

 提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUI LÜ XIANGJIE



高中 数学 4

(必修 3、5)

主编 蔡晔



YZLI0890161276



龍門書局

龙门品牌·学子至爱

www.longmenbooks.com

提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUI LÜ XIANGJIE



高中数学 4

(必修3、5)

主 编 蔡 晔
副 主 编 冯素梅
分册主 编 周良增 闵党生
编 委 刘 林 赵振红
杨鹏宇 易保全 栗德英



YZLI0890161276

《数理报》优秀作者编写

龍門書局

北 京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010) 64031958,13801093426 (打假办)

邮购电话:(010) 64034160,88937471

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略·疑难与规律详解·高中数学4(必修3、5)/蔡晔主编;
周良增,闵党生分册主编. —北京:龙门书局,2011.5

ISBN 978-7-5088-2956-2

I. ①提… II. ①蔡… ②周… ③闵… III. ①中学数
学课—高中—习题集 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 075122 号

责任编辑:潘恭华 高 鹏/封面设计:浩蓝书籍设计

龍 門 書 局 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2011年5月第 一 版 开本:B5

2011年5月第二次印刷 印张:11 1/2

字数:260 000

定 价:17.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



前言



新课标教学和新课改理念越来越重视对学生的思维能力、实践能力和创新能力的培养。《考试大纲》告诉我们高考的命题将全面落实新课改理念,把以能力测试为主导的命题指导思想落实到每一道题中,在继承和发展传统命题优势情况下,高考将更加注重对学生各种能力的考查,并真正把对能力的考查放在首要位置。

《提分攻略》系列图书正是在这种背景下应运而生,它包含《疑难与规律详解》和《常考题型训练题典》两大子系列,涉及数学、物理、化学、生物、英语五大学科,供中学不同年级学生和教师使用。《疑难与规律详解》系列丛书集《数理报》优秀一线教师多年教学心得于一体,结合新课标教学理念和考试大纲的要求分学科、分模块、分年级编排成册,总的说来本书有以下特点:

紧扣课标要求,以提高学生思维能力为第一宗旨

应用能力与创新能力的培养以思维能力为核心,本书通过对切实有效的解题方法、规律的讲解、总结和应用让学生在三位一体的科学训练中形成良好的理解、分析和推理能力。

兼具报刊的深度和灵活性以及图书的广度和系统性

一方面,本书取材于数理报,以“新课标”和“考试说明”为指导,将《数理报》多年来积累的精华内容进行重新加工和整合;另一方面,我们针对《数理报》内容随意、系统性差以及知识之间相互重复的缺点进行不断的修订和提升,使之既具有报刊的深度和灵活性,又具有图书的广度和系统性。

疑难问题深入讲解,通法规律全面总结,常见错误深度剖析

本书编写定位于解决教学、学习、考试中的疑难问题,总结归纳出解决问题的方法规律,并有针对性的进行跟踪训练,旨在帮助广大师生突破教学、学习中的疑难点,找到提高思维能力的捷径。

全国各地一线教师骨干和专家通力合作,实力雄厚

本书汇集了来自全国各地的优秀教师多年教学心得与体会,对学生学习中遇到的疑难易错问题把握准确,对解题方法规律的总结和应用全面深入,可谓字字珠玑、题题经典,是学习中不可缺少的良师良伴。

编者

2011.4.10



第一部分 必修 3

第一章 算法初步

算法初步知识汇总	1
算法的应用	2
输入、输出、赋值三种语句的考查	3
条件语句的应用	4
循环语句的应用	5
最大公约数案例分析	7
例谈进位制的互化	8
例析算法常见考点	9
高考命题透视	10
算法中的思想方法	12
追本溯源	14
算法误区剖析	15

第二章 统计与概率

第一节 统计	18
统计知识解析	18
特征数的求解与应用	18
用样本估计总体考点分析	20
统计中的思想方法	21
例谈身边的预测型问题	23
高考命题透视	24
追本溯源	25
统计误区剖析	26
第二节 概 率	28
概率详解	28
事件与概率考点剖析	29
图表法的应用	30
古典概型中的几种常见思想方法	32
几何概型问题	33
高考命题透视	35
追本溯源	36

第二部分 必修 5

第三章 解三角形

第一节 正弦定理	40
解读正弦定理	40

巧解距离问题	40
巧断三角形形状	41
正弦定理的综合应用	42
追本溯源	43
高考命题透视	44
第二节 余弦定理	45
解读余弦定理	45
巧用余弦定理解三角形问题	46
巧用余弦定理解综合问题	48
巧用余弦定理求解最值问题	48
有关余弦定理的交汇题	48
追本溯源	49
第三节 三角形面积	51
三角形面积相关题型	52
巧求三角形面积的最值	54
追本溯源	54
第四节 正余弦定理在解三角形中的综合应用	57
正余弦定理应用总结	57
正余弦定理在三角形中的应用	58
利用正余弦定理解决实际应用问题	60
解斜三角形中的数学思想方法	62
有关解三角形的创新题	64
追本溯源	65

第四章 数 列

第一节 数列的概念及表示方法	69
解读数列	69
巧求数列的通项公式	70
巧用数列的通项公式求解数列中的最值	74
巧解在知识的交汇点处命题问题	74
第二节 等差数列	77
等差数列知识大拼盘	77
等差数列考点剖析	78
等差数列的实际应用	80
等差数列中项的求法总结	80
追本溯源	81



