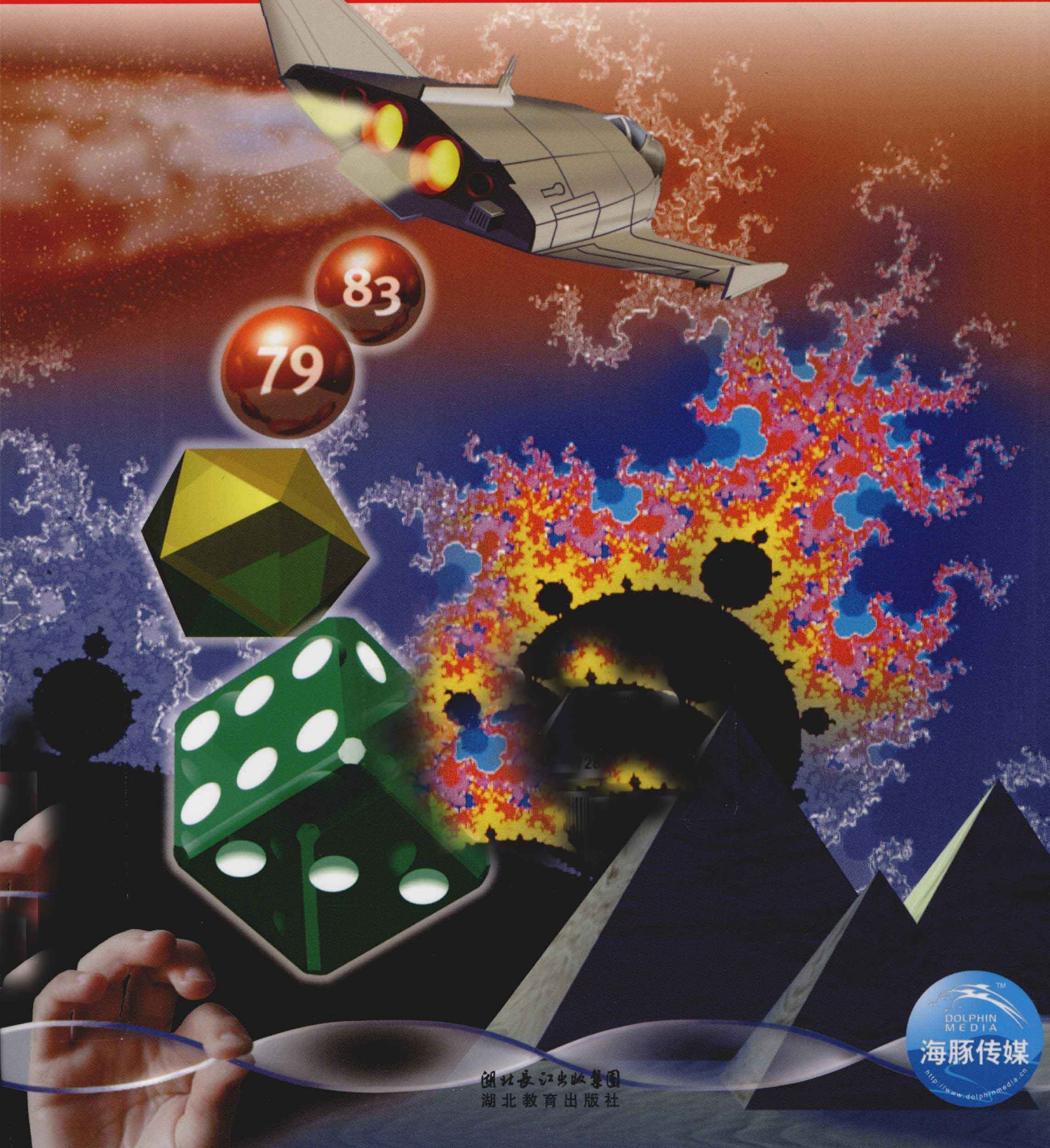
WAS IST WAS

德国少年儿童百科知识全书

# 数学的魅力

[德]沃尔夫冈·布卢姆/文　[德]约阿基姆·克纳珀/图




DOLPHIN MEDIA
海豚传媒
http://www.dolphinmedia.cn
湖北长江出版集团
湖北教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学的魅力/[德]沃尔夫冈·布卢姆文；[德]约阿基姆·克纳珀图；徐侃译. —武汉：湖北教育出版社，2009.11
（什么是什么）
ISBN 978-7-5351-5505-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①沃…②约…③徐… Ⅲ.①数学—青少年读物 Ⅳ.①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第186938号
著作权合同登记号：图字17-2008-120

**数学的魅力**

[德]沃尔夫冈·布卢姆/文　[德]约阿基姆·克纳珀/图
徐　侃/译　责任编辑/赵　晖　黄　刚
装帧设计/王　中　美术编辑/鲁　静
出版发行/湖北教育出版社　经销/全国新华书店
印刷/上海中华商务联合印刷有限公司（100144）
开本/889×1194　1/16　3印张
版次/2010年3月第2版第2次印刷
书号/ISBN 978-7-5351-5505-4
定价/15.00元

**Mathe matik**

By Wolfgagn Blum
Illustrated by Joachim Knappe

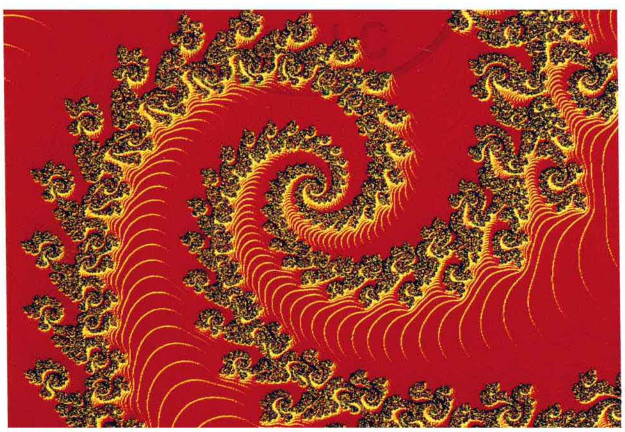


策划/海豚传媒股份有限公司　网址/www.dolphinmedia.cn　邮箱/dolphinmedia@vip.163.com
咨询热线/027-87398305　销售热线/027-87396822
海豚传媒常年法律顾问/湖北立丰律师事务所　王清博士　邮箱/wangq007_65@sina.com

WAS IST WAS

# 数学的魅力

[德]沃尔夫冈·布卢姆／文
[德]约阿基姆·克纳珀／图
徐　侃／译



湖北长江出版集团
湖北教育出版社

# 前　言

数学是最古老的科学之一。早在2000多年前由希腊数学家泰勒斯、阿基米德、欧几里得所证明的数学定理，在今天依然适用。还有哪一门学科的理论可以维系如此之久呢?

