5=1 \\ x_j\geqslant 0, j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

下 $Z=340x_1+260x_2+180x_3+230x_4+190x_5$ 的最小值.

注意：矿石在实际冶炼时金属含量会发生变化，建模时应将这种变化考虑进去，有可能是非线性关系. 配料问题也称配方问题、营养问题或混合问题，在许多行业生产中都能遇到.

例 1.1、例 1.2 中的 $x_j$ 称为**决策变量**，不等式组称为**约束条件**，函数 $Z$ 称为**目标函数**，随着讨论的问题的要求不同，求 $Z$ 的最大值(例 1.1)或求 $Z$ 的最小值(例 1.2).

完整的例 1.1 模型是

$$\max Z=10x_1+14x_2+12x_3,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}1.5x_1+1.2x_2+4x_3\leqslant 2500\\3x_1+1.6x_2+1.2x_3\leqslant 1400\\150\leqslant x_1\leqslant 250\\260\leqslant x_2\leqslant 310\\0\leqslant x_3\leqslant 130\end{cases}.$$

例 1.2 模型是

$$\min Z=340x_1+260x_2+180x_3+230x_4+190x_5,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}0.25x_1+0.4x_2+0.2x_4+0.08x_5\geqslant 0.28\\0.1x_1+0.15x_3+0.2x_4+0.05x_5\leqslant 0.15\\0.1x_1+0.05x_3+0.15x_5=0.1\\0.25x_1+0.3x_2+0.2x_3+0.4x_4+0.17x_5\leqslant 0.55\\0.25x_1+0.3x_2+0.2x_3+0.4x_4+0.17x_5\geqslant 0.35\\0.7x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.8x_4+0.45x_5=1\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,5\end{cases}.$$

由上可知线性规划的数学模型由三个基本部分组成：

1)需要确定的**决策变量**；

2)需要优化(求极大或求极小)的**目标函数**；

3)必须满足的**约束条件**.

确定决策变量是模型建立过程中关键的第一步，一旦决策变量确定了，构造目标函数和约束条件就容易了.

**例 1.3** 美佳公司计划制造Ⅰ，Ⅱ两种家电产品.已知各制造一件产品时分别占用的设备A,B的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况，如表1-3所示.该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润为最大？

**表 1-3**

| 项　目 | Ⅰ | Ⅱ | 每天可用能力 |
|---|---|---|---|
| 设备 A(h) | 0 | 5 | 15 |
| 设备 B(h) | 6 | 2 | 24 |
| 调试工序(h) | 1 | 1 | 5 |
| 利润(元) | 2 | 1 | |

**解** 设 $x_1,x_2$ 分别表示美佳公司制造Ⅰ，Ⅱ两种家电产品的数量，得到下列线性规划模型：

目标函数：

$$\max Z=2x_1+x_2,$$

约束条件：

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2\leqslant 15\\6x_1+2x_2\leqslant 24\\x_1+x_2\leqslant 5\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}.$$

**例 1.4** 投资问题.某投资公司在第一年有 200 万元资金，每年都有如下的投资方案可供考虑采纳："假使第一年投入一笔资金，第二年又继续投入此资金的 50%，那么到第三年就可回收第一年投入资金的一倍金额."投资公司决定最优的投资策略使第六年所掌握的资金最多.

**解** 设 $x_1$ 为第一年投资；$x_2$ 为第一年保留资金；$x_3$ 为第二年新投资；$x_4$ 为第二年保留资金；$x_5$ 为第三年新投资；$x_6$ 为第三年保留资金；$x_7$ 为第四年新投资；$x_8$ 为第四年保留资金；$x_9$ 为第五年保留资金.

第一年：$x_1+x_2=200$(万元)， 第二年：$\frac{x_1}{2}+x_3+x_4=x_2$，

第三年：$\left(\frac{x_3}{2}+x_5\right)+x_6=x_4+2x_1$， 第四年：$\left(\frac{x_5}{2}+x_7\right)+x_8=x_6+2x_3$，

第五年：$\left(\frac{x_7}{2}+x_9\right)=x_8+2x_5$.

到第六年实有资金总额为 $x_9+2x_7$.

整理后得到下列线性规划模型.

