

中等专业学校試用教材

測量平差

金測量专科学校控制測量教研組編

中等专业学校試用教材

測量平差

哈爾濱冶金測量專科學校控制測量教研組編

序 言

主席的正确领导以及苏联的無私援助下，祖
了惊人的成就。測繪事業在建設中起到了尖
市，或是乡村，到处都有測量員的足跡，到
。現在，測量队伍空前壯大，測繪科学水平

为中等測量專業学校教学用書，及中級測量技术
故在編写时，內容上力求簡明扼要，文字上力求

一章，前三章講述誤差理論，这是学习各种平差方
知識。第四章、第六章和第七章分別系統地講述了
差方法，这里仅是一般的严格平差方法，对于近似
特殊平差法未一一編入。第五章、第八章、第九章
述在專業方面的应用。

合实际，在理論方面着重于概念的闡述和公式的
有的平差公式都是根据最小二乘法原理和誤差傳播
着重闡述理論的目的在于使讀者学习本書之后，能
的理論和方法順利而正确地运用到实际中去，够能进
家的專業書籍。在实际方面，联系專業多，例題多，
種性和計算方法都有总结或說明。对于复杂公式之导
排印，閱讀时如有困难可略去不看，这并不妨碍

除要具有普通測量的知識外，还需要一定程度的数学
中学的数学知識就行了。如要学得更好，还必须

具有一些微分学的知識，因为書中有些地方會用上極值定理和泰罗定理。

由于編者掌握实际資料貧乏，故例題習題多为假設，这仅作为熟悉方法的参考。

在編写本書时，主要参考希洛夫著“最小二乘法”及陈永龄著“大地測量学”平差部分。本書編写時間非常倉促，未能广泛征求意见。另外，限于編者水平，本書的缺点和錯誤一定很多，誠懇地希望讀者給予指正和批評。

哈爾濱冶金測量專科學校
控制測量教研組

1959.9.

目 录

第一章 緒 論

概述	10
§ 1-1. 測量平差的任务及目的	10
§ 1-2. 观测种类	11

第二章 观测誤差及最小二乘法原理

概述	13
§ 2-1. 观测誤差的产生及分类	13
一、錯誤	13
二、系統誤差	14
三、偶然誤差	14
§ 2-2. 偶然誤差的性質	15
§ 2-3. 最小二乘法原理	18
一、算术平均值原理	18
二、最小二乘法原理	20

第三章 观测精度之鑑定

概述	23
§ 3-1. 鑑定观测精度的尺度	23
一、中誤差	23
二、平均誤差	24
三、或是誤差	25
四、相对誤差	26
五、最大誤差	28
§ 3-2. 誤差傳播定律	29
一、观测值的倍数函数	29
二、观测值的和差函数	31
三、观测值的直綫函数	35

四、觀測值的任意函數	36
§ 3-3. 偶然誤差及系統誤差之合併影響	39
§ 3-4. 權	40
一、觀測結果的權	40
二、權與中誤差之關係	41
三、單位權	43
四、函數的權	45
習題	47

第四章 直接觀測平差

概述	49
§ 4-1. 等精度直接觀測平差	49
一、最或是值	49
二、最或是值中誤差	51
三、觀測值中誤差	52
四、例題	54
§ 4-2. 不等精度直接觀測平差	55
一、最或是值	55
二、最或是值中誤差	57
三、單位權中誤差	58
四、例題	61
習題	63

第五章 應用問題

概述	65
§ 5-1. 關於水準測量的幾個問題	65
一、高差之中誤差	68
二、水準路線單位長度的中誤差	66
三、環形水準及附合水準的閉合差限度公式之討論	68
四、水準儀至標尺的距離最大不超過 100 米之理論根據	71
§ 5-2. 關於經緯儀導線測量的幾個問題	72
一、角度觀測中誤差	72

二、鋼尺丈量長度的精度	74
三、閉合多边形導綫及附合導綫的角度閉合差限度	75
四、測角及量距的誤差對導綫端點位置之影響	77
§ 5-3. 關於三角測量的幾個問題	81
一、三角形閉合差限度的根據	81
二、菲列羅公式的推導	82
三、全圓測回法兩倍照准差變動的範圍	83

第六章 間接觀測平差

概述	84
§ 6-1. 間接觀測平差的意義	85
§ 6-2. 未知量非綫性函數化為綫性函數	91
§ 6-3. 導入未知量的近似值	94
§ 6-4. 確定未知量之最或是值	96
一、等精度間接觀測	97
二、不等精度間接觀測	99
三、法方程式系數的計算及檢核	101
四、例題	106
§ 6-5. 解法方程式	109
§ 6-6. 改正數平方和的計算	112
§ 6-7. 法方程式約化的檢核計算	116
§ 6-8. 高斯約化計算表格	119
§ 6-9. 高斯——杜力特爾約化計算表格	121
§ 6-10. 未知量最或是值的中誤差	123
§ 6-11. 未知量最或是值之函數的中誤差	129
§ 6-12. 未知量最或是值及其函數之中誤差的計算	132
§ 6-13. 觀測值中誤差。單位權觀測值中誤差	140
§ 6-14. 例題	141
一、等精度觀測舉例	141
二、不等精度觀測舉例	146
習題	153