我们生活在一个数学的时代。日常生活中越来越多的技术都与之密切相关，没有数学的帮助，我们的生活将无法想象。计算机的运用不仅没有使数学显得多余，反而更加突显了它的重要性。那些控制计算机的程序只不过是对数学的应用。

数学中除了数字以外，还包含着空间概念。它最早源于人们对空间中心位置的兴趣。此外，还因为人们需要丈量土地，以及在航海中确定航向和目的地。直到今天，科学家们仍在致力于对空间的研究。最近，他们找到了一种全新的方法——分形几何来对空间进行描述。

数学家也试图解决概率问题。300年前，贵族们为了能在赌博中获利，专门花钱请学者们为他们进行估算。现在，计算机如果离开了概率论将无法想象。假如不是数学家们为客户算出适当额度的费用，保险公司可能早就破产了。自古以来，在政治与军事上人们一直都在使用密码。与此同时，密码也融入了老百姓的生活之中。从事密码研究的数学家们，使得在银行取款机上提款以及在网上购物都成为了现实。

像其他学科一样，数学近几十年来的发展速度已远远超过了以往任何时代，本书不可能一一详述。如今，每年都会涌现出数以千计的研究成果。即使是专业人士也不能随时跟上所有数学分支学科的发展进度。然而，本书可以让你了解这个闪烁着智慧之光的神奇世界。

**图片来源明细**

**照片：**作者档案室：32/33，34；艺术与历史档案室(柏林)：6，11，15，17，26，29，30，36右下，41，47；DPA：36左上，43；Focus(汉堡)：1，玛丽・埃芬斯图片室(伦敦)：21，25；乌尔施泰因图片资料室(柏林)：12，43左上；ZEFA图片工作室(杜塞尔多夫)：45下

**插图绘制：**约阿基姆・克纳珀

# 目　录

# 数学不仅仅是计算

## 数学涉及哪些方面？

为了能在一座陌生的城市中找到合适的路，人们通常会使用城市地图。地图会显示所有的街道，但不会显示一些细节部分。例如，车道是铺石路面，还是沥青路面，这里是居民住宅，还是办公写字楼，都无从得知。图中所标示出来的，都是问题的关键。再如，从出发地到目的地应该走哪条街道。

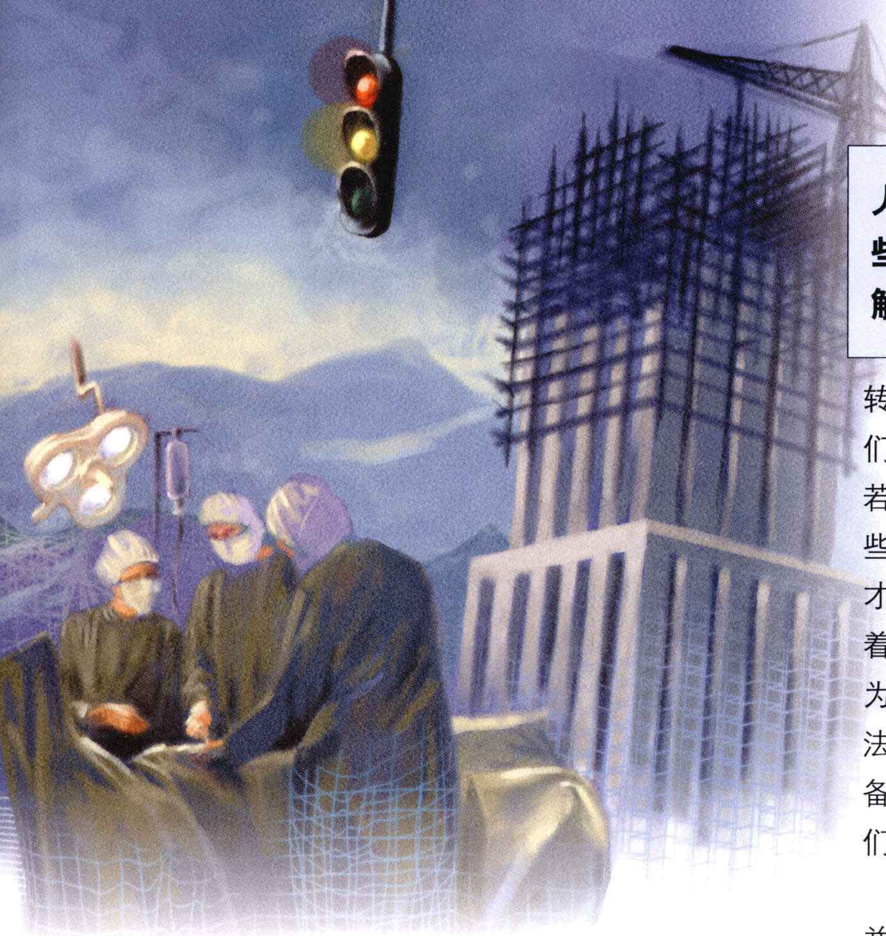
处理数学问题的过程与查阅地图十分相似：人们把那些对于解决问题没有帮助的条件放在一边，而着手于问题的实质。数学家称之为“抽象化”。数字就是一个最好的例证。数字3既不代表“3个苹果”，也不代表“3个梨”，它表示“任何事物的3个单位”。同样如此，数学中的球体并不是代表一个特定的球，比如台球、篮球，而表示的是其形状本身。

查阅地图的人就在运用着数学，可能他自己都没有意识到这一点。尽管所要寻找的街道在地图中只是一些线条，而人们仍可以在忽略房屋、汽车以及行人这些事物的情况下，找到目的地。

数学通常被称为“科学中的女皇”，其中所涉及的不只是计算，更重要的是逻辑关系的辨别（当

**永远正确**

数学是最古老的科学之一。它在所有古老的文化，例如在古中国、古埃及、古巴比伦以及古希腊文化中早就占有一席之地。与其他科学相比，在数学中一次所得出的结论将永远正确。像今天的2+2=4，在古希腊时期也同样成立，即使在下个世纪，这个结论也依然正确。



在汽车、飞机、计算机、现代医学等行业中，数学无处不在。

**数学的美感**

英国数学家戈弗雷·哈罗德·哈代（1877—1947）曾写道：“数学家的著作应当同画家或诗人的作品一样美丽。他们的数学思想应当像画中的颜色、诗中的文字一样有和谐之美。”数学的美感，对于非专业人士来说也许很难理解，但对于专业人士就全然相反。其中，最经典的例子就是欧几里得对质数无穷性（参见第15页）以及毕达哥拉斯定理（参见第27页）的证明。

