硕士学位

研究生入学资格考试(GCT)

数学考试指南解析

教育部学位与研究生教育发展中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

硕士学位研究生入学资格考试(GCT)

数学考试指南解析

SHUOSHI XUEWEI YANJIUSHENG RUXUE ZIGE KAOSHI (GCT)
SHUXUE KAOSHI ZHINAN JIEXI

教育部学位与研究生教育发展中心

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

硕士学位研究生入学资格考试（GCT）数学考试指南解析／教育部学位与研究生教育发展中心组编. —北京：高等教育出版社，2011.7
ISBN 978－7－04－033340－4

Ⅰ.①硕… Ⅱ.①教… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131728 号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 顾 斌　　版式设计 杜微言
责任校对 胡晓琪　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社	咨询电话 400－810－0598
社　　址 北京市西城区德外大街4号	网　　址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120	http://www.hep.com.cn
印　　刷 高等教育出版社印刷厂	网上订购 http://www.landraco.com
开　　本 787×1092 1/16	http://www.landraco.com.cn
印　　张 6.25	版　　次 2011年7月第1版
字　　数 140 000	印　　次 2011年7月第1次印刷
购书热线 010－58581118	定　　价 18.00元

物 料 号 33340－00

前　言

自2000年举办在职人员攻读硕士学位全国联考(以下简称"全国联考")工作以来,经过十年来的努力和建设,我国已初步建立起门类齐全、类型多样、结构基本合理的具有中国特色的专业学位研究生教育制度。新的十年,按照《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》,国家将会加快发展专业学位研究生教育,到2020年实现研究生教育从以培养学术型人才为主转变为学术型人才和应用型人才培养并重的格局,我国硕士专业学位教育工作进入一个新的重要发展机遇期。专业学位作为我国研究生教育的重要组成部分,在新的形势下,同样对在职人员攻读硕士专业学位工作提出了新的要求和任务。在全面落实科教兴国、人才强国和可持续发展战略的关键阶段,如何把握"基本实现教育现代化,基本形成学习型社会,进入人力资源强国行列"的战略目标,提升在职攻读硕士学位工作的人才选拔功能,社会服务功能显得尤为紧迫。在职攻读硕士学位工作社会化水平亟待提高,考试服务亟须加强,综合信息管理水平也需要进一步加强。

在这种大的背景下,按照国务院学位委员会办公室的要求,教育部学位与研究生教育发展中心(以下简称"学位中心")积极转变发展思路,以树立品牌、强化特色为目标,大力推进全国联考的专业化、社会化水平。为此,从2011年起,全国联考全面实行全国统一网上报名,统一报名平台,迈出了社会化考试的重要一步。同时,作为全国联考向社会化、规范化发展的重要配套环节,在广泛征求各专业学位指导委员会、省级学位与研究生教育主管部门、招生院校和社会各界意见的基础上,学位中心与高等教育出版社合作,出版发行全国联考考试系列辅导丛书。

本套丛书编审人员均为各专业资深专家,对各科考试大纲及历年全国联考命题内容和规律有长期深入研究,对考试大纲的指导思想、评价目标、题量题型等有深刻了解和把握。考虑到全国联考的特殊性,本套丛书更符合在职人员攻读硕士学位的特点,更切合社会化考试对人才的选拔要求,更有利于更加客观地测试考生的综合水平,保证学位授予质量。专业的指导,权威的分析,精准的把握,高效的复习,丛书的出版必将更加有利于正确地指导广大考生应考,帮助考生有针对性地复习准备参加全国联考。

由于编写时间仓促,丛书难免仍存在一些不足之处,敬请读者批评指正。

教育部学位与研究生教育发展中心

2011.6

目　　录

第一章　GCT 数学基础能力测试说明

第一节　考 试 目 的

GCT 数学基础能力测试，旨在考查考生所具有的数学方面的基础知识、基本思想方法，考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力.

第二节　试 题 结 构

1. 题量与题型

GCT 数学基础能力测试部分共有 25 道题，考试时间为 45 分钟. 试卷包含算术题、代数题、几何题、一元微积分题和线性代数题等五部分. 其中前三个部分占 60%，后两部分占 40%，均为单项选择题.

2. 试题难易程度

试题难度分为容易、一般、较难三个等级，在试题中，容易题、一般题和较难题的题量之比约为 2∶2∶1.