目标函数：
$$\max Z=2x_7+x_9,$$

约束条件：
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2=200\\x_1-2x_2+2x_3+2x_4=0\\4x_1-x_3+2x_4-2x_5-2x_6=0\\4x_3-x_5+2x_6-2x_7-2x_8=0\\4x_5-x_7+2x_8-2x_9=0\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,9\end{cases}.$$

最优解(可用 WinQSB 求解)及含义解释如表 1-4 所示.

**表 1-4**

| 解 | 含义解释 |
|---|---|
| $Z=416.26$ | 第六年所掌握的资金为 416.26 万元，净利润 216.26 万元，收益率 108.13% |
| $x_1=55.2846$ | 第一年投资 55.2846 万元 |
| $x_2=144.7154$ | 第一年保留资金 144.7154 万元 |
| $x_3=117.0731$ | 第二年新投资 117.0731 万元 |
| $x_4=0$ | 第二年保留资金 0(第二年将第一年保留资金 144.7154 万元全部投资) |
| $x_5=52.0325$ | 第三年新投资 52.0325 万元 |
| $x_6=0$ | 第三年保留资金 0(第三年将第一年投入资金的收益全部投资) |
| $x_7=208.1301$ | 第四年新投资 208.1301 万元 |
| $x_8=0$ | 第四年的保留资金 0(第四年将第二年投入资金的收益全部投资) |
| $x_9=0$ | 第五年的保留资金 0 |

### 1.1.2 线性规划的一般模型

一般，假设线性规划数学模型中，有 $m$ 个约束，有 $n$ 个决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，目标函数的变量系数用 $c_j$ 表示，$c_j$ 称为**价值系数**. 约束条件的变量系数用 $a_{ij}$ 表示，$a_{ij}$ 称为**工艺系数**. 约束条件右端的常数用 $b_i$ 表示，$b_i$ 称为**资源限量**. 则线性规划数学模型的一般表达式可写成

$$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\end{cases}.$$

为了书写方便,上式也可写成:

$$\max(\min)Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i & i=1,2,\cdots,m\\x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}.$$

实际中一般 $x_j\geqslant 0$,但有时 $x_j\leqslant 0$ 或 $x_j$无符号限制.

## 习题 1.1

1. 某企业生产 3 种产品甲、乙、丙,产品所需的主要原料为 A 和 B 两种,每单位原料 A 可生产产品甲、乙、丙分别为 12、18、16 个;每个产品甲、乙、丙需要原材料 B 分别为 13kg、8kg、10kg,设备生产用时分别为 10.5、12.5、8 台时,每个产品利润分别为 1 450 元、1 650 元、1 300 元.按月计划,可提供的原料 A 为 20 个单位,原料 B 为 350kg,设备正常的月工作时间为 3 000 台时.建立实现总利润最大化的数学模型.

2. 某公司受人委托,准备用 120 万元投资 A 和 B 两种基金,其中 A 基金的单位投资额为 50 元,年回报率为 10%,B 基金的单位投资额为 100 元,年回报率为 4%.委托人要求在每年的年回报金额至少达到 6 万元的基础上要求投资风险最小.据测定每单位 A 基金的投资风险指数为 8,每单位 B 基金的投资风险指数为 3,风险指数越大表明投资风险越大.委托人要求在基金 B 中的投资额不少于 30 万元.列出下列问题的线性规划模型:

(1)为了使总的投资风险指数最小,该公司应该在基金 A 和 B 中各投资多少单位?

(2)为了使总的投资回报额金额最大,应该如何投资?

3. 某昼夜服务的公交线路每个时间段内所需司机和乘务员如下表所示:

| 班次 | 时间 | 所需人数 | 班次 | 时间 | 所需人数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6:00～10:00 | 60 | 4 | 18:00～22:00 | 50 |
| 2 | 10:00～14:00 | 70 | 5 | 22:00～2:00 | 20 |
| 3 | 14:00～18:00 | 60 | 6 | 2:00～6:00 | 30 |

设司机和乘务员分别在各时间段一开始上班,并连续工作八小时,问该公交线路至少配备多少名司机和人员?列出这个问题的线性规划模型.

4. 某投资人现有下列四种投资机会,三年内每年年初都有 3 万元(不计利息)可供投资:

方案一:在三年内投资人应在每年年初投资,一年结算一次,年收益率是 20%,下一年可

继续将本息投入获利；

方案二：在三年内投资人应在第一年年初投资，两年结算一次，收益率是 50%，下一年可继续将本息投入获利，这种投资最多不超过 2 万元；

方案三：在三年内投资人应在第二年年初投资，两年结算一次，收益率是 60%，这种投资最多不超过 1.5 万元；

方案四：在三年内投资人应在第三年年初投资，一年结算一次，年收益率是 30%，这种投资最多不超过 1 万元.