第七章 条件观测平差

概述	158
§ 7-1. 条件方程式	158
§ 7-2. 化非线性条件方程式为线性方程式	165
§ 7-3. 确定未知量最或是值	166
一、等精度条件观测	166
二、不等精度条件观测	173
§ 7-4. 改正数平方和的计算	178
§ 7-5. 未知量最或是值之函数的中误差	180
§ 7-6. 未知量最或是值及其函数中误差的计算	184
§ 7-7. 观测值中误差。单位权观测值中误差	191
§ 7-8. 例题	191

第八章 条件观测平差在三角测量上的应用

概述	199
§ 8-1. 独立三角网的条件式	200
一、三角形的条件式	200
二、对角线四边形的条件式	201
三、中心点多边形的条件式	205
四、将条件式化为误差方程式	207
五、独立三角网条件数目之计算公式	212
1. 条件总数	212
2. 内角和条件的数目	213
3. 极条件的数目	213
4. 测站条件的数目	215
5. 按方向平差的条件数目	216
§ 8-2. 非独立三角网的条件式	216
一、非独立三角网的条件数目	217
1. 两端都有起算数据的三角网	217
2. 有两条或更多条固定边相连接的三角网	218
3. 被固定边所包围的三角网	218

4. 閉合环形三角鎖	220
二、附合条件式及其誤差方程式	220
1. 基綫条件和固定边条件	220
2. 方位角条件和固定角条件	222
3. 縱横坐标条件	223
§ 8-3. 例題	234
習題	238

第九章 克呂格分組平差法原理及其应用

概述	240
§ 9-1. 克呂格分組平差法原理	240
§ 9-2. 按克呂格分組平差求中誤差的方法	248
一、未知量最或是值函数的中誤差	248
二、觀測值中誤差。單位权觀測值中誤差	250
§ 9-3. 綫形三角鎖的分組平差	252
一、綫形三角鎖的严密平差	252
二、綫形三角鎖的簡易平差	262
§ 9-4. 單三角鎖的分組平差	270
一、独立單三角鎖的分組平差	270
二、非独立單三角鎖的分組平差	277
§ 9-5. 中心点多边形及固定角之插入点的分組平差	284
§ 9-6. 菱形基綫網按方向平差的分組平差	288
§ 9-7. 三角形內插入一点的分組平差	295

第十章 間接觀測平差在三角測量上的应用

概述	302
§ 10-1. 应用原則	302
§ 10-2. 誤差方程式的組成	304
§ 10-3. 四边形的插入一点的平差	310

第一章 緒 論

概 述

本章主要使初学者明确为什么会有测量平差这一門科学，以及这門科学在测量上的用处；此外，介紹几种不同的观测。这些都是我們学习测量平差时应当了解的。

§ 1-1. 測量平差的任务和目的

一切观测結果都不可能避免产生誤差，这已为实践所証明，故我們永远不能测得一量的眞值。产生誤差的原因，主要是由于观测者感觉器官不完善；观测仪器不免有缺陷；以及观测时外界自然条件（空气的溫度、折光、風等等）的变化等影响所致。

对一量观测一次，其值本可确定，但为了求得更可靠的結果，往往作多次观测，于是就有了多余观测。由于对一量作多次观测，發現其互相間总有差別，这就是誤差产生的表現。所以我們观测仅是在某种程度上找出观測量眞值的近似值，但从这些互相矛盾的多次观测結果中，究竟以何值作为可靠的最后成果，这就屬於平差的問題。

測量平差的主要任务，就是研究观测誤差的基本性質及其积累的規律，研究消除观测結果与理論要求間的矛盾。这个矛盾，必須在能求得最靠近眞值的值之前提下来消除，以求得最可靠的結果，而不能随便改变观测結果。（高斯所創立的最小二乘法，就是研究在与各观测值之差的平方和为最小的条件下，求取观测量的最后結果。）因此，根据最小二乘法原理导出的一些平差計算的方法，就可由各观测值求得最靠近眞值的值。

測量平差要达到的目的有兩個，首先，就是根据各观测值求出未知量最或是值（即最靠近眞值的值）；并由各观测值的誤差积累，計算出平差結果的精度，用以鑑定观测質量的好坏。其次，