3. 试题评分标准

GCT 数学基础能力测试部分试题满分为 100 分，每题 4 分. 考生须从每道试题所列的 4 个备选答案 A、B、C、D 中选出 1 个正确答案，多选、不选或错选均不得分；所选答案均为 A 或 B、C、D 的答卷，一律视为废卷.

第三节　命 题 范 围

GCT 数学基础能力测试的命题范围主要包括算术、代数、几何、一元微积分和线性代数的基础知识，及其在日常生活、科学研究和实际工作中的应用. 要求考生对所列数学知识内容有较深刻的理性认识；系统地掌握这些数学知识之间的内在联系；通过举例、解释、分析、推断以解决相关问题；运用相关知识和方法分析、解决较为复杂的或综合性的问题.

1. GCT 数学基础能力测试的知识要求

数学基础能力测试所涉及的知识有：算术、代数、几何、一元微积分和线性代数.

(1) 算术

数的概念和性质,四则运算与运用.

(2) 代数

代数等式和不等式的变换和计算.包括:实数和复数;乘方和开方;代数式的运算和因式分解;方程和不等式的解法;数学归纳法,数列;二项式定理,排列,组合;概率及统计的基本知识等.

(3) 几何

三角形、四边形、圆形以及多边形等平面几何图形的角度、周长、面积等计算和运用;长方体、正方体以及圆柱体等各种规范立体图形的表面积和体积的计算和运用;三角学;以及解析几何方面的知识等.

(4) 一元微积分

① 函数及其图形:集合,映射,函数,函数的应用.

② 极限与连续:数列的极限,函数的极限,极限的运算法则,极限存在的两个准则与两个重要极限,连续函数,无穷小和无穷大.

③ 导数与微分:导数,微分,求导法则及基本求导公式,高阶导数.

④ 微分中值定理与导数应用:中值定理,导数的应用.

⑤ 积分:不定积分,定积分,牛顿-莱布尼茨公式,不定积分和定积分的计算,定积分的简单应用.

(5) 线性代数

① 行列式:行列式的概念和性质,行列式展开定理,行列式的计算.

② 矩阵:矩阵的概念,矩阵的运算,逆矩阵,矩阵的初等变换.

③ 向量:n 维向量,向量组的线性相关和线性无关,向量组的秩和矩阵的秩.

④ 线性方程组:线性方程组的克莱姆法则,线性方程组解的判别法则,齐次和非齐次线性方程组的求解.

⑤ 特征值问题:特征值和特征向量的概念,相似矩阵,特征值和特征向量的计算,n 阶矩阵可化为对角矩阵的条件和方法.

2. GCT数学基础能力测试的能力要求

(1) 逻辑推理能力

对数学问题进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括;能用演绎、归纳和类比进行推断.

(2) 数学运算能力

根据数学的概念、公式、原理、法则,进行数、式、方程的正确运算和变形;通过已知条件分析,寻求与设计合理、简捷的运算途径.

(3) 空间想象能力

根据数学问题的几何条件画出正确的图形,并根据图形想象出几何关系;能对图形进行分解、组合与变形.

(4) 综合思维能力

理解和分析用数学语言所表述的问题;综合应用数学的知识和思想方法解决所提出的问题.

第二章 2003—2010 年 GCT 数学基础能力测试真题解析

第一节 2003 年 GCT 数学基础能力测试真题解析

（25 题，每题 4 分，共 100 分）

1. 1000 米的大道两侧从起点开始每隔 10 米种一棵树，相邻两棵树之间放一盆花，这样需要（　　）.

A. 树 200 棵，花 200 盆　　B. 树 202 棵，花 200 盆

C. 树 202 棵，花 202 盆　　D. 树 200 棵，花 202 盆

[考查内容] 简单算术应用题.

[参考解答] B.

解 先考察一侧，1000 米的大道，10 米一间隔，共$\frac{1000}{10}=100$个间隔，每间隔左端一棵树，共 100 棵，加上该侧大道终点一棵共 101 棵；每一间隔放一盆花，共 100 盆花. 再因为大道两侧对称，所以上述数据 2 倍即得结果.

树棵数$=2\left(\frac{1000}{10}+1\right)=202$；

花盆数$=2\times\frac{1000}{10}=200$.

[解析点评] 这是一种植树模型问题. 本题的答对率为 95.18%.

2. 已知 $a=\frac{2001}{2002}, b=\frac{2002}{2003}, c=\frac{2003}{2004}$，则（　　）.

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

[考查内容] 分数运算及判断数的大小.

[参考解答] D.