目 录

函数表示易错误区	81
第三节 等比数列	82
等比数列知识大拼盘	82
巧用等比数列概念	83
巧用等比数列的性质解题	84
巧解等比数列的创新题	86
巧解数列交汇题	86
追本溯源	88
第四节 数列的递推与求和	90
数列的递推与求和知识大拼盘	90
巧用递推方法解答数列题	91
巧解数列的求和	95
数列求和的综合应用	97
追本溯源	97
等比数列误区破解	98
第五节 数列综合应用	99
数学思想在数列中的应用	100
数列在实际中的应用	102
数列中的探索题型	102
高考命题透视	104

第五章 不等式

第一节 不等关系与不等式	107
不等关系与不等式知识大拼盘	107
不等关系与不等式考点剖析	108
证明不等式	110
追本溯源	112
第二节 一元二次不等式的解法	113
一元二次不等式的解法知识大拼盘	

解不等式考点剖析	113
不等式恒成立问题	118
追本溯源	119
第三节 二元一次不等式(组)与简单的线性规划	121
二元一次不等式(组)与简单的线性规划知识大拼盘	121
线性规划考点剖析	123
利用目标函数的几何意义求解线性规划问题	125
追本溯源	127
第四节 重要不等式及其应用	129
重要不等式知识大拼盘	129
重要不等式考点剖析	131
用均值不等式求最值常用的变型技巧	133
均值定理证明不等式的方法技巧	135
追本溯源	136
第五节 不等式的综合使用	138
不等式的综合应用知识大拼盘	138
不等式与线性规划考点剖析	139
基本不等式的应用	144
不等式中的数学思想	145
追本溯源	147
函数表示易错误区	149

答案与解析



第一部分 必修3

第一章 算法初步

疑难解读

算法初步知识汇总

1. 循环结构的形式

循环结构有两种形式：当型循环结构和直到型循环结构。

(1) 当型循环结构：

如图 1-1-1(1)，它的功能是当给定的条件 P 成立时，执行 A 框， A 框执行完毕后，返回来再判断条件 P 是否成立，如果仍然成立，返回来再执行 A 框，如此反复执行 A 框，直到某一次返回来判断条件 P 不成立时为止，此时不再执行 A 框，离开循环结构，继续执行下面的框图。

(2) 直到型循环结构 2：

如图 1-1-1(2)，它的功能是先执行 A 框，然后判断给定的条件 P 是否成立，如果 P 不成立，则返回来继续执行 A 框，再判断条件 P 是否成立，依次重复操作，直到某一一次的判断条件 P 成立时为止，此时不再返回来执行 A 框，而是离开循环结构，继续执行下面的框图。

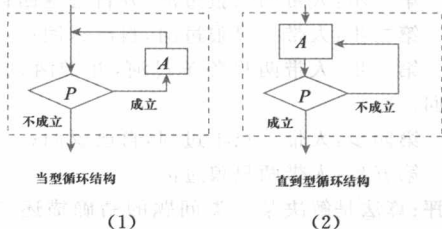


图 1-1-1

2. 数值性问题与非数值性问题

对于数值性问题，我们可以采用数值分析的方法进行处理，数值分析中有许多现成的固定解法、算法，我们可以直接使用它们，也就是说，可以先建立数学模型通过数学语言来描述问题解决的过程，再将数学问题的

解法翻译成算法步骤。

对于非数值性问题，根据实际操作中解决问题的过程分析算法、设计处理步骤并构造算法，也可以采用一些成熟的办法进行处理，如排序，递推等。

3. 循环语句的格式及注意事项

循环语句共有两种类型，即 `for` 循环语句和 `while` 循环语句。

(1) `for` 循环语句：

其中循环变量是用于控制算法中循环次数的变量，起计数作用；步长是指循环变量每次增加的值，若步长为 1，也可省略，但当为其他值时，一律不能省略；`end` 的作用是控制结束一次循环，开始下一次新的循环。

(2) `while` 循环语句：

计算机执行这种形式的循环语句，首先是对表达式进行判断，如果表达式为真则执行循环体，每次执行循环体之前，都要判断表达式是否为真，这样重复执行，直到表达式为假时，结束循环。

(3) `for` 循环与 `while` 循环语句的区别与联系：

`for` 循环语句主要用于预先知道循环次数的情形；`while` 循环语句用于预先不知道循环次数的情形。

这两种循环语句都必须以 `end` 结尾。

(4) 注意事项：

用 `for` 循环语句编写程序时要注意设定好循环变量的初值、步长和终值，避免出现多一次循环或少一次循环的情况；用 `while` 循环语句编写程序时，一定要注意表达式的写法，当表达式为真时执行循环体，表达式为假时结束循环体，以防止出现表达式正好相反的错误。

4. 循环语句的应用

循环语句主要用来处理算法中的循环结构。在处理一些有规律的重复计算问题，如果

加求和、累乘求积、递推等问题时,常常用循环语句来编写程序.

5. 正确理解各案例中的算理

(1)辗转相除法与更相减损术的区别有:

①两者都是求最大公约数的方法,计算上辗转相除法以除法为主,更相减损术以减法为主,计算次数上辗转相除法相对较少;②从结果体现形式看,辗转相除法体现结果是以余数为0得到,而更相减损术是以减数与差相等而得到.

(2)利用秦九韶算法计算多项式的值时,关键是正确地将所给多项式改写,然后由内向外逐次计算,由于后项计算常用到前项结果,故应认真、细心,确保中间结果的准确性.通常把多项式写成按 x 的降幂排列的形式.