由于研究了誤差理論及其积累規律，我們又可用一定的計算方法，按照要求而預先規定出觀測結果的允許誤差。这样对指导实际操作和組織測量工作具有重大意义，可作为工作前正确計劃和組織的依据，以便适当地選擇作業方法和工具，保證觀測能順利地进行，而其結果又能滿足要求。

§ 1-2. 觀測种类

在測量平差中，將觀測分为以下几种：

一、按觀測量与未知量之間的关系，分为直接觀測和間接觀測。

直接地去确定未知量的觀測，就称为直接觀測。比如，要确定某一角的值，就用經緯仪去直接測定它。

如果确定某未知量，不是直接去觀測它，而是觀測它的函数，这种觀測就称为間接觀測。如圖1—1，設欲确定的未知量是 $x(\angle AOB)$ 、 $y(\angle BOC)$ 和 $z(\angle COD)$ ，但觀測的是其函数： $x+y+z(\angle AOD)$ 、 $x+y(\angle AOC)$ 和 $y+z(\angle BOD)$ 。

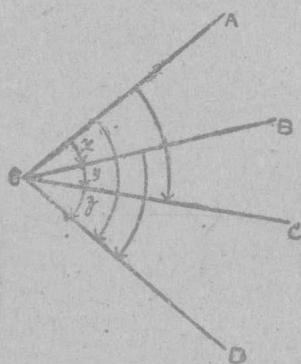


圖 1-1

二、按觀測量之間的关系，分为条件觀測和独立觀測。

如果測定的一些觀測量，必須严格滿足于理論上之条件关系。那末，在這種情况下的觀測就称为条件觀測。比如三角形三内角之和应等于 180° ，因此对三角形各角之觀測属于条件觀測。

如果一些觀測量之間無任何关系，在這種情况下的觀測就称为独立觀測。例如只觀測一三角形內任意兩個角，這兩觀測量之間沒有几何关系存在，像这样的觀測就属于独立觀測。

三、按觀測时所处的条件，分为等精度觀測及不等精度觀測。

在觀測中要注意觀測結果的質量，觀測的質量取決於觀測時所處的條件。如一組觀測結果是在同樣可靠的條件下獲得的，其觀測質量又認為相同，則這些觀測稱為等精度觀測。

如在一組觀測結果中，各個觀測結果是在不同的可靠條件下而獲得的，其觀測質量認為是不相同的，則這些觀測稱為不等精度觀測。

第二章 觀測誤差及最小二乘法原理

概 述

在這一章中，首先對觀測誤差的種類、性質和處理方法作了歸納性的說明，接着根據偶然誤差（觀測誤差的一種）的性質，以觀測實例導出了最小二乘法原理。最小二乘法原理是處理觀測中既不能避免又不能消除的這個偶然誤差的理論根據，也就是測量平差這一門科學的理論根據。

學習了這一章，讀者就會明白測量平差所處理的誤差是什麼樣的誤差，以及處理這誤差的理論基礎又是什麼。這一章是觀測誤差理論的必要知識，又是測量平差的理論基礎。

這一章，對具有測量外業知識的讀者來說是很容易理解的，對於還沒有具有測量知識的讀者來說，應該積極聯繫實際，力求在實際工作中去深刻的體會它。

§ 2-1. 觀測誤差的產生及分類

觀測誤差是由於儀器的缺點，觀測者感覺器官不完善和外界條件的變化而產生的。按照觀測誤差的性質和特徵，分為錯誤、系統誤差和偶然誤差三種。

一、錯 誤

在觀測時，由於觀測者和記錄者之疏忽大意而出現了誤差，這種誤差屬於錯誤。例如量距時讀錯一個分划數；測角記錄時，把分數記為度數等等。這種誤差，只要注意檢查就容易發現和避免。因此要求觀測者及記錄者細心操作外，還要注意記錄的檢查，務使在外業中完全消除錯誤，以免造成嚴重的返工。

二、系統誤差

在相同的觀測條件下，作一系列的觀測，其誤差常保持同一數值，同一符號，或者隨着觀測條件的不同，其誤差遵循着一定的規律變化，凡具有這種性質的誤差稱為系統誤差。例如用20米長的鋼尺量距，量得之距離為 S ；此尺與標準尺比較結果長（或短） a ，則距離 S 就含有誤差 $\frac{a}{20}S$ 。這種誤差的大小與所測之距離成正比，並且保持同一符號。又如用照準軸不平行於水準軸的水準儀進行高程測量，則標尺讀數的誤差就與水準儀至標尺的距離成正比，也保持同一符號。