解 鉴于

$$\frac{1}{a}=\frac{2002}{2001}=1+\frac{1}{2001};\frac{1}{b}=\frac{2003}{2002}=1+\frac{1}{2002};\frac{1}{c}=\frac{2004}{2003}=1+\frac{1}{2003};$$

$$\frac{1}{a}-1=\frac{1}{2001};\frac{1}{b}-1=\frac{1}{2002};\frac{1}{c}-1=\frac{1}{2003}.$$

从此易知$\frac{1}{a}-1>\frac{1}{b}-1>\frac{1}{c}-1$，上式各项同加上 1，即知$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$，因此 $c>b>a$.

[解析点评] 比较数的大小是常考题型. 本题的答对率为 89.52%.

3. $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11}{1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11}=(\quad)$.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

[考查内容] 等差数列求和,算术表达式求值.

[参考解答] B.

解 分子 $=\dfrac{11\times(1+11)}{2}=66$;

分母 $=(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+(9-10)+11$

$=(-1)\times5+11=6$;

原式 $=\dfrac{66}{6}=11$.

[解析点评] 在算术表达式求值时,分项、合并及综合应用等差、等比数列求和是常考题型. 本题的答对率为 93.66%.

4. 记不超过 10 的素数的算术平均数为 M,则与 M 最接近的整数是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

[考查内容] 素数,整数,算术平均数的概念及判断数的大小.

[参考解答] C.

解 要找一个与 M 最接近的整数,先确定 M 落在哪两个相邻整数之间,再比较 M 与端点距离的大小,从而得到最接近的整数. 因为不超过 10 的素数有 1,2,3,5,7. 所以

$$M=\frac{1+2+3+5+7}{5}=\frac{18}{5}\in(3,4);$$

$$4-M=\frac{2}{5}<\frac{3}{5}=M-3.$$

[解析点评] 素数,整数,算术平均数等概念是算术的重要知识点. 本题的答对率为 59.2%.

5. 某工厂月产值三月份比二月份增加 10%,四月份比三月份减少 10%,那么(　　).

A. 四月份与二月份产值相等　　B. 四月份比二月份产值增加 $\dfrac{1}{99}$

C. 四月份比二月份产值减少 $\dfrac{1}{99}$　　D. 四月份比二月份产值减少 $\dfrac{1}{100}$

[考查内容] 百分比概念,比与百分比的运算.

[参考解答] D.

解 1 注意到四个选项都涉及四月份比二月份,故设二月份的产值为 a. 依题意则有,

三月份的产值为 $a+\dfrac{a}{10}=a\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$,

四月份的产值为 $a\left(1+\dfrac{1}{10}\right)-\dfrac{1}{10}a\left(1+\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{99}{100}a$,

$$\frac{99}{100}a-a=-\frac{1}{100}a\Rightarrow\frac{\frac{99}{100}a-a}{a}=-\frac{1}{100}.$$

解 2　设二月份产值为 a，则四月份产值为

$$a\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=a\left(1-\frac{1}{100}\right)$$
$$=a-\frac{a}{100}.$$

因此四月份比二月份产值减少$\frac{1}{100}$.

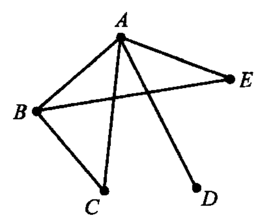
［解析点评］　百分比的概念与相关运算是常考题型. 本题的答对率为 76.34 %.

6. A,B,C,D,E 五支篮球队相互进行循环赛，现已知 A 队已赛过 4 场，B 队已赛过 3 场，C 队已赛过 2 场，D 队已赛过 1 场，则此时 E 队已赛过(　　).

A. 1 场　　B. 2 场　　C. 3 场　　D. 4 场

［考查内容］　对循环赛概念的理解和算术运算的简单应用.

［参考解答］　B.



解 1　A,B,C,D,E 五支篮球队相互进行循环赛，两队赛过一场就在两队之间连条线段. 现已知 A 队已赛过 4 场，所以 A 与 B,C,D,E 都有连线；因 D 队已赛过 1 场，所以 D 只与 A 有连线；由于 B 队已赛过 3 场，又 A、B 已连线，另两场只能连 B、C 和 B、E；而 C 队已赛过 2 场，恰为 A、C 和 B、C. 因此，从图中看出 E 队已赛过 2 场，故选项 B 正确.