规律透视

算法的应用

(山东 刘乃东)

1. 分段函数问题

例1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \geq 2, \\ x + 1, & x < 2. \end{cases}$

设计一个算法,求每一个 x 对应的函数值.

分析:该函数是分段函数,在不同区间上的函数解析式不同,函数值与自变量的范围有关,必须讨论自变量与2的关系.比如求 $x=a$ 时 $f(a)$ 的值,可设计如下的算法.

解答:算法如下:

S_1 输入 a ;

S_2 若 $a \geq 2$,则执行 S_3 ,若 $a < 2$,则执行 S_4 ;

S_3 输出 $a^2 - a + 1$;

S_4 输出 $a + 1$.

点评:对于分段函数,当 x 取不同范围内的值时,函数的表达式不同,因此当给出一个自变量 x 的值时,必须先判断 x 的范围,然后确定选用哪一段的解析式求对应的函数值,在写算法时要分清楚.

2. 累加问题

例2 写出求 $1+2+3+4+5+6$ 的一个算法.

分析:可以按逐一相加的程序进行,也可以利

用公式 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 进行,也可以

根据加法运算规律简化运算过程.

解答:算法一:

S_1 $n=6$;

S_2 $S=\frac{n(n+1)}{2}$;

S_3 输出 S .

算法二:

S_1 $i=1, S=0$;

S_2 $S=S+i$;

S_3 $i=i+1$;

S_4 如果 $i>6$ 结束,否则执行 S_2 .

点评:算法一是利用公式的方法,算法二用循环结构,这样对于计算机计算比较方便.

3. 在实际生活中的应用

例3 一个人带着三只狼和三只羚羊过河,只有一条船,同船可容纳一个人和两只动物,没有人在的时候,如果狼的数量不少于羚羊的数量狼就会吃羚羊,该人如何将动物转移过河?请设计算法.

分析:任何动物同船不用考虑动物的争斗但需考虑承载的数量,还应考虑到两岸的动物都得保证狼的数量要小于羚羊的数量,故在算法的构造过程中尽可能保证船里面有狼,这样才能使得两岸的羚羊数量占到优势.

解答:算法步骤:

第一步:人带两只狼过河,并自己返回;

第二步:人带一只狼过河,自己返回;

第三步:人带两只羚羊过河,并带两只狼返回;

第四步:人带一只羊过河,自己返回;

第五步:人带两只狼过河.

点评:算法是解决某一类问题的精确描述,有些问题使用形式化、程序化的刻画是最恰当的.这就要求我们在写算法时应精练、简练、清晰地表达,要善于分析任何可能出现的情况,体现思维的周密性,解决此类问题的算法中某些步骤重复进行多次才能解决.在现实生活中,很多较复杂的问题经常遇到这样的问题,设计算法的时候,如果能够恰当地利用某些步骤的重复,不但可以使得问题变得简



单,而且可以提高工作效率.

【规律解读】

算法与一般意义上的解决问题不同,它是对一类问题的一般解法的抽象与概括,它要借助一般问题的解决方法,又要包含这类问题的所有可能情形,它往往是把问题的解法划分为若干个可执行的步骤,有时甚至是重复多次,但最终都必须在有限个步骤之内完成.

跟踪练习

1. 已知直角三角形的两直角边长分别 a , b , 设计一个求该三角形周长的算法.
2. 已知直线 $l_1: 3x - y + 12 = 0$ 和 $l_2: 3x + 2y - 6 = 0$, 求 l_1 和 l_2 及 y 轴所围成的三角形的面积, 写出解决本题的一个算法.

输入、输出、赋值三种语句的考查

1. 三种语句的理解

例 4 写出下列语句描述的算法的输出结果.

(1) $a=5$
 $b=3$
 $c=\frac{a+b}{2}$
 $d=c \times c$
 PRINT "d="; d

(2) $a=1$
 $b=2$
 $c=a+b$
 $b=a+c-b$
 PRINT "a=, b=, c="; a, b, c

(3) $a=10$
 $b=20$
 $c=30$
 $a=b$
 $b=c$
 $c=a$
 PRINT "a=, b=, c="; a, b, c

分析: 此题主要考查对三种语句的理解, 只要

对三种语句理解透彻, 不难得到答案.

解答: (1) $\because a=5, b=3, c=\frac{a+b}{2}=4,$

$\therefore d=c^2=16$. 故输出 16.

(2) $\because a=1, b=2, c=a+b,$

$\therefore c=3.$

又 $b=a+c-b,$

$\therefore b=1+3-2=2$. 故输出 1, 2, 3.

(3) 由 $b=20$ 及 $a=b$, 知 $a=20$; 由 $c=30$ 及 $b=c$, 知 $b=30$; 由 $c=a$ 及 $a=20$, 知 $c=20$. 故输出 20, 30, 20.

点评: 语句的识别问题是一个逆向性思维问题, 一般我们认为学习是从算法步骤(自然语言)至程序框图, 再到算法语言(程序). 如果将程序摆在我们面前时, 我们要从识别各个语句开始, 整体把握, 概括程序的功能.

2. 利用输入、输出语句编写程序

例 5 编写一个程序, 求用长度为 L 的细铁丝分别围成一个正方形和一个圆时所围成的正方形和圆的面积, 要求输入 L 的值, 输出正方形的面积 S_1 和圆的面积 S_2 , 并画出程序框图(π 取 3.14).