然，计算能力无疑是运用数学的一个先决条件）。876乘以357所得到的积，这样的一个大数并不能算作是数学上的成就，但由此可以得知，根本就不存在一个最大的数字，因为将一个数字加上1，就可以得到一个更大的数。

同时，数学中的一些分支学科与数字并没有太大的联系。例如，几何所研究的就是像三角形、圆形或球体这些图形的形状及其性质。概率论主要研究的是像掷骰子这样的随机事件。

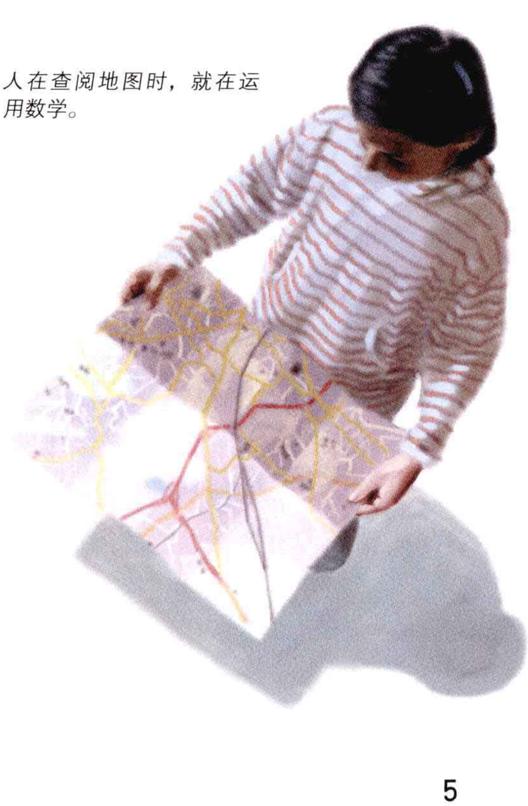
在这些领域里，数学家们同样也发现了它们与数字世界的联系。例如，人们可以利用线段或球体的性质来计算它们的几何数据。

## 人们可以从哪些方面着手了解数学？

如果没有数学就不会有电视、汽车、电、电冰箱。数学已经渗透进了我们社会中的许多技术领域。在转化成应用领域中的产品之后，我们往往再也看不到数学的影子，但若没有数学，人们就无法制造出这些产品。因为数学，许多机器设备才得以运转。一些复杂的计算控制着汽车中的发动机与尾气处理器。为了能读出CD中的音乐，数学方法必不可少。同时，计算机必须具备数学上的严谨逻辑。严格说，它们都应被称为数学机器。

数学的特点在于，它极其抽象并能将每个问题回归到它的核心。同时，在那些初看起来完全不同的问题中能找到共同点。例如，不管是一座崭新的水电站，还是一架安静的飞机，不管是婴儿的尿布还是铸

人在查阅地图时，就在运用数学。



造中的金属，都有一些流动着的物质。这些物质是水、空气、尿液，还是液态的金属，这并不重要。而有待处理的方案却是相同的。数学方案一旦制定，对于以上四个对象来说就都适用。同样，数学家在处理公交车时刻表、垃圾收集以及计算机芯片设计这一类问题时，每次都要将关联路径尽可能地降到最短。

不仅工程师与技术人员需要数学，自然科学（还有越来越多的人文科学）也同样离不开数学。无论是物理、化学还是生物，都少不了要用到数学公式。

现在，数学被应用在世界上不同的领域，包括科学、工程学、医学和经济学等。数学对这些领域的应用通常被称为应用数学。在应用过程中，有时也会激起新的数学发现，并带来全新学科的发展。

## 数学家都做些什么？

许多数学家一直都在致力于研究，如何将数学理论转化到现实之中。在今天，这一过程通常借助计算机来实现。还有一小部分人，被人们称为纯数学家，他们尝试着拓展新的理论。于是，一些相应的定理或定律就由此而来。

例如，有一个数学定理是这样的："若一个数的数字和能被3整除，则该数字也能被3整除"（数字和是指把各位上的数字加起来所得到的和。比如，84的数字和为8+4=12）。对于定理，仅仅有这样的命题，数学家是不会感到满意的。他们尝试着对其进行证明，也就是说根据已知的条件与定理，来对该命题假设进行严密的逻辑论证。要证明之前所提到的命题，如果只是给出一系列算式列表：

1＋2＝3 能被3整除，
12＝3 · 4能被3整除；
4＋5＝9 能被3整除，
45＝3 · 15能被3整除；
8＋1＝9 能被3整除，
81＝3 · 27能被3整除。

这对于数学家而言也是远远不够的。即使由计算机算出一份有上百行的算式列表，也并不具有说服力。因为在接下来的一行算式中，命题假设就有可能不成立。

就算命题假设有相应的一些例证，或者并没有同行对此提出质疑，数学家也不会就此罢休。因为对他们来说，唯一有效的方式就是论证。至于刚才所提到的命题假设在数学上如何进行严密论证，我们稍后会了解（参见第13页）。

## 数学与自然科学有什么区别？

在物理、化学或生物学中，只要有足够的例证就可以证明一项理论的正确性。例如，一些例证可以通过实验结果来得到。然而不同的是，数学并不依靠实验，而是靠严密无误的逻辑推理。