解 2　五支球队循环赛，任两队赛 1 场，每队各计比赛 1 场次. 所以比赛过程中五支队统计的赛过场次数的总和必是偶数. 但统计 A,B,C,D 赛过场数的和为 $4+3+2+1=10$，因此 E 队赛过的场数应为偶数. 由于五支球队循环赛一个队至多赛 4 场，所以 E 队赛过的场数只可能是 0,2,4. 但已知 A 队已赛过 4 场，即 A、E 已赛过，所以 E 队赛过的场数不等于 0，又 D 队已赛过 1 场，是和 A 赛的，因此 D、E 没赛过，即 E 赛过的场数不等于 4. 所以 E 队赛过的场数只能是 2 场.

解 3　为了叙述方便，引进记号 $n(X,Y)$：

若 X,Y 两队已赛过，$n(X,Y)=1$，两队未赛过 $n(X,Y)=0$. 显然有对称性：$n(Y,X)=n(X,Y)$.

① A 队已赛过 4 场$\Rightarrow n(A,B)+n(A,C)+n(A,D)+n(A,E)=4$，

由此推知

$$n(A,B)=n(A,C)=n(A,D)=n(A,E)=1.$$

② B 队已赛过 3 场$\Rightarrow n(B,A)+n(B,C)+n(B,D)+n(B,E)=3$，

由①已知 $n(A,B)=1$，因而

$$n(B,C)+n(B,D)+n(B,E)=2. \tag{1}$$

③ D 队已赛过 1 场$\Rightarrow n(D,A)+n(D,B)+n(D,C)+n(D,E)=1$，

由①已知 $n(D,A)=1$，因而

$$n(D,B)+n(D,C)+n(D,E)=0,$$

由此推知 $n(D,B)=n(D,C)=n(D,E)=0$.

将此代入(1)，得到

$$n(B,C)+n(B,E)=2,$$

又 $0\leqslant n(B,C)\leqslant 1$，所以有 $n(B,E)=2-n(B,C)\geqslant 1$，于是

$$1\leqslant n(B,E)\leqslant 1\Rightarrow n(B,E)=1.$$

联合①已知 $n(A,E)=1$，故有 $n(A,E)=1$ 与 $n(B,E)=1$. 于是 E 队已赛过 2 场.

[解析点评]　各种比赛场次问题是算术的常考题型，本题的答对率为 63.39%.

7. 函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增的充分必要条件是(　　).

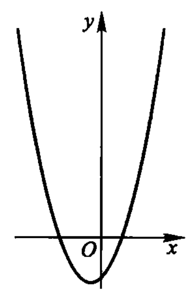
A. $a<0$ 且 $b\geqslant 0$　　B. $a<0$ 且 $b\leqslant 0$

C. $a>0$ 且 $b\geqslant 0$　　D. $a>0$ 且 $b\leqslant 0$

[考查内容]　二次函数的图像，开口方向、对称轴与系数 a,b,c 的关系，函数单调增的概念.

[参考解答]　C.

解　$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增，意味着其图像开口向上和对称轴在 Oy 轴左侧，如图所示. 所以 $a>0,-\dfrac{b}{2a}\leqslant 0$，即 $a>0$ 且 $b\geqslant 0$.



[解析点评]　二次函数的图形，开口方向、对称轴与系数 a,b,c 的关系，函数单调增的概念是代数的重要知识点，这类问题画个简图启发思路常常是有效的. 本题的答对率为 69.91%.

8. 函数 $y_1=f(a+x)$ $(a\neq 0)$ 与 $y_2=f(a-x)$ 的图像关于(　　).

A. 直线 $x-a=0$ 对称　　B. 直线 $x+a=0$ 对称

C. x 轴对称　　D. y 轴对称

[考查内容]　函数图形概念及平面上关于直线对称的点的坐标之间的关系.

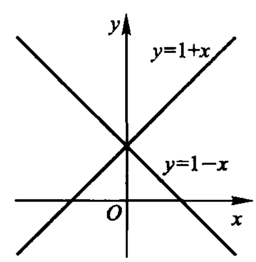
[参考解答]　D.

解 1　用特例肯定法. 设 $f(x)=x,a=1$. 则有 $y_1=1+x,y_2=1-x$，它们的图像如图所示，显然关于 Oy 轴对称.

解 2　因为 $y_1(x)=f(a+x)$　$(a\neq 0)$，$y_2(x)=f(a-x)$，所以 $y_1(-x)=f(a-x)=y_2(x)$，反之有

$$y_2(-x)=f(a+x)=y_1(x).$$

故知 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 关于 y 轴对称.