分析: 先用平面几何的知识求解, 然后选择恰当的算法结构表示.

解答: 程序如下:

```
L=input("L=")
S1=(L*L)/16
S2=(L*L)/(4*3.14)
print ("%io(2), S2, S1)
```

程序框图:

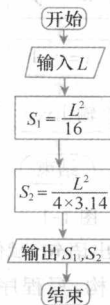


图 1-1-3



点评:编写程序的关键在于搞清问题的算法,特别是算法的结构,然后确定采取哪一种算法语句.本题中要用到相关的平面几何的知识来寻求正方形和圆的面积的计算公式,在此基础上确定利用顺序结构实现算法.

3. 三种语句和框图的对应转化

例 6 以下是一个用基本算法语句编写的程序,根据程序画出其相应的程序框图.

```
INPUT "x,y="; x,y
x=x/2
y=3*y
PRINT x,y
x=x-y
y=y-1
PRINT x,y
END
```

分析:该程序主要利用了输入语句、赋值语句和输出语句进行算法描述,只要按顺序从上到下将输入语句、赋值语句、输出语句表达的内容填入相应的图框即可.

解答:程序框图如下.

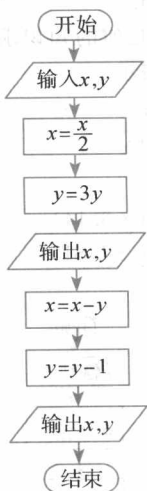


图 1-1-4

点评:输入语句、输出语句、赋值语句基本上对应于算法中的顺序结构,写程序时“input 语句”是输入框中的信息,赋值语句是处理框中的信息,输出框中的信息是“print”语句的内容.

【规律解读】

三种基本语句的使用:

(1)输入、输出语句是任何一个程序必不可少的语句,其功能是实现数据的输入、输出,为了使输入、输出更清楚,可以设计提示信息,用引号引起来,与变量之间用逗号隔开.

(2)赋值语句是最重要的一种基本语句,也是一个程序必不可少的重要组成部分,使用赋值语句,一定要注意其格式要求,如:赋值号左边只能是变量而不能是表达式;赋值号左右两边不能对换;不能利用赋值语句进行代数式计算等.

(3)利用赋值语句可以实现两个变量值的互换,方法是引进第三个变量,用三个赋值语句完成.

跟踪练习

3. 根据给出的程序段,分别写出运行后输出的结果.

(1)程序段:

```
A=5;
A=A*3
print (%io(2),A)
```

(2)程序段:

```
t=M;
M=N;
N=t;
print (%io(2),N)
```

4. 写出由直角三角形的两直角边 a 、 b 求斜边 c 的程序.

条件语句的应用 (山东 胡大波)

1. 用在分段函数中

例 7 已知 $y = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 2.5) \\ x^2 - 1 & (x > 2.5) \end{cases}$, 设计一个

算法并画出程序框图,编写出程序,根据输入 x 的值,计算 y 的值.

分析:这是一个分段函数求值问题,计算前,应对自变量进行判断,这需要用条件结构.

解答:算法如下:

- S_1 输入 x ;
 S_2 如果 $x \leq 2.5$, 则 $y = x^2 + 1$;
 如果 $x > 2.5$, 则 $y = x^2 - 1$;
 S_3 输出 y .

程序框图如图 1-1-5, 程序如下:

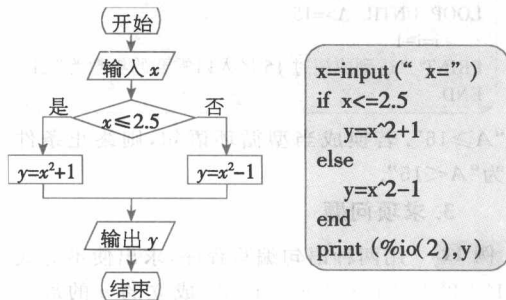


图 1-1-5

点评: 条件语句主要用来实现算法中的条件分支结构, 因为人们对计算机运算的要求并不仅限于一些简单的运算, 而是经常需要计算机按条件进行分析, 比较, 判断, 并按判断后的不同情况进行不同处理, 如判断一个数的正负, 比较两个数的大小, 对一组数据进行排序等很多问题的解决都需要用到条件语句。

2. 用在比较大小中

例 8 有三个整数 a, b, c , 由键盘输入, 输出其中最大的数, 写出该问题的程序语句。

分析: 本题实质上是求三个数的最大值, 输出最大值的问题, 必须判断谁大, 才能确定输出谁, 因此要设计该问题的算法, 必须通过条件结构来实现, 相应地程序也应该用条件语句来书写。

解答: 程序如右:

点评: 该题的算法具有通用性和灵活性, 稍微改动即可改为输出 a, b, c 中最小数的算法, 也可加进几个数, 从更多的数中求出最大者或最小者。

```

a=input("a=")
b=input("b=")
c=input("c=")
m=a
if b>m
    m=b
if c>m
    m=c
end
print (%io(2),m)
end
  