它们的区别可以通过一个例子得到体现：一副国际象棋棋盘有8 · 8＝64块方格。现在我们去掉

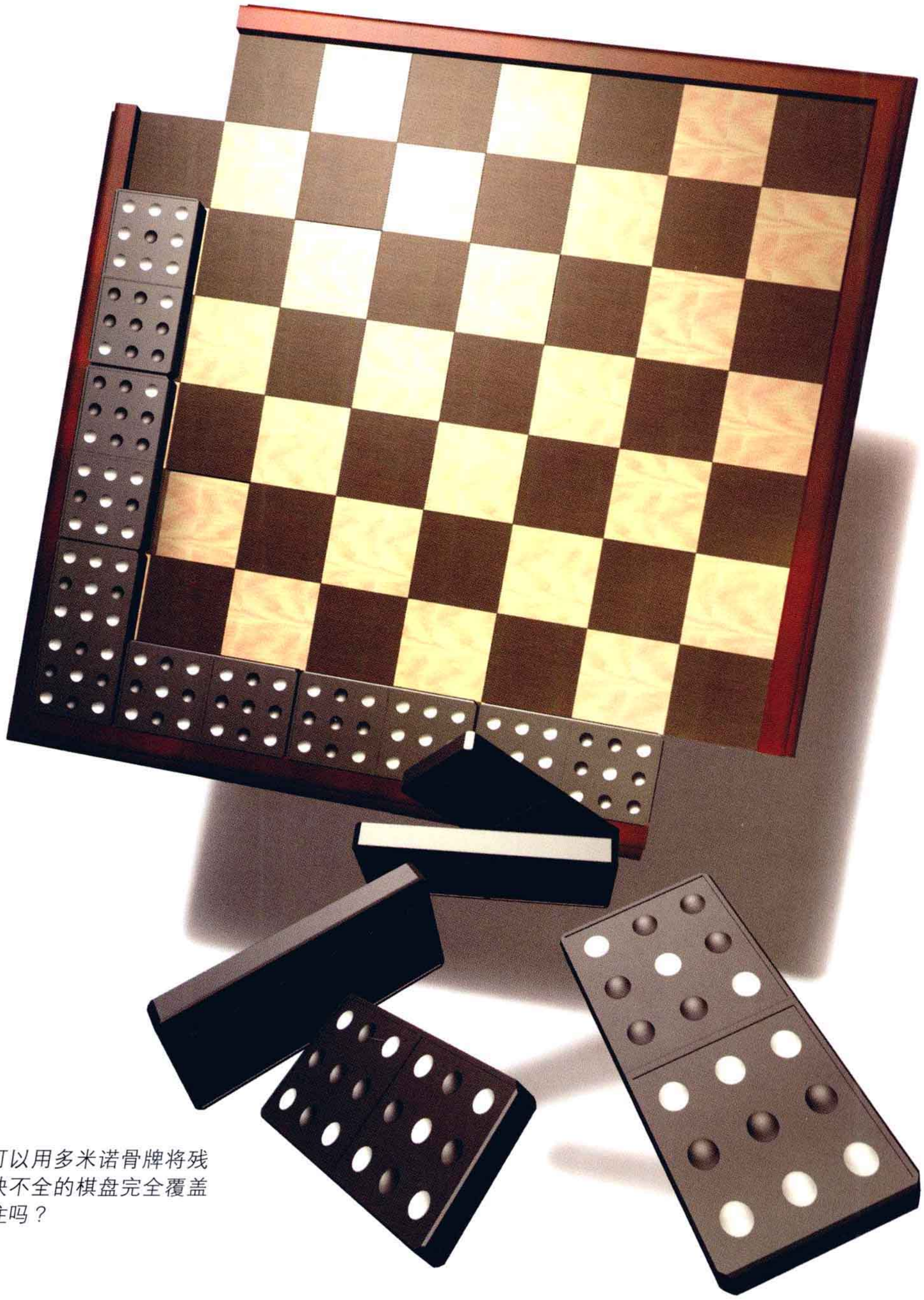
意大利大学者**伽利略·伽利莱**（1564—1642）曾写道："宇宙如同始终向我们敞开着的一本书，哲学就蕴藏在这样一本伟大的书中。如果人们之前没有学过书中的语言，就无法读懂该书的内容。值得庆幸的是，这本书是以数学为语言来描述的，上面的文字都是像圆形、三角形以及其他几何形状。若没有数学人类将无法读懂其中任何一个字，没有数学人类将仍然游荡在一个黑暗的迷宫之中。"

### 分支学科

每年都会有超过60 000份数学研究论文被公开发表。其中，每篇论文里都至少会含有一个新的数学公式。鉴于这种状况，今天再没有哪个数学家可以了解，并掌握整个数学所有分支的发展状况。数学家只能将其研究工作限制在他所涉及的几个分支领域中。同其他科学一样，数学现在也被划分为无数个分支领域。

### 数学逻辑

严密的数学逻辑也反映在许多笑话上。例如，一位工程师、一位物理学家和一位数学家一起乘火车穿越苏格兰。在旅途中，当火车从一只黑色绵羊身边经过时，工程师会说："噢，苏格兰的绵羊是黑色的。"接着，物理学家就会纠正道："在苏格兰至少有一只黑色的绵羊。"针对这个结论，数学家补充道："在苏格兰至少有一只绵羊，它至少有一面是黑色的。"



*可以用多米诺骨牌将残缺不全的棋盘完全覆盖住吗？*

对角线上两块方格，剩下62块。一块多米诺骨牌的长度为一块棋盘方格的两倍，那么，可以用31块多米诺骨牌，将这张残缺不全的棋盘完全覆盖住吗?（参见上图）

自然科学家就开始反复试验，将骨牌以各种形式进行摆放。几分钟之后，他们便发现骨牌无法完全覆盖住整个棋盘。于是他们得出结论，该问题可能无法解决。由于骨牌有上百万种摆法，自然科学家自己也不敢完全肯定结论的正确性。也许有人会给出一个解决方案。对于数学家来说，他们一定要通过逻辑上的关系来寻找解决这个问题的答案。他们认为：现在有30块白方格和32块黑方格。而棋盘的颜色是相互交错的，于是会有30块黑色与白色方格被覆盖住。由于骨牌不可能同时覆盖两块相同颜色的方格，剩下的两块黑色方格就不能用一张骨牌覆盖住。

# 数　字

数学中有很大一部分都和数字有关。其中，最常见的就是自然数。例如：1，2，3，4……等等。自然数是人类历史上最早出现的数，自然数在计数和测量中有着广泛的应用。人们还常常用自然数来给事物标号或排序，如城市的公共汽车路线，门牌号码，邮政编码等。然而，自然数中却不存在最大的数，因为只需在每一个可以想象得到的数上加1，就可得到一个更大的数。同样，自然数的个数也是无穷的，最小的自然数是1。