[解析点评]　函数图形概念及平面上关于直线对称的点的坐标之间的关系是平面解析几何的重要知识点. 本题的答对率为 52.85 %.

9. 已知实数 x 和 y 满足条件 $(x+y)^{99}=-1$ 和 $(x-y)^{100}=1$，则 $x^{101}+y^{101}=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

[考查内容]　乘方开方运算，简单二元一次方程组的解法.

[参考解答]　A.

解　$(x+y)^{99}=-1\Rightarrow x+y=-1$；$(x-y)^{100}=1\Rightarrow x-y=1$ 或者 $x-y=-1$.

联立 $\begin{cases}x+y=-1,\\x-y=1,\end{cases}$ 解得 $x=0,y=-1$. 联立 $\begin{cases}x+y=-1,\\x-y=-1,\end{cases}$ 解得 $x=-1,y=0$. 两者情形都有 $x^{101}+y^{101}=-1$.

[解析点评]　乘方开方运算，简单二元一次方程组的解法是代数的重要知识点，本题的答

对率为 61.22%.

10. 一批产品的次品率为 0.1，逐件检测后放回，在连续三次检测中至少有一件是次品的概率为(　　).

A. 0.271　　B. 0.243　　C. 0.1　　D. 0.081

[考查内容] 本题是初等概率题，考查简单的古典概率问题.

[参考解答] A.

解 1 连续三次检测中至少有一件是次品的对立事件是连续三次检测中都是合格的. 依题意，产品的合格率为 $1-0.1=0.9$，所以连续三次检测中都是合格品的概率为 0.9^3，于是连续三次检测中至少有一件是次品的概率为 $1-0.9^3=0.271$.

解 2 设事件 A 表示连续三次检测中只有一件是次品，事件 B 表示连续三次检测中只有两件是次品，事件 C 表示连续三次检测中三件都是次品，则事件 A,B,C 是两两互斥的，并且

$$P(A)=\mathrm{C}_3^1\times0.1\times0.9^2=0.243,$$

$$P(B)=\mathrm{C}_3^2\times0.1^2\times0.9=0.027,$$

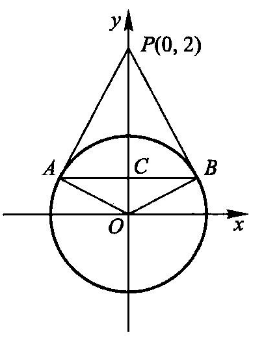
$$P(C)=0.1^3=0.001,$$

所以连续三次检测中至少有一件是次品的概率为

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.271.$$

[解析点评] 本题是最通常的古典概率题，计算时要注意组合数计算公式的正确性. 本题的答对率为 42.43%.

11. 过点 $P(0,2)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 PA,PB，A、B 是两个切点，则 AB 所在直线的方程为(　　).



A. $x=-\frac{1}{2}$　　B. $y=-\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $y=\frac{1}{2}$

[考查内容] 相似形性质，坐标概念、直线方程等.

[参考解答] D.

解 1 设 AB 连线与 OP 交点为 C，则

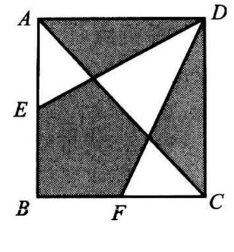
$$\triangle OAC\sim\triangle OPA\Rightarrow|OC|=\frac{|OA|^2}{|OP|}=\frac{1}{2},$$

即点 C 的纵坐标 $y_C=\frac{1}{2}$.

解 2 选择题可用排除法. 先从图形判断 $AB\,/\!/\,Ox$ 轴，排除选项 A,C，再从 AB 直线上有 $y>0$，排除选项 B，故选项 D 正确.

[解析点评] 本题是平面几何与平面解析几何知识的联合使用，是常考题型. 本题的答对率为 77.07%.

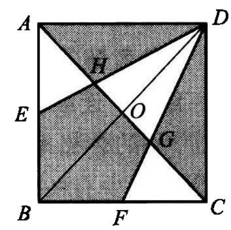
12. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为 1，E 和 F 分别是 AB 和 BC 的中点，则图中阴影部分面积为(　　).



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

[考查内容]　三角形重心的概念和性质，及三角形面积公式的计算方法.

[参考解答]　C.



解　如右图，因为 G 是 $\triangle BCD$ 的重心，所以 $OG=\frac{1}{2}GC$. 进一步根据对称性易知 $AH=HG=GC$，又 $\triangle DAH$，$\triangle DHG$ 与 $\triangle DGC$ 同高，从而 $\triangle DAH$，$\triangle DHG$ 和 $\triangle DGC$ 的面积都等于$\frac{1}{6}$.