```

【规律解读】

1. 如何使用条件语句

(1) 条件语句用来实现算法中的条件分支结构, 在一些需要按给定条件进行比较、判断的问题中, 如判断一个数的正负, 比较两个数的大小等, 常用条件语句设计程序。

(2) 条件语句主要有两种格式, 一是 if—else—end 格式, 它有两个语句序列; 二是 if—end 格式, 它仅有一个语句序列。

(3) 在一些较为复杂的问题的算法描述中还要用到复合的条件语句, 它一般是在条件语句的 else 分支语句中再设计一个条件语句。

(4) 求分段函数值时往往需要用到条件语句, 有时还需要用到条件语句的嵌套。

2. 条件语句的应用

条件语句的应用主要体现在三个方面: 一是应用条件语句设计程序; 二是根据程序画框图; 三是分类讨论与条件语句的综合运用。

跟踪练习

5. 试写一个程序, 求函数

$$y = \begin{cases} x+1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ x & (x > 0) \end{cases} \text{ 的函数值.}$$

6. 任给 20 个数, 要求输出其中的正数、负数、零的个数, 试设计程序。

循环语句的应用

(山东 李志勤)

1. 累加问题

例 9 写出计算 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 999^2$ 的程序, 并画出相应的程序框图。

分析: 由题意知各项指数相同, 底数相差 2, 可以借助循环语句设计算法。因为次数是确定的, 因而在使用循环语句时选择当型循环。

解答: 程序如下, 程序框图如图 1-1-6:

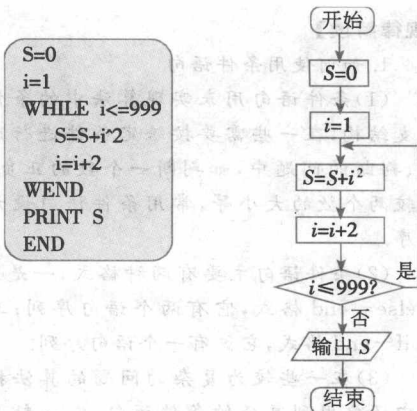


图 1-1-6

点评:本题是求一系列指数幂的和的问题,并且指数相同底差恒定,可以借助于循环程序来解决。由于指数确定,所以可选择当型循环来处理。由题意可得底数差是2,所以在循环体中变量变化的步长是2。建议:用当型循环语句解决相关问题时,要注意其格式的准确运用。本题的算法设计具有灵活性和通用性,如计算 $2^2+4^2+6^2+\cdots+1\,000^2$,只需将“ $i=1$ ”改为“ $i=2$ ”,“ $i\leq 999$ ”改为“ $i\leq 1\,000$ ”即可,而计算 $1^3+3^3+5^3+\cdots+999^3$ 只需将“ $S=S+i^2$ ”改为“ $S=S+i^3$ ”即可。

2. 累积问题

例 10 2000 年我国的人口为 13 亿,如果人口每年的自然增长率为 0.007,那么多少年后我国的人口将达到 15 亿? 请设计一个算法程序解决这个问题。

分析:本题是一道关于平均增长率的问题,即 $y=a(1+x)^n$ 型问题,也可视为累乘问题,借助循环语句来解决。

解答:程序如下:

点评:弄清循环执行次数与 i 的关系(即执行次数 $= i-1$)是求解本题的关键。通过本题看一下应用循环语句编写程序的“条件三部曲”: (1)给循环语句中的变量赋初始值 $A=13, R=0.007, i=1$; (2)找出在程序中反复执行的部分,即循环体: $A=A(1+R), i=i+1$; (3)找出控制循环的条件。本题中采用直到型循环语句编写程序,所以终止循环的条件为

```

A=13
R=0.007
i=1
DO
    A=A*(1+R)
    i=i+1
LOOP UNTIL A>=15
i=i-1
PRINT "达到或超过 15 亿人口需要的年数为"; i
END
  
```

“ $A\geq 15$ ”。若换成当型循环语句,则终止条件为“ $A<15$ ”。

3. 求项问题

例 11 用两种语句编写程序,求出使不等式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3<1\,000$ 成立的 n 的最大整数值。

分析:本题是知道一系列项的和,求项的问题,所以可用循环语句来解决。

解答:解法一:利用 WHILE 语句编写程序,如程序一。

```

s=1
i=2
WHILE s<1000
    a=i^3
    s=s+a
    i=i+1
WEND
i=i-2
PRINT "使不等式成立的
n 的最大整数值
为"; i
END
  
```

程序一

```

s=1
i=2
DO
    a=i^3
    s=s+a
    i=i+1
LOOP UNTIL s>1000
i=i-2
PRINT "使不等式成立的
n 的最大整数值
为"; i
END
  
```

程序二

解法二:利用 UNTIL 语句编写程序,如程序二。

点评:本题是由和求项的问题,也属于累加问题,可用循环语句来解决。利用当型循环语句时要准确把握好语句格式。在输出变量“ $i=i-2$ ”上要有验证的思想,在型循环语句与直到型循环语句中判断条件的先后顺序上要注意区别。在循环终止的条件上也是有所不同的。当型中是“ $s<1\,000$ ”,而直到型中是“ $s>1\,000$ ”。

【规律解读】

循环语句主要用来处理算法中的循环结构,在处理一些有规律的重复计算问题时,如累加求和、累乘求积等问题时常常用到循环语句编写程序。循环语句主要有两种格式,即 for 循环语句和 while 循环语句,在循环次数不确定时,可使用 while 循环语句,在 while 循环语句中,当表达式的结果为真时,执行循环体;结果为假时,停止循环。在 for 循环语句中,循环变量的值与终值比较,结果为真时执行循环体,结果为假时停止循环。