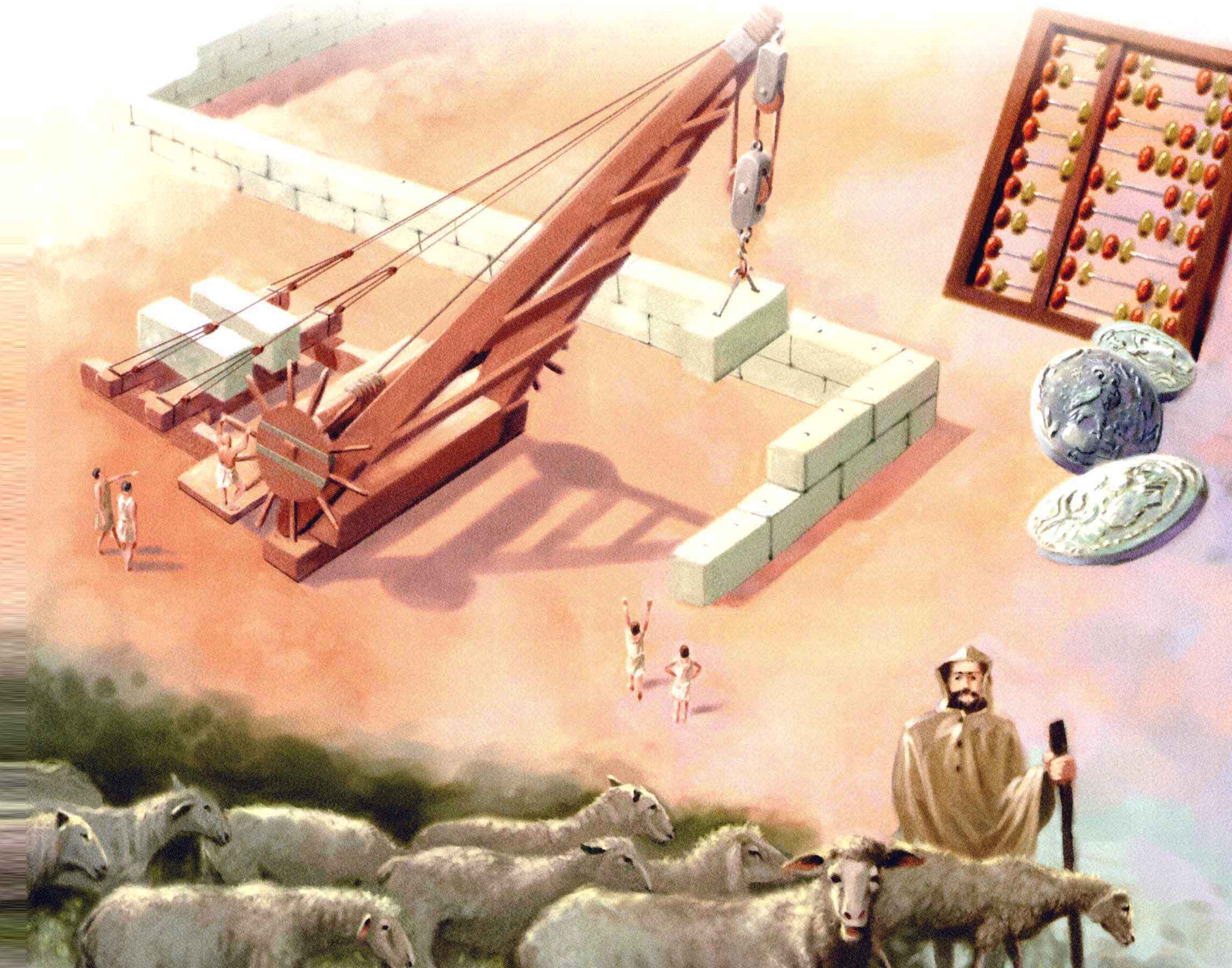
**什么是自然数？**

把两个自然数相**加**，所得的结果又是一个自然数，我们称之为**和**。两个自然数相乘，其结果也是一个自然数，我们称之为**积**。例如：6・7=42，我们可以说42既可被6又可被7整除。由于42・1=42，因此不仅是42，每个自然数既可被1又可被其自身整除。若将42除以5，便会产生余数2，即：42=8・5+2。

如果一个算式中带有括号，那么括号中的等式要先进行计算。例

**大　数**

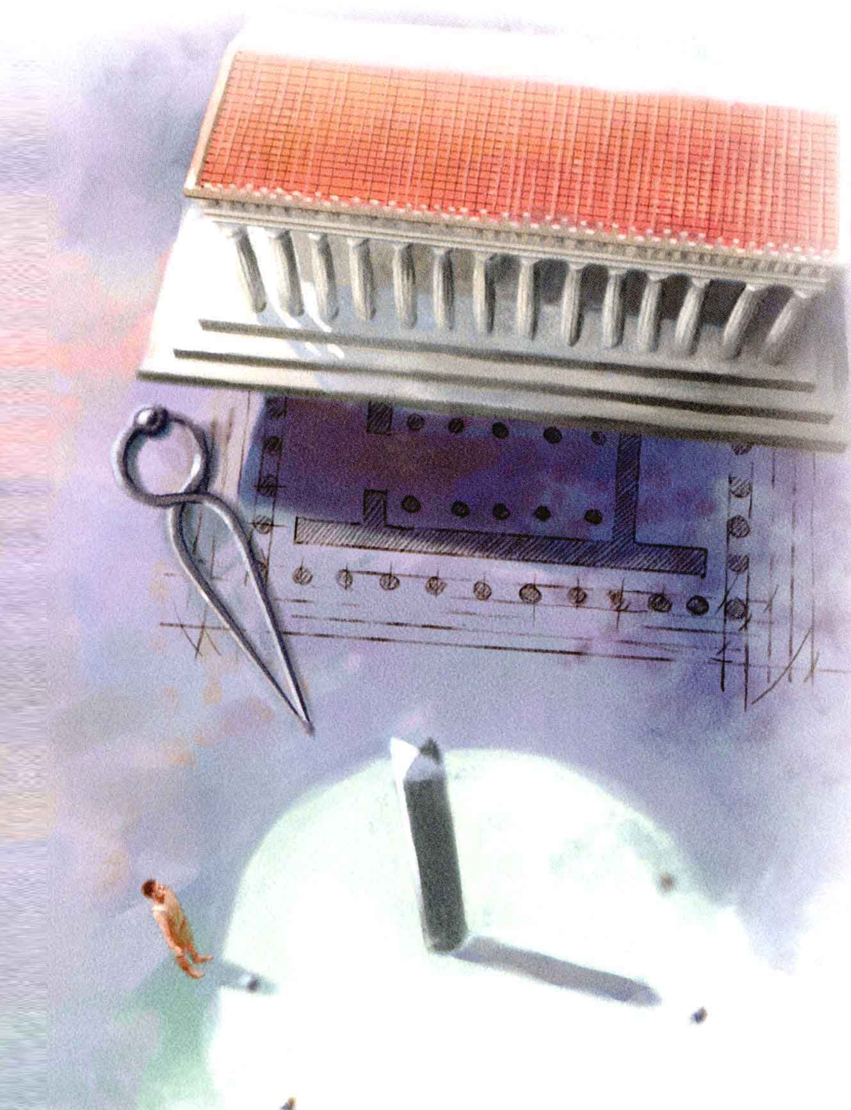
**一百万**等于一千乘以一千，即在1后面加上6个零：1 000 000。而**十亿**等于一千个一百万相加，即在1后面加上9个零。**一万亿**等于一千个十亿相加，即在1后面加上12个零。**一千万亿**等于一千个一千亿相加，即1后面加上15个零。



### 更大的数

为了避免写太多的零，科学家们用10的幂来表示这些较大的数。一百万写作$10^6$，十亿写作$10^9$，万亿写作$10^{12}$，千万亿写作$10^{15}$。更大的还有百亿亿（$10^{18}$），十万亿亿（$10^{21}$），亿亿亿（$10^{24}$），千亿亿亿（$10^{27}$）。