投资人应采用怎样的投资决策使三年的总收益最大，建立数学模型.

5. 捷运公司在下一年度的 1～4 月的 4 个月内拟租用仓库堆放物资. 已知各月份所需仓库面积列于表 1. 仓库租借费用随合同期而定，期限越长，折扣越大，具体数字见表 2. 租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限. 因此该厂可根据需要，在任何一个月初办理租借合同. 每次办理时可签一份合同，也可签若干份租用面积和租借期限不同的合同，试建立数学模型，使该公司签订租借合同租借费用最小.

**表 1**

| 月　份 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 所需仓库面积 | 15 | 10 | 20 | 12 |

**表 2**

| 合同租借期限 | 1 个月 | 2 个月 | 3 个月 | 4 个月 |
|---|---|---|---|---|
| 合同期内的租费 | 2 800 | 4 500 | 6 000 | 7 300 |

## 1.2　图解法

对于线性规划数学模型中只有两个决策变量的问题，可以通过在平面上作图的方法求解，此称为**图解法**.

图解法的步骤：

1. 求可行解集合. 分别求出满足每个约束的区域，其交集就是**可行解集合**，或称为**可行域**.

2. 绘制目标函数图形.

3. 求最优解. 依据目标函数求最大或最小移动目标函数直线，直线与可行域相交的点对应的坐标就是最优解.

**例 1.5**　图解法求解例 1.3 线性规划模型.

$$\max Z=2x_1+x_2,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2\leqslant 15 & (1.3\text{a})\\ 6x_1+2x_2\leqslant 24 & (1.3\text{b})\\ x_1+x_2\leqslant 5 & (1.3\text{c})\\ x_1,x_2\geqslant 0 & (1.3\text{d})\end{cases}.$$

(1) 求可行解集合. 令约束条件为等式，得三条直线，在第一象限画出满足三个不等式的区域，其交集就是可行解集合或称可行域，如图 1-1 所示.

(2) 绘制目标函数图形. 由于 $Z$ 是一个要优化的函数值，随 $Z$ 的变化，$x_2=-2x_1+Z$ 是斜率为 $-2$ 的一族平行的直线，如图 1-2 所示，图中向量 $\boldsymbol{P}$ 代表目标函数 $Z$ 的增大方向.

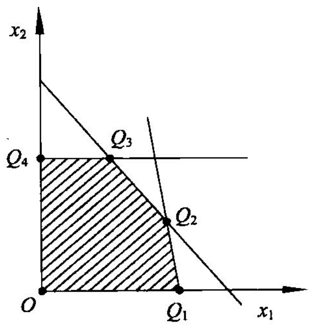



图 1-1

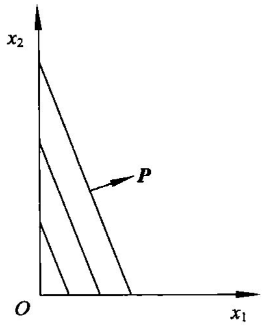



图 1-2

(3) 求最优解.因最优解是可行域中使目标函数达到最优的解,将图 1-1 与图 1-2 合并得到图 1-3,可以看到,目标函数直线由原点开始向上移动时,$Z$ 的值逐渐增大,一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切为止,切点(顶点)就是最优解的点.因为再继续向右上方移动,值仍然可以增大,但在目标函数的直线上找不到一个点位于约束条件包围的凸多边形内部或边界上.

本例中目标函数与凸多边形的切点是 $Q_2$,该点坐标可由求解直线方程 $6x_1+2x_2=24$ 和 $x_1+x_2=5$ 得到,为$(x_1,x_2)=(3.5,1.5)$.将其代入目标函数得 $Z=8.5$,即美佳公司每天制造 3.5 件家电Ⅰ,1.5 件家电Ⅱ,可获利最大.