阴影部分中有一块非三角形，而空白部分三块却都是三角形，故转求空白部分的面积. $\triangle GFC$ 在 FC 边上的高等于$\frac{1}{3}CD=\frac{1}{3}$，$FC=\frac{1}{2}$，所以 $\triangle AEH+\triangle GFC$ 的面积等于 $2\triangle GFC$ 的面积等于$\frac{1}{6}$. 从而空白部分的面积等于 $\triangle DHG+\triangle AEH+\triangle GFC$ 的面积等于$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$. 于是阴影部分的面积等于 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

[解析点评]　三角形面积公式及其各种变形，经常出现在综合性题型中. 本题的答对率为 53.65%.

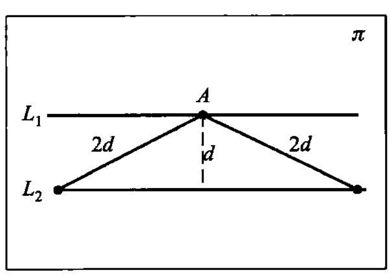
13. 已知两平行平面 α,β 之间的距离为 $d(d>0)$，l 是平面 α 内的一条直线，则在平面 β 内与直线 l 平行且距离为 $2d$ 的直线有(　　).

A. 0 条　　B. 1 条　　C. 2 条　　D. 4 条

[考查内容]　空间想象能力.

[参考解答]　C.

解　这是一个空间问题，从一个截面去看就转化为平面问题. 为此，作一个平面 $\pi\perp l$，并设平面 π 与 l 的交点为 A，π 与平面 α,β 的交线分别为 L_1,L_2，如图所示. 问题就等价于在直线 L_2 内与点 A 距离为 $2d$ 的点有几个. 观察图形易知这样的点有两个.



[解析点评]　空间想象能力是立体几何的考查要点之一，适当建立截面将空间问题转化为平面问题是常用手段. 本题的答对率为 69.59%.

14. 正圆锥的全面积是侧面积的$\frac{5}{4}$倍，则该圆锥侧面展开后的扇形所对的圆心角为(　　).

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

［考查内容］ 正圆锥的侧面积、底面积公式以及扇形的半径、弧长与圆心角的关系.

［参考解答］ B.

解 设圆锥底面半径为 r，母线长为 l，则圆锥底面积为 πr^2，圆锥侧面积就是圆锥面展开后的扇形面积，故侧面积为

$$\frac{1}{2}l\cdot 2\pi r=\pi rl.$$

依题意，

$$\frac{\pi r^2+\pi rl}{\pi rl}=\frac{5}{4}\Rightarrow l=4r\Rightarrow\frac{2\pi r}{l}=\frac{\pi}{2}.$$

［解析点评］ 圆锥侧面展开后成为扇形，这是一个能综合多个知识点的常考题型，本题的答对率为 48.14%.

15. 设点 (x_0,y_0) 在圆 $C:x^2+y^2=1$ 的内部，则直线 $x_0x+y_0y=1$ 和圆 C(　　).

A. 不相交

B. 有一个交点

C. 有两个交点，且两交点间的距离小于 2

D. 有两个交点，且两交点间的距离等于 2

［考查内容］ 两点距离公式、点到直线的距离公式及判断直线与圆位置关系的常用方法.

［参考解答］ A.

解 1 依题意，点 (x_0,y_0) 在圆 $C:x^2+y^2=1$ 的内部，故有 $x_0^2+y_0^2<1$. 又设 (x,y) 是圆 C 内部或圆周上的任一点，则有 $x^2+y^2\leqslant 1$，对这样的点 (x,y)，我们有

$$x_0x+y_0y\leqslant|x_0x+y_0y|\leqslant\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x^2+y^2}<1,$$

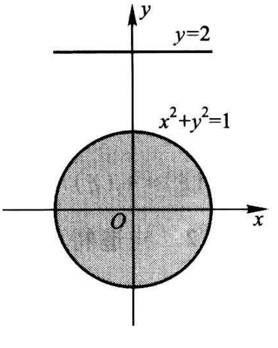
这意味着，圆 C 内部或圆周上的任一点都不能在直线 $x_0x+y_0y=1$ 上，即圆 C 与该直线不相交. 故选项 A 正确.