*随着人类历史的发展，数字显得更加重要。例如，人们在数牲口时，在建造房屋时，或在进行交易时，都要用到数字。*



如，$5\cdot(4+3)=5\cdot7=35$。若不考虑算式中的括号，而是简单的从左至右进行运算，就会得出另外的结果：$5\cdot4+3=23$。

当然，如果将上式括号中的每个数都乘以5，然后再进行相加，同样也可以得到正确结果，即$5\cdot(4+3)=5\cdot4+5\cdot3=20+15=35$。

如果一个数能被2整除，那么我们称这样的数为**偶数**，反之就称为**奇数**。偶数即为：2，4，6，8，10，12，…，奇数则是：1，3，5，7，9，11，13，…

一个数乘以自身，称为**幂**。写作：$3\cdot3=3^2=9$，读作：3的2次方，或3的2次幂，或3的平方。而$4\cdot4\cdot4=4^3=64$，读作：4的3次方，或4的3次幂。类似的还有，$2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$，读作：2的4次方，或2的4次幂。

为了完备起见，数学上还使用一次幂。一个数字的1次方就是该数字本身，例如：$5^1=5$。同样也有0次幂，任何数字的0次幂等于1，例如：$6^0=1$。

## 谁发明了数字？

与其他许多事物的发明和使用一样，历史上数字的产生或许也经历了多次摸索和反复，因为人类需要数字。比如，假设一位猎人想用猎捕到的剑齿虎来和邻居交换3支标枪，或一位原始人想向同伴讲述他在附近看到的四头猛犸象，这都要用到数字。

在位于非洲中部的刚果，那里的居民被称为伊珊郭族。在当地的一个考古遗址中，人们惊讶地发现，早在远古时期的居民，就已经在使用数字了。考古学家在遗址中挖掘出一个有着约11 000年历史，由骨头制成的工具（参见第10页插图）。在这些工具上有好几组刻下的凹痕。其中一个位置有11道凹痕，另几个位置分别有13道、17道和19道凹痕。考古学家认为伊珊郭人就是这样计数的。这些看起来似乎简单，但绝非偶然。

如今，在许多偏远地区的部落，人们对数字的认知程度与小孩子差不多。他们只能认识有限的几

要想出售绵羊的人，必须熟悉和掌握数字。

个数字，对于其他一切，他们只能用“许多”来形容。数字对于人类越来越重要。一个地方生活的人越多，分工越细，他们就越需要数字。比如，牧羊人想了解他的羊群里有多少只羊，一只羊能换多少棵菜。在市场上，买卖双方需要进行讨价还价。在航海中的人为了顺利抵达目的地，必须知道正确的航向。有了数字人们可以对时间、距离、面积以及体积进行计算。古埃及人为了建造金字塔，必须得估计出所需的石块数量。对于如此复杂的工作，人们必须用相应的数字进行记录。

## 什么是进位制？

今天，我们所使用的“阿拉伯数字”，在约900年前由印度传入阿拉伯。其中一个巨大的突破是：每一个数字在不同的数位上可以表示不同的数值。例如，1如果在个位上就表示1，若在第三位即百位上则表示100。这样一来，就算数字再大，都可以用0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这10个数字来表示。当我们写一个数字时，会将其按照个位、十位、百位、千位、万位……即**10的乘方**来划分。

$10^0=1$，$10^1=10$，$10^2=10\cdot10=100$，$10^3=10\cdot10\cdot10=1000$，$10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10=10\ 000$，…

263只是$2\cdot10^2+6\cdot10^1+3\cdot10^0$的一个简写形式，而5007可以写成$5\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10^1+7\cdot10^0$。

然而，当时古埃及、古希腊与古罗马人并不了解这一原则。例如，在罗马数字中，I代表1，V代表5，X代表10，L代表50，C代表100，D代表500，M代表1000。如果想表示这些数值之间的数，则靠重复书写那些符号来表达。例如：III表示3，XXXVII表示37。这

### 伊珊郭骨

在伊珊郭骨头上刻下的一组为11，13，17，以及19的凹痕，到底是巧合还是人们有意记录的，这直到今天仍然还是个谜。因为11，13，17以及19是10到20之间，只能被1和自身整除的数字。我们把具有这种性质的数字称为质数（参见第14页）。

带有凹痕，用以记录数字的伊珊郭骨头。

### 原始计数方法

一个居住在巴西热带雨林中，名为巴凯里的部落，称1为“特凯勒”，2为“阿汉格”。接下来的数就用前面这两个数连接在一起表示。例如“阿汉格特凯勒”就表示3，以此类推可以一直表示到6。此外，巴凯里人还借助手指与脚趾来计数。当数字超过20时，他们就懊恼得直抓自己头发，嘴里喊着“梅拉，梅拉”。

### 数字符号

每个数字对应着一道划痕，伊珊郭族人这种简单的计数方法很快就跟不上需要了。谁愿意连续刻下100甚至是1000道凹痕呢？又有谁愿意来数这种符号呢？因此，许多古老的民族都为较大的数字设置了专门的表达符号。

在古中国的计数方法中，代表100，代表1000。而古埃及人用表示100，表示1000。与此不同，玛雅人将不同的符号组合在一起，用来表示较大的数。这种组合在一起的排列方法代表乘法。这个符号代表100，即5——乘以20。

### 0的运算

现在，我们知道与0相关的计算显得比较简单：任何数加上或减去0，数值仍保持不变。任何数乘以0数值都为0。但有一点要注意：0不能作为除数。

样，在罗马数字体系中，若想表示较大的数字，并不需要再去创造新的符号。同样，如果没有进位制，乘法运算的表示也会变得更为困难。例如，在进位制下，10乘以12可以简单地表示为在12后加个0，即120。而用罗马数字，X 乘以 XII 得到的结果，即CXX 并不是一目了然。

## 谁发明了数字0？

早在4000年前，古巴比伦人就已熟知进位制。他们将楔形的字符刻在将要烧制的泥板上（楔形文字由此而来）。他们用一个垂直状的楔形▼来代表1，用一个带角的楔形◀代表10。在表示数字时，最右边表示个位，并不是满十进位，而是满60才向上进一位。数字▼▼◀◀▼◀▼▼▼代表$2 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 13 \cdot 60^0 = 7200 + 1260 + 13 = 8473$。巴比伦人的进位制，今天依然存在。例如，我们把一小时分为60分钟，把一分钟分为60秒。