**例 1.6** 将例 1.3 的目标函数改变为 $\max Z=3x_1+x_2$,约束条件不变,求最优解.

**解** 可行域不变,此时目标函数的直线恰好与约束函数(1.3b)平行.当目标函数向上移动时,与可行域不是在一点上,而是在$\overline{Q_1Q_2}$线段上相切,如图 1-4 所示.这时点 $Q_1$、$Q_2$ 及 $Q_1$ 与点 $Q_2$之间的所有点都使目标函数 $Z$ 达到最大,即有无穷多最优解.通解为

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^{(2)}\ (0\leqslant\alpha\leqslant 1),$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(4,0)$($Q_1$点坐标),$\boldsymbol{x}^{(2)}=(3.5,1.5)$($Q_2$点坐标).

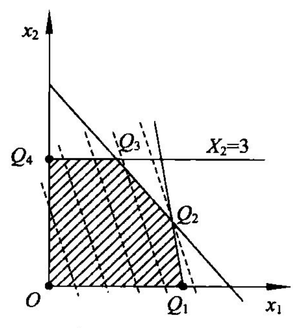



图 1-3

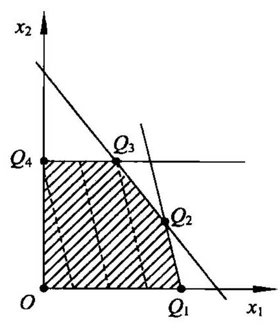



图 1-4

**例 1.7** 例 1.3 的目标函数不变,将约束条件改变如下,求最优解.

约束条件:
$$\begin{cases}5x_2\leqslant 15 & (1.3\text{a})\\ x_1,x_2\geqslant 0 & (1.3\text{d})\end{cases}$$

**解** 可行域变为无穷域,如图 1-5 所示,此时 $x_1$ 的取值可无限增大,由此目标函数也可增大到无穷,这种情形称为**无界解**,无界解就是无最优解.

**例 1.8**　求解下列线性规划：

$$\max Z=10x_1+x_2,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 40 & (1)\\ x_1+1.5x_2\leqslant 30 & (2)\\ x_1+x_2\geqslant 50 & (3)\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}.$$

**解**　约束条件(1)，(2)与(3)没有交点，不存在满足所有条件的解，说明线性规划无可行解，无可行解也就是无最优解，如图 1-6 所示.

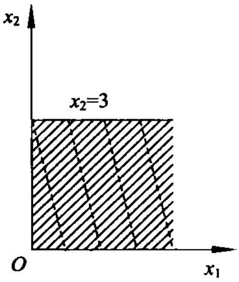



图 1-5

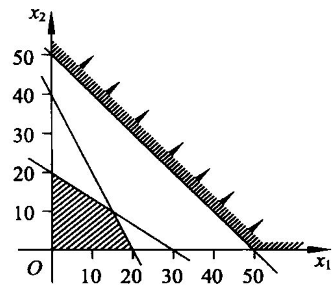



图 1-6

由以上例题可知，线性规划的解有 4 种形式：

1. 有唯一最优解(例 1.5)；
2. 有多重解(例 1.6)；
3. 有无界解(例 1.7)；
4. 无可行解(例 1.8).

线性规划若有最优解，最优解的一个重要特性是：最优解总是在可行解集合的顶点(两线的交点)处取得(例 1.5 的 $Q_2$ 点；例 1.6 的 $Q_1$ 或 $Q_2$ 点，实际上，线段 $Q_1Q_2$ 上的任意点都是最优点，线段 $Q_1Q_2$ 由顶点 $Q_1$ 和 $Q_2$ 确定).

线性规划最优解总是在可行解集合的顶点处取得，这意味着最优解能够简单地通过枚举所有顶点来找到，例 1.5 枚举如表 1-5 所示：

**表 1-5**

| 顶点 | $(x_1,x_2)$ | $Z$ |
|---|---|---|
| $O$ | (0,0) | 0 |
| $Q_1$ | (4,0) | 8 |
| $Q_2$ | (3.5,1.5) | **8.5(最优解)** |
| $Q_3$ | (2,3) | 7 |
| $Q_4$ | (0,3) | 3 |

随着约束条件和变量个数增加，定点的个数也随之增加，所提出的枚举法由于计算量变大而显得烦琐. 但是从确定线性规划最优解的角度来看，上述的思路表明，包含无穷个解的解集合 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 实际上可用有限个有希望成为最优解的点——顶点 $O,Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$ 来替代. 这个想法就构造了 1.4 节讨论的一般代数式算法即**单纯形法**.