解 2 依题意，点 (x_0,y_0) 在圆 $C:x^2+y^2=1$ 的内部，故有 $x_0^2+y_0^2<1$. 又因为圆 $C:x^2+y^2=1$ 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $x_0x+y_0y=1$ 的距离

$$d=\left.\frac{|x_0x+y_0y-1|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right|_{x=0,y=0}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

距离 d 大于圆的半径 1，从而直线与圆 C 不相交，故选项 A 正确.

解 3 特例肯定法. 取 $x_0=0,y_0=\frac{1}{2}$. 这时直线 $x_0x+y_0y=1$ 就是 $y=2$，此直线与圆 C 不相交（如图所示）. 故选项 A 正确.



［解析点评］ 两点距离公式、点到直线的距离公式及判断直线与圆位置关系等知识颇能得到命题者的青睐，因为用它们出的题题意直观、运算量小. 本题的答对率为 31.83%.

16. 设 $f(x)=\int_0^x t^2(t-1)\,\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 的极值点的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

［考查内容］ 本题是微积分题，考查变上限积分求导及函数极

值点的求法.

[参考解答] B.

解 $f'(x)=x^2(x-1)=0$,得驻点 $x_1=0$ 或 $x_2=1$.

因为在 $x_1=0$ 的去心邻域内 $f'(x)<0$,所以不是极值点;

在 $x_2=1$ 左右两侧 $f'(x)$ 改变正负符号,所以 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

[解析点评] 求函数的极值是导数应用的重要方面,本题又连带考查了变上限积分的求导,相关内容应引起考生注意. 考生中错选选项 C 的占 51.26%,很可能没把驻点与极值点加以区别. 本题的答对率为 31.77%.

17. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x}$ ( ).

A. 等于 $f'(x_0)$ B. 等于 1

C. 等于 0 D. 不存在

[考查内容] 本题是微积分题,考查导数定义和函数微分性质.

[参考解答] C.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-\dfrac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right)=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$

[解析点评] 微分是函数增量的"线性主部". 题中算式实际上是微分定义

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)=\mathrm{d}f(x_0)+o(\Delta x)$$

的极限形式,这是微积分的基本内容. 本题的答对率为 43.47%,错选选项 A 的占 28.42%.

18. 甲、乙两人百米赛跑的成绩一样,那么( ).

A. 甲、乙两人每时刻的瞬时速度必定一样

B. 甲、乙两人每时刻的瞬时速度都不一样

C. 甲、乙两人至少在某时刻的瞬时速度一样

D. 甲、乙两人到达终点时的瞬时速度必定一样

[考查内容] 本题是微积分题,考查定积分应用和积分中值定理.

[参考解答] C.

解 1 设甲、乙的速度分别为 $v_1(t)$ 及 $v_2(t)$,用时 T 秒跑完百米,则

$$\int_0^T v_1(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t=100,$$

于是 $\int_0^T (v_1(t)-v_2(t))\,\mathrm{d}t=0$,不妨设 $v_1(t)$,$v_2(t)$ 是连续函数,由积分中值定理,存在 $\xi\in[0,T]$,使得

$$\int_0^T (v_1(t)-v_2(t))\,\mathrm{d}t=(v_1(\xi)-v_2(\xi))T=0,$$

亦即 $v_1(\xi)=v_2(\xi)$. 选项 C 正确.

解 2 构造特例,如甲以匀速运动跑完全程,则 $v_1=\dfrac{100}{T}$,乙以匀加速运动跑完全程,则 $v_2=\dfrac{200}{T^2}t$,则选项 A、B、D 均可排除,故选项 C 正确.

[解析点评]　试题意在考查定积分概念和积分中值定理,但凭直观不难判定结论. 本题的答对率为 73.73% ,错选选项 D 的占 15.91%.

19. 方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 的实数根的个数是(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

[考查内容]　本题是微积分题,考查函数的单调性和零点存在定理.

[参考解答]　B.

解　设 $f(x)=x^2-(x\sin x+\cos x)$,则

$$f'(x)=2x-x\cos x=x(2-\cos x),$$

当 $x>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调增,且 $f(0)=-1<0$,$f(\pi)=\pi^2+1>0$,根据 $f(x)$ 的单调性及零点存在定理可知 $f(x)$ 有且仅有一个正零点.

$f(x)$ 为偶函数,故在 $(-\infty,+\infty)$ 中 $f(x)$ 有两个零点,选项 B 正确.