但巴比伦人在用▼▼表示3601时遇到了问题。因为它同样也可以表示61。此时，在数字的第二位上缺少一个占位符。而在阿拉伯数字中，这个符号演变为0。这样，人们就不会将101与11相互混淆。但在古巴比伦人的数字概念中没有0。为了找到相应的替代物，他们在公元前5世纪，即古巴比伦文明全盛时期的最后阶段，发明了一个专门的符号。然而，该符号却不允许使用。

尽管那时古巴比伦、古埃及、古希腊，以及古中国的数学已经相当发达，但是他们都没有发现数字0的存在。他们似乎都不由自主地对写出一个“表示什么也没有”的符号而感到畏惧。

直到公元500年，印度人阿拉雅布哈塔才第一次使用了0。他将之称为“卡”，“卡”既表示洞穴，又带有天空的含义。


*亚当列塞（1492—1559）在他长期授课的教科书中引入了0的概念，最终将其传入欧洲。*

公元700年，印度数学家婆罗摩笈多将这个符号传入阿拉伯国家。他的数学著作在7世纪、8世纪时被多次翻译成阿拉伯文。

在11世纪时，数字0才由中东传入欧洲。

## 什么是二进制数？

古老的民族和小孩子们一样，计数都是从数手指头开始的。因此（也正因为这样），今天我们计算时使用10个不同的数字，这就是人们称为的十进制。

进位制对于其他各种计数形式同样适用。而计算机只能识别两个符号：代表关的 0 和代表开的 1。其他的数字都由这两个数来构成。10（这里不读作“十”，而读作“一零”）在二进制中代表2，11代表3，100代表4，101代表5，等等。同样，在这里 1 所在的数位不同，表示的数值也不同。在最后一位就代表 1，在倒数第二位代表 2，在倒数第三位代表 4，在倒数第四位就代表 8。

人们在使用二进制数时，将其按照 2 的乘方来划分。

$2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=2\cdot2=4$，$2^3=2\cdot2\cdot2=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$2^6=64$，$2^7=128$，$2^8=256$，…

二进制数11111在十进制里为：$1\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=16+8+4+2+1=31$，同理，100000111则为：$1\cdot2^8+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=263$。

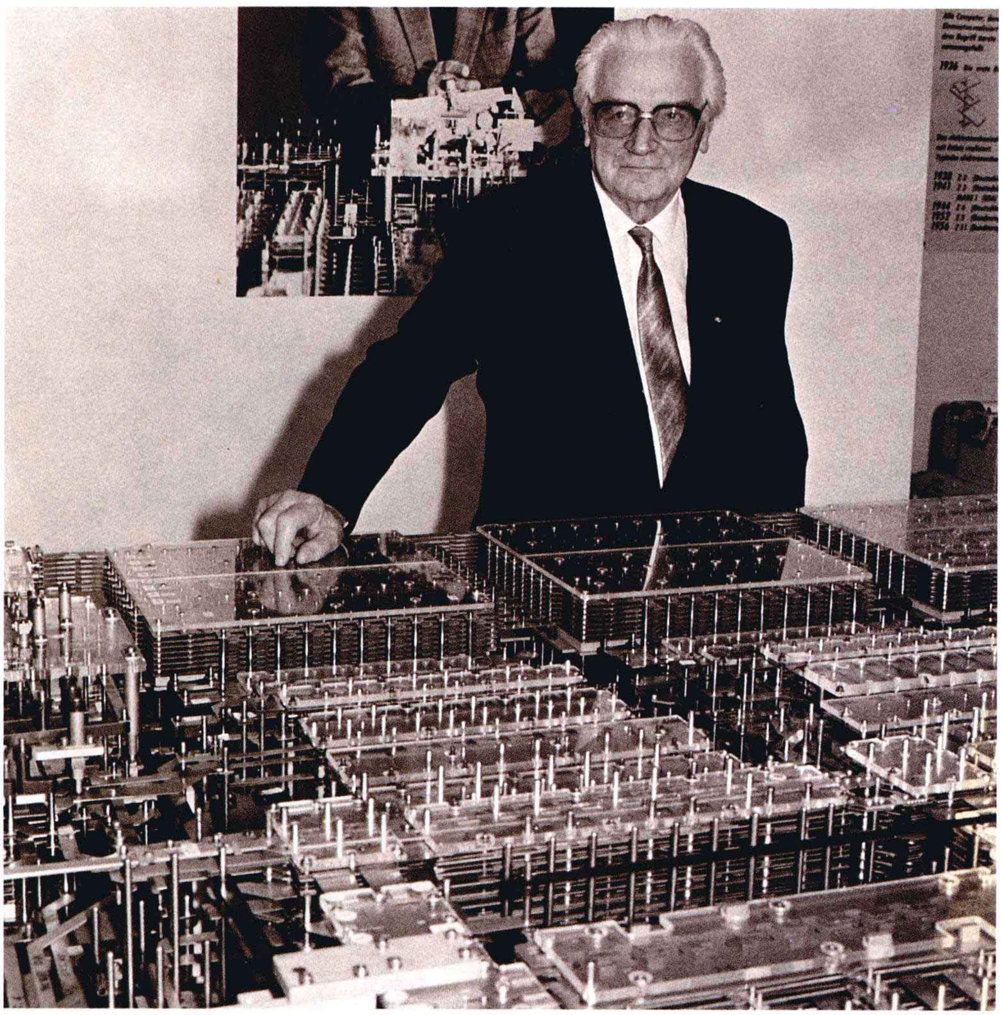
| 十进制 | 二进制 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 0 |
| 1 | | | | | 1 |
| 2 | | | | 1 | 0 |
| 3 | | | | 1 | 1 |
| 4 | | | 1 | 0 | 0 |
| 5 | | | 1 | 0 | 1 |
| 6 | | | 1 | 1 | 0 |
| 7 | | | 1 | 1 | 1 |
| 8 | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*仅用两个数字就可以将所有的数都表示出来。*

**二进制数**同样可以像十进制数那样进行运算。例如，在进行加法时，人们可以将两个数写成竖式，然后从最右边一位开始进行叠加运算。这里唯一不同的是：1+1得 0，然后向前进一位（与十进制中的 5 + 5相类似）。例如：

$$\begin{array}{r} 101 \\ +101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

1+1=0 同时向前进一位



*世界上第一台计算机就会进行二进制数的运算。图中所示的是计算机先驱康拉德·楚泽（德国）和他在 1938 年所设计的楚泽 1 号。*

**字母运算**

由于字母代数运算的引入，许多命题变得容易表达和证明。若数学家们想要计算字母的数值，他们常使用x，y以及z这几个字母，而将其他的字母，像a，b，c作为占位符。

**数学魔术**

一些魔术需要表演者有善于表演的灵活手指，同时也离不开长期的练习。其他的一些魔术，像“大锯活人”，就需要有煞费苦心的技术。然而，数学上的魔术比较简单，人们可以将其一一展示。之所以会这样，是因为这些魔术都建立在之前已有的计算推导基础上，那是一成不变的公式。