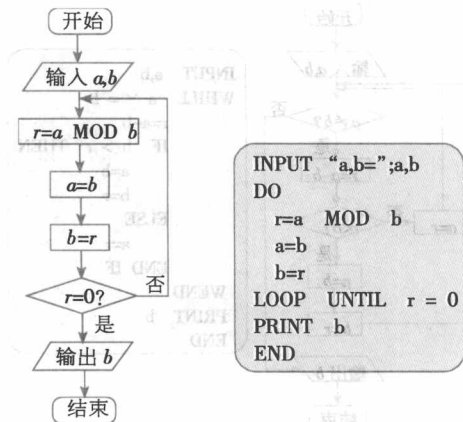


图 1-1-7

跟踪练习

- 写出求满足 $1+2+3+\dots+n>2\,011$ 的最小的自然数 n 的程序,并画出其程序框图。
- 请设计程序求 $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+99^2-100^2$ 的值。

最大公约数案例分析

1. 辗转相除法 (山东 高纬中)

例 12 用辗转相除法求 840 与 1 764 的最大公约数。

解析: 因为 $1\,764 = 840 \times 2 + 84$, $840 = 84 \times 10 + 0$ 。

所以 840 与 1 764 的最大公约数是 84。

点评: 辗转相除法的操作方法:

(1) 算法步骤: (以求 a, b 两正整数的最大公约数为例)

第一步: 输入两个正整数 $a, b (a > b)$;

第二步: 把 $a \div b$ 的余数赋予 r ;

第三步: 如果 $r \neq 0$, 那么把 b 赋予 a , 把 r 赋予 b , 转到第二步; 否则转到第四步;

第四步: 输出最大公约数 b 。

(2) 程序框图如图 1-1-7 所示;

(3) 程序如下:

(4) 辗转相除法的理论依据是: 由 $a = nb + r \Rightarrow r = a - nb$, 得 a, b 与 b, r 有相同的公约数。

2. 更相减损术

例 13 用更相减损术求 440 与 556 的最大公约数。

解答: 因为 $556 - 440 = 116$,

$$440 - 116 = 324,$$

$$324 - 116 = 208, \quad 208 - 116 = 92,$$

$$116 - 92 = 24, \quad 92 - 24 = 68,$$

$$68 - 24 = 44, \quad 44 - 24 = 20,$$

$$24 - 20 = 4, \quad 20 - 4 = 16,$$

$$16 - 4 = 12, \quad 12 - 4 = 8, \quad 8 - 4 = 4,$$

所以 440 与 556 的最大公约数为 4。

点评: 更相减损术的操作方法:

(1) 算法步骤: (以求 a, b 两正整数的最大公约数为例)

第一步: 输入两个正整数 $a, b (a \geq b)$; 第

第二步: 若 a 不等于 b , 则执行第三步, 否则执行

第五步; 第三步: 把 $a - b$ 的差赋予 r ;

第四步: 如果 $b > r$, 则把 b 赋予 a , 把 r 赋予 b ; 否则把 r 赋予 a , 执行第二步;

第五步: 输出最大公约数 b 。

(2) 程序框图如图 1-1-8 所示;

(3) 程序如下:

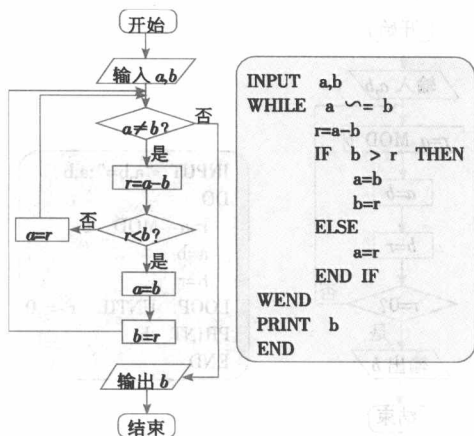


图 1-1-8

(4)更相减损术的理论依据是:

由 $a-b=r \Rightarrow a=b+r$ 得 a, b 与 b, r 有相同的公约数. 所以,辗转相除法和更相减损术有相同的理论依据,只不过一个用除法,一个用减法而已.

【规律解读】

辗转相除法与更相减损术都是求最大公约数的方法,在计算上辗转相除法以除法为主,更相减损术以减法为主,计算次数上辗转相除法计算次数相对较少,特别当两个数字大小区别较大时计算次数的区别较明显. 从结果来看,辗转相除法体现结果是以相除余数为 0 得到,而更相减损术则以减数与差相等而得到.

跟踪练习

- 求 1 734, 816, 1 343 的最大公约数.
- 用更相减损术求 80 与 36 的最大公约数.

例谈进位制的互化 (广东 许少华)

1. 将非十进制的数转化为十进制的数

如果 k 是一个正整数,则 k 进制的数可以表示为 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 (k)$ ($0 < a_n < k, 0 \leq a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0 < k$),将这个 k 进制的数转化为十进制的数,其实,就是将它表示为用不同数位上的数字与基数的幂的乘积之和的形式,即 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 (k) = a_n \cdot k^{n-1} + a_{n-1} \cdot$

$k^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot k + a_0$. 当 $k \neq 10$ 时,上述的表示就是将非十进制的数转化为十进制的数的方法.

例 14 将八进制的数 $3\ 045_{(8)}$ 化成十进制.

解答: 由 $3\ 045_{(8)} = 3 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 4 \times 8 + 5 \times 8^0 = 1\ 573$.

点评: 在将非十进制的数写成方幂时,注意两点: (1) 数位上的数字乘以基数的方幂,方幂的最高值是数位减一,以后方幂的值逐一递减,直至为零; (2) 当某数位上的数是零时,为不遗漏,也要写出零乘以相应的方幂.