[解析点评]　这是微积分中的常见题,虽然函数不同,但解题方法雷同. 本题的答对率为 47.5%;错选选项 A 的占 29.33%,这可能忽视了偶函数的检查.

20. 设 $I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\mathrm{d}x$,则(　　).

A. $I=1$　　B. $I<0$　　C. $0<I<1$　　D. $I=0$

[考查内容]　本题是微积分题,考查定积分计算及换元法.

[参考解答]　D.

解 1　$I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\mathrm{d}x$,令 $x=t+\frac{\pi}{2}$,则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin t)\mathrm{d}t=0.$$

解 2　令 $x=\pi-t$,则

$$I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}\sin(\cos(\pi-t))\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}\sin(\cos t)\mathrm{d}t=-I.$$

$2I=0$,选项 D 正确.

[解析点评]　对于本题的定积分计算,若根据对称性来估算会更简单. 具体说,函数 $y=\sin x$ 的图像,在 $[0,\pi]$ 上关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,$y=\cos x$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称,利用定积分的几何意义,不难得到正确结果.

本题的答对率为 42.6% 正确,错选选项 C 的占 35.9%.

21. 行列式 $\begin{vmatrix}2&-1&x&2x\\1&1&x&-1\\0&x&2&0\\x&0&-1&-x\end{vmatrix}$ 展开式中 x^4 的系数是(　　).

A. 2　　B. −2　　C. 1　　D. −1

[考查内容]　本题是线性代数题,考查行列式的展开.

[参考解答]　A.

解 1　题中的行列式是 x 的 4 次多项式,将其按第一列展开,含 x^4 的项仅出现在其第 4 行第

1列的元素 x 和其代数余子式的乘积当中,因为

$$-x\begin{vmatrix}-1 & x & 2x\\ 1 & x & -1\\ x & 2 & 0\end{vmatrix}=-x\cdot(-2x^3)+\cdots=2x^4+\cdots,$$

所以题中行列式展开式中的 x^4 项的系数是 2.

解 2　4 阶行列式副对角线上的元素 $a_{14},a_{23},a_{32},a_{41}$,其列指标排列 4321 的逆序数为 3+2+1 =6,所以行列式展开式中 x^4 项是 $(-1)^6a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=2x^4$,选项 A 正确.

[解析点评]　考试中 46.5% 的考生以选项 B 为正确选项,显然是受 2,3 阶行列式对角线展开法的影响,4 阶行列式展开式中含副对角线元素的乘积项应是 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 本题的答对率为 33.56%.

22. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$,则必有(　　).

A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　　　B. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

C. $|\boldsymbol{BA}|=-8$　　　　D. $|\boldsymbol{AB}|=0$

[考查内容]　本题是线性代数题,考查矩阵的乘法运算.

[参考解答]　D.

解 1　$\boldsymbol{BA}$ 是 2 阶矩阵,显然与 $\boldsymbol{AB}$ 不相等,否定选项 A;

$\boldsymbol{AB}$ 不是对称矩阵,否定选项 B;

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 5 & 6 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)+(1)}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix},$$

显然 $|\boldsymbol{AB}|=0$. 选项 D 正确;

选项 C 当然就不对了.

解 2　$\boldsymbol{AB}$ 是 3 阶方阵,它的秩 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}=2$,所以 $|\boldsymbol{AB}|=0$,选项 D 正确.

[解析点评]　矩阵的乘法运算是线性代数中的基本内容和几乎必测之点,综合运用乘法运算和线性组合及秩等概念做题,是减少计算量的重要途径. 本题的答对率为 38.65%,而错选选项 B 的也占到 31.84%,原因可能是不清楚 B 成立的条件.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶非零方阵,其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$,则秩 $r(\boldsymbol{A})$ 等于(　　).

A. 1 或 2　　B. 1 或 3　　C. 2 或 3　　D. 3 或 4

[考查内容]　本题是线性代数题,考查矩阵的秩和伴随矩阵的概念.

[参考解答]　A.

解　$\boldsymbol{A}$ 为 4 阶非零方阵,其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的元素均为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 阶代数余子式,$r(\boldsymbol{A}^*)=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的所有 3 阶子式为零,所以 $r(\boldsymbol{A})<3$.

[解析点评]　本测试题不涉及任何计算,但能区分考生对线性代数中若干重要概念的理解程度,应引起注意. 本题的答对率为 22.29%,而错选选项 C 的占 32.11%,这说明相当一部分考生可能对伴随矩阵的概念没有掌握.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的非零矩阵,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件是(　　).