## 人们怎样用字母进行运算？

数学家们在计算时经常用到字母。字母可以代表未知数的大小或作为任意的占位符。例如，我们可以用a来代表一箱苹果。那么5箱苹果就可以写成5·a，7箱苹果可以表示成7·a。若想知道现在一共有多少箱苹果，则可以进行运算，即5·a+7·a=（5+7）·a=12·a。如果这里是一箱梨或任意的自然数，这种算法都同样适用。我们将任意一个数代入a中，式子左右两边的值都相等。

带有字母的运算看上去似乎有些奇怪，但它可以使许多问题简单化。例如这样一个问题：“一个数的3倍减1，再加上这个数的两倍，最后得9，那么这个数是多少？”如果此时用x来代替此数，问题中复杂的关系则变得非常容易表达，即：

$$2\cdot x+3\cdot x-1=9$$

在这个方程中，答案几乎已经可以猜出，但我们同样有办法可以算出最后的结果。首先，我们要了解一下方程的运算性质。在方程的左右两边同时加上或乘以相同的数，等号依然成立。首先，上述方程可以变形为：

$$2\cdot x+3\cdot x-1=5\cdot x-1=9$$

在方程左右两边同时加1，即：

$$5\cdot x-1+1=9+1$$

于是

$$5\cdot x=10$$

再将方程两边同时除以5，得：

$$x=2$$

数学家不仅利用字母来算出一些问题中具体的数值，同时也用字母来代替一些没有具体数值的数。这样一来，许多命题假设就可以得到证明。例如，先前所讲到的命题：“若一个数的数字和能被3整除，则该数字也能被3整除”。

为了简单起见，我们在这里先证明两位数的情况。每个两位数都可以写成10·b+c的形式，这里b可以取1，2，3，…，9，c可以取0，1，2，…，9。现在命题变成了：若b+c能被3整除，则10·b+c也能被3整除。

由于10·b+c=9·b+b+c。因为9可以被3整除，所以9·b也能被3整除。因此，若b+c能被3整除，则9·b+b+c就一定能被3整除。

同理，也可以证明三位数的情况：每个三位数都可以写成100·a+10·b+c,这里a可以取1，2，3，…，9，b和c则可以取0，1，2，…，9。于是有10·b+c=99·a+9·b+a+b+c。由于99和9均能被3整除，所以99·a和9·b也均能被3整除。

## 人们可以利用数学来变魔术吗？

数学上有许多“魔术”。例如，魔术师将几枚硬币交给一个自愿的观众，同时告诉他：“将一部分硬币放在左手中，剩下的放在右手中。现在我借助感应力可以知

道你每只手里有多少枚硬币。”然后，魔术师要求这名自愿的观众将左手中的硬币数乘以5，将右手中的硬币数乘以4，接着将两个数加起来，并大声说出最后的结果。接下来，魔术师便挥舞着他那神奇的魔术棒，自言自语，念念有词，最后便可以说出正确的硬币数。

将等式a=x+36两边同时减去36，则有x=a−36。魔术师只需将这名观众最后所得的计算结果减去36，便可知道其左手中硬币的数量。若最后的结果是40，则在观众左手中有40−36=4枚硬币。我们可以验算一下：5・4+4・5=20+20=40。

这个硬币游戏的背后并不是魔术，而是数学。

其实，这个魔术原理相当简单：似乎魔术师交给观众的硬币数量是不定的。但实际上，魔术师只会给观众9枚硬币。剩下的工作就是一个简单的计算了。

我们现在假设在观众左手中硬币的数量为x，于是在他的右手中就有9−x枚硬币。现在，设a为观众最后计算出的结果，于是有以下方程式：

$$a=5\cdot x+4\cdot(9-x)$$
$$=5\cdot x+36-4\cdot x$$
$$=x+36$$

**什么是质数？**

那些只能被1和自身所整除的自然数被称为质数（又称素数）。例如像7和11这样的数。将这两个数去除以其他的数，总会得到余数。我们称7和11为质数。相反，8便不是质数，因为8=2・4。

然而，1不能算是质数。最开始的几个质数为：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37……

德国数学家**克里斯蒂安・哥德巴赫**(1690—1764)曾提出这样一个命题：每个大于2的偶数都可以写成两个质数之和。例如，像8 = 5 + 3，30 = 23 + 7以及166 = 83 + 83。人们利用计算机将哥德巴赫的这一猜想一直验算到400万亿，都是成立的。然而至今为止，还没有一个普通的证明来证明它。因此，这个命题仍然被称为“哥德巴赫猜想”。

可见，质数是自然数的一部分。所有的自然数都可以写成若干个质数的积。在人们称为数论的基本定理中还提出，这种积的形式是唯一的。例如，$2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$。再找不到除2，7，11和13以外的质数，使得它们的积为2002。

古希腊人很早就迷上了质数。一直以来，数学家们都在研究其中的奥秘，至今还没能将质数性质完全地解读出来。

**欧几里得**对质数无穷性的证明，可以称得上是数学中的一块“瑰宝”。而美国数学家威廉·邓纳姆在考察一个人是否适合学习数学时，这样描述：“若找到一个真正爱好数学的同道中人，会使他激动得流泪，若没有找到这样的人会使他抓狂。”你是这样的人吗？

希腊数学家欧几里得曾证明了质数的无穷性。

## 有多少个质数？

早在公元前3世纪，古希腊学者欧几里得就提出了这个问题。凭借着其极富创造性的思维，欧几里得证明了质数的无穷性。在这里，他使用了一种数学中常用的方法：反证法，即从所要证明命题的反面出发，直到从中推导出矛盾。如果推导过程在逻辑上完全严密，那么说明假设不成立。

欧几里得先假设，质数的个数是有限的。可以将之一一列出，即$p_1$，$p_2$，$p_3$，…，$p_n$（这里n为自然数，代表质数的个数。$p_1$，$p_2$，$p_3$，…，$p_n$则表示那些质数）。然后，这位希腊数学家又创造了一个新的数：$p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\cdots\cdot p_n+1$。由于这个式中尾部的+1，使得该数不能被$p_1$整除，不能被$p_2$整除，不能被$p_3$，…整除，同样也不能被$p_n$整除。由于每个数都可以写成若干个质数之积，而同时$p_1$，$p_2$，$p_3$，…，$p_n$均为质数，于是便得出矛盾。因此，假设不成立，即应有无穷个质数。

尽管人们已经知道质数是无穷的，但是还是有人会问“现在已知的最大质数是多少？”。

100 以内的质数（红色数字）