2. 将十进制的数转化为非十进制的数

建立在将非十进制的数转化为十进制的数的基础上,我们可以发现,用逆推的方法可以将一个十进制的数转化为非十进制的数.

例 15 将 654 化为七进制的数.

解答: 解法一: 由于 $654 = 7 \times 93 + 3, 93 = 7 \times 13 + 2, 13 = 7 + 6$,

那么 $654 = 7 \times (7 \times (7 \times (6 + 2) + 2) + 3) = 7 \times (7^2 + 7 \times 6 + 2) + 3 = 7^3 + 6 \times 7^2 + 2 \times 7 + 3 = 1\ 623_{(7)}$.

解法二: 用 654 作被除数, 7 为除数, 得相应的算式如下:

7		654	余数
7		93	3
7		13	2
7		1	6
		0	1

由上述算式, 可得 $654 = 1\ 623_{(7)}$.

点评: 将十进制的数转化为其他进位制的数, 一般方法有两种: 一是根据秦九韶算法, 将给定的数写成基数的方幂, 通过方幂产生结论. 另一种是除 k 取余法, 即用基数做除数进行类似于短除法的运算, 将每次的余数单列, 注意必须写到最后一个, 然后余数从下至上, 就得到了所要的进位制数. 比较两种方法, 后一种方法简便易行.

3. 非十进制数的互化

例 16 将五进制的数 $3\ 242_{(5)}$ 化成八进制的数.

解答: 由 $3\ 242_{(5)} = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2 = 447$. 再用 447 作被除数, 8 为除数, 得算式如下:

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 447} \quad \text{余数} \\ 8 \overline{) 55} \dots\dots 7 \\ 8 \overline{) 6} \dots\dots 7 \\ 0 \dots\dots 6 \end{array}$$

由上述算式, 可得 $447 = 677_{(8)}$.

于是, $3\ 242_{(5)} = 677_{(8)}$.

点评: 先将五进制数 $3\ 242_{(5)}$ 转化为十进制数, 得到 $3\ 242_{(5)} = 447$, 再将十进制数 447 转化为八进制的数, 即 $447 = 677_{(8)}$, 从而产生所求结论 $3\ 242_{(5)} = 677_{(8)}$. 这是两个非十进制数互化的常规方法.

【规律解读】

进位制是一种记数方式, 用有限的数字在不同的位置表示不同的数值. 可使用数字符号的个数称为基数, 若基数为 n , 即可称 n 进位制, 简称 n 进制. 现在最常用的是十进制, 通常使用 10 个阿拉伯数字 0—9 进行记数, 对于任何一个数, 我们可以用不同的进位制来表示. 比如: 十进制数 57, 可以用二进制表示为 111 001, 也可用八进制表示为 71, 用十六进制表示为 39. 它们所代表的数值都是一样的.

跟踪练习

11. 计算机中常用的十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如: 用十六进制表示: $E + D = 1B$, 则 $A \times B$ 是 ()

A. 6E B. 72 C. 5F D. B0

12. 把十进制数 53 转化为二进制数.

例析算法常见考点 (山东 王彦青)

考点一: 基本概念

例 17 在流程图中, a 表示“处理框”, b 表示“输入、输出框”, c 表示“起、止框”, d 表示“判断框”, 以下四个图形依次为 ()



图 1-1-9

A. abcd B. dcab C. bacd D. cbad

解析: 算法流程图中的各种符号要严格遵照规定. 应选 D.

考点二: 程序运行结果

例 18 如图 1-9 所示的程序执行后输出的结果是 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

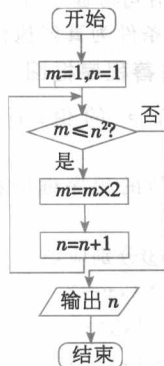


图 1-1-10

解析: 执行过程为:

- (1) $m=1, n=1 \Rightarrow m=n^2$;
- (2) $m=2, n=2 \Rightarrow m < n^2$;
- (3) $m=4, n=3 \Rightarrow m < n^2$;
- (4) $m=8, n=4 \Rightarrow m < n^2$;
- (5) $m=16, n=5 \Rightarrow m < n^2$;
- (6) $m=32, n=6 \Rightarrow m < n^2$;
- (7) $m=64, n=7 \Rightarrow m > n^2$.

输出结果为 7. 所以应选 D.

点评: 本题考查程序框图的知识, 要求先读懂框图, 再应用数学知识处理问题.



考点三:算法语言

例 19 下列程序:

```

INPUT "n=";n
s=1
k=1
WHILE k<=n
    s=s*2
    k=k+1
WEND
PRINT s
END
    
```

若输入 8, 所得结果为_____.

解析: 本题考查对 WHILE 循环语句的理解. 针对输入值 $n=8, k=1$, 满足 $k \leq n$, 则循环体重复执行 8 次, 计算的是 $s=2^8$ 的值, 故应填 256.

点评: 用 while 语句写程序时, 要注意 while 右边的条件, 只要条件为真就执行循环体.