這種誤差是由於儀器構造有缺陷或檢查校正不嚴格而產生的。這種誤差的變化具有規律性，因此採用觀測的方法或計算的方法就可以消除。例如測水準時，採取前後視距離相等，就可以消除照準軸不平行於水準軸所引起的標尺讀數誤差對高差的影響；經緯儀測角採取正倒鏡觀測，就可以消除照準軸不垂直於水平軸所產生的誤差對水平角的影響；又如用長度不合標準的鋼尺去量距離所產生的誤差，就可用鋼尺檢定的改正數經過計算加以消除。

此外，系統誤差也有由外界的自然條件和觀測者的影響而產生的。例如空氣溫度變化使鋼尺的長度發生變化，大氣折光對水準測量產生濛氣折光差；又如觀測者照準目標時，習慣把望遠鏡十字絲交點對在目標中央之右側或左側而產生誤差，等等即是。

但是自然條件對觀測之影響，其規律不容易掌握，人的誤差不容易發現，因此除採用一定觀測方法和計算方法以消除或減小其影響外，在觀測時應注意自然條件之變化，以使系統誤差之影響減少到最小。

三、偶然誤差

如果觀測誤差在大小（絕對值）和符號（正負）上均不表示出一致性，不能按觀測順序得出一定的規律，這種性質的誤差稱為偶

然誤差。其产生原因很多，如自然条件的变化，仪器構造不精确及校正不能达到理論上的条件，人的感覺器官所不能避免的誤差，甚至观测者操作的熟練程度和工作情緒好坏等，都会影响观测結果而产生偶然誤差。这些影响，可能是个别的或同时的出現，对观测所产生的誤差也可能在不同程度上相互抵消，所以当同一人用同一仪器在同样情况下作反复观测时，所得观测結果往往各不相同。

由于客观世界在不断地变化，偶然誤差产生的原因很复杂，找不到一个完全消除它的方法，故在一切观测結果中都不可避免的含有偶然誤差。但是我們在观测时，有可能使其对观测結果的影响减弱到很小。

在平差时，我們所用的观测結果一般不含有系統誤差和錯誤，因为事先已作过詳尽的檢查和消除工作。但是必須注意，有些系統誤差的来源，我們無法事先知道，因此，在所得的观测結果中，实际上除含有偶然誤差外，并含有較小的不易發覺的系統誤差。

如果某一組观测結果，其誤差的数值及符号变化均有一定的規律，則这組观测所包含的主要的誤差就是系統誤差；若观测誤差的大小和符号沒有任何規律，則这組观测所包含的主要的誤差就是偶然誤差。观测者的任务，就是在观测的过程中，尽可能地消除系統誤差对观测結果的影响，或者减弱到比偶然誤差的影响小得多。因此，在判断观测結果質量的好坏时，一般均指該观测結果含有偶然誤差的大小而言。在測量平差中所指的誤差就是偶然誤差。

§ 2-2. 偶然誤差的性質

研究各种观测列的結果証明，各观测列之偶然誤差，从表面上来看是無規律可循，但用統計学的方法，可得出所謂統計学上的規律。观测的个数愈多，这种規律性的表現愈明显。

現將用統計学方法获得的偶然誤差規律，即用統計学的方法获得的偶然誤差之性質分述于下：

一、在一定的观测条件下，偶然誤差的絕對值不会超过一定

的限值。

二、絕對值小的誤差比絕對值大的誤差出現的個數要多，近于零的誤差出現的個數最多。

三、絕對值相等的正誤差與負誤差出現的個數相等。

四、一量的等精度觀測列，其偶然誤差的算術平均值，隨着觀測次數的增加而趨近于零。即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0.$$

上述第一種性質，說明在一定的觀測條件下，觀測的偶然誤差有一定的範圍（即將要提到的最大誤差）。

第二種性質，說明誤差值的規律性。

第三種性質，說明誤差方向的規律性。

第四種性質，說明誤差的抵償性。

現在，我們舉一系列真誤差為例，來說明上述偶然誤差的幾個性質。這列真誤差共40個，照原先觀測的順序為：

表 2-1

觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差
1	0.15	11	-1.30	21	-0.15	31	-0.58
2	-0.02	12	-0.56	22	-0.50	32	0.95
3	-1.15	13	0.50	23	0.02	33	-1.55
4	0.66	14	-0.50	24	-0.25	34	1.12
5	1.18	15	0.82	25	-0.72	35	-0.66
6	0.67	16	1.29	26	-1.28	36	0.25
7	-0.28	17	0.15	27	1.45	37	0.65
8	-0.17	18	-0.91	28	-0.05	38	-0.22
9	-0.52	19	0.71	29	-2.42	39	1.65
10	-0.83	20	1.27	30	0.98	40	0.17

現在來觀察上列按觀測順序排列的真誤差，在其大小上和符號上，都沒有任何的規律性。這說明這列真誤差是偶然誤差。

為了便於說明偶然誤差的性質，將上列真誤差按其絕對值之