考点四:完善程序框图

例 20 任给 x 的值, 计算函数 $y = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ 中 y 值的程序框图如图 1-1-11 所示, 其中①, ②, ③分别应填 ()

- A. $x > 1, x > 1, y = 3$
- B. $x = 1, x > 1, y = 3$
- C. $x < 1, x = 1, y = 3$
- D. $x < 1, x > 1, y = 3$

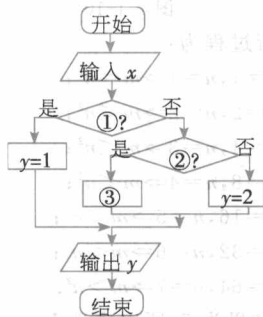


图 1-1-11

解析: 首先注意到判断①“是”时, $y=1$, 则①应该是“ $x < 1$ ”;再看②, 由于“否”时, $y=2$, 会想到②应该是“ $x > 1$ ”;当“ $x > 1$ ”时, $y=3$. 故

应选 D.

点评: 该函数是分段函数, 当 x 取不同范围内的值时, 函数表达式不同, 因此当给出一个自变量 x 的值时, 必须先判断 x 的范围, 然后确定利用哪一段的解析式求函数值.

考点五:算法功能

例 21 下列程序的功能是 ()

```

S=1
i=1
WHILE S<=2 011
    i=i+2
    S=S*i
WEND
PRINT i
END
    
```

- A. 求 $1+3+5+\dots+2\,011$ 的值
- B. 求 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2\,011$ 的值
- C. 求方程 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times n = 2\,011$ 中的 n 值
- D. 求满足 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times n > 2\,011$ 的最小整数 n

解析: 从第三步可以看出这是一个积的运算, 同时又使用了 WHILE 循环语句, 故应排除 A, B, C, 即应选 D.

【规律解读】

算法的常考点为: 算法的概念及含义, 算法思想、程序框图及其规则, 算法的三种基本结构: 顺序结构、条件分支结构、循环结构; 用数学语言写出算法并实现与程序框图的转换; 赋值语句、输入语句和输出语句的定义及用法, 用条件语句描述条件分支结构的算法, 用循环语句描述循环结构的算法.

跟踪练习

- 13. 设计一个算法, 计算 $1^2+4^2+7^2+\dots+100^2$ 的值, 并画出程序框图.
- 14. 为计算 $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 99$ 的值, 请画出程序框图.

高考命题透视

(山西 李伟)

例 22 如果执行下图的程序框图, 那么输出的 S 等于 ()

- A. 2 450
C. 2 550

- B. 2 500
D. 2 652

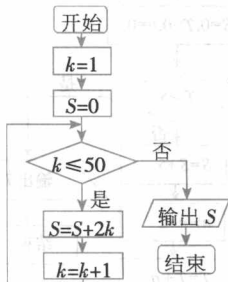


图 1-1-12

解析: 据程序框图 1-1-12 可知: $k=1, S=0$, 满足 $k \leq 50$,

所以 $S=0+2 \times 1=2, k=2$;

满足 $k \leq 50$,

所以 $S=2+2 \times 2=2+4, k=3$;

满足 $k \leq 50$,

所以 $S=2+4+2 \times 3=2+4+6, k=4$;

……

满足 $k \leq 50$,

所以 $S=2+4+6+\cdots+2 \times 49, k=50$;

满足 $k \leq 50$,

所以 $S=2+4+6+\cdots+2 \times 50, k=51$;

不满足 $k \leq 50$,

所以输出 $S=2+4+6+\cdots+2 \times 50$
 $=2 \times (1+2+3+\cdots+50)$
 $=51 \times 50=2\ 550$.

故应选 C.

点评: 本题重点考查循环结构. 解题的关键是读懂框图, 仔细分析, 列出过程. 在运行的过程中, 特别要注意赋值语句的准确运用: 赋值号右边的值赋给左边的变量, 同时冲掉变量中原来的数值.

例 23 图 1-1-13 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ (如 A_2 表示身高(单位: cm)在 $[150, 155)$ 内的学生人数).

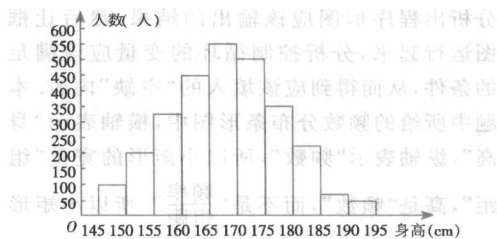


图 1-1-13

图 1-1-14 是统计图中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 cm ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内“?”处应填写的条件是

A. $i < 6$

B. $i < 7$

C. $i < 8$

D. $i < 9$

图 1-1-14

解析: 要统计身高在 160 cm ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 就是要计算 A_4, A_5, A_6, A_7 的和; 让框图运行起来, 分析循环变量 i 的取值以控制循环次数, 使得求出的 S 正好是 $S=A_4+A_5+A_6+A_7$ 即可.

由程序框图可知: 输入 $A_1, A_2, \dots, A_{10}, S=0, i=4$, 应该符合条件“?”;

所以 $S=0+A_4, i=4+1=5$, 应该符合条件“?”;

所以 $S=A_4+A_5, i=5+1=6$, 应该符合条件“?”;

所以 $S=A_4+A_5+A_6, i=6+1=7$, 应该符合条件“?”;

所以 $S=A_4+A_5+A_6+A_7, i=7+1=8$, 应该不符合条件“?”条件, 然后才能输出 $S=A_4+A_5+A_6+A_7$.

故“?”应该是“ $i < 8$ ”或“ $i \leq 7$ ”, 故选 C.

点评: 本题以条形图为背景考查算法, 把程序框图和条形图很自然地交融在一起, 要求“填空缺”, 新颖独特; 解题的关键是通过条形图