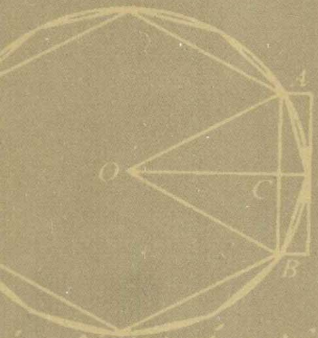
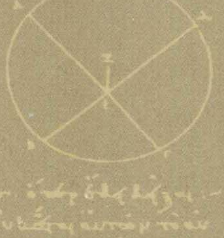
普通高等教育"十一五"
国家级规划教材

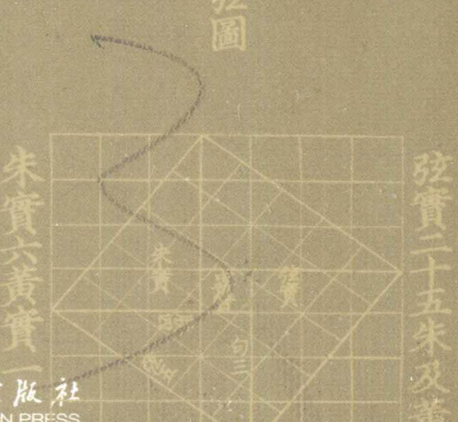
数学史

第二版　◎ 朱家生

A History of Mathematics (2nd)







高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”
国家级规划教材

数学史

第二版 ◎ 朱家生

A History
of
Mathematics (2nd)

Shuxueshi

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版的基础上修订而成的。全书以数学发展的脉络为主线，较为系统地介绍了数学的历史。本书对数学科学的一些重要思想方法及其产生、发展的过程进行了阐述，对所涉及的著名数学家的生平和主要工作也作了介绍。在内容的叙述中，既注重历史进程的纵向发展，又注意不同地区数学发展的横向比较，并力求将数学知识与历史史实、数学思想与数学方法、数学科学与数学应用相互渗透。全书共12章，内容丰富，叙述生动有趣。

本书可作为高等学校各专业开设数学史课程的教学用书，对广大数学老师和数学爱好者也有重要的参考价值。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学史 / 朱家生编．—2版．—北京：高等教育出版社，2011.5
ISBN 978-7-04-031413-7

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①朱…　Ⅲ．①数学史－高等学校－教材　Ⅳ．①O11

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第008316号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 张彦云　**封面设计** 王凌波　**版式设计** 范晓红
责任绘图 郝　林　**责任校对** 杨健艺　**责任印制** 田　甜

出版发行	高等教育出版社	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京铭传印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	13.25	**版　　次**	2004年7月第1版
字　　数	230 000		2011年5月第2版
购书热线	010-58581118	**印　　次**	2011年5月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	**定　　价**	20.80元

物 料 号　31413-00

再版序

时光荏苒,不知不觉中本书已经问世七个年头了,当年编写的初衷有二:一是将自己若干年来从事数学史教学的心得体会总结出来,为高等学校数学史教学提供一本可以参考的材料;二是希望借助于本书,就数学史教学的内容、方法与手段,与同行们作一些交流和探讨。事实也正如我们所希望的那样,在过去的这七年里,全国许多高校采用本书作为教材,大家对它喜爱的程度也远远超出了我们的预期,本书也被评为“江苏省高等学校精品教材”。许多同行来信或来电,就他们在使用本书过程中所产生的各种想法,与我进行了广泛的交流,并为本书的进一步完善提出了许多宝贵的意见。也是在这七年里,我国数学教育,尤其是基础数学教育发生了许多重大变革:越来越多的高校数学类专业把数学史列为必修或选修课程;基础教育课程改革也要求在高中阶段开设数学史选修课等。另外,在使用本书的过程中我也产生了许多新的想法,特别是考虑到目前中学进行数学史知识普及的状况,而本书中的初等数学史内容偏少,应该适当加强。正是基于这些原因,促使我对本书进行再版修订。

本书的编写工作长期以来得到了扬州大学数学科学学院和教务处领导的支持。在此期间,受扬州大学的委派,我来到了苏北一座新兴的城市——宿迁,参与援建宿迁学院的工作。在这里,再版工作得到了宿迁学院各级领导的全力支持,尤其是教师教育系的同仁们,是他们帮我分担了繁重的行政与教学工作,使得我能有时间和精力投入其中;还有高等教育出版社的李蕊、张彦云编辑,是她们的不断帮助与鼓励,使得我的工作能顺利进行下去;是她们的一丝不苟,使得本书增色许多。在此我一并对他们表示衷心的感谢!

朱家生

2010 年 8 月

于江苏宿迁骆马湖畔

目录

绪　论

众所周知,数学是人类文明的一个重要组成部分.与其他文化一样,数学科学也是几千年来人类智慧的结晶.从远古时期的结绳记事、屈指计数到借助于现代电子计算机进行计算、证明与科学管理,从利用规矩等工具进行的勾股测量等具体的操作到抽象的公理化体系的产生,……,所有这些,都构成了科学史上最富有理性魅力的题材.随着时代的发展与科学技术的进步,数学科学的思想、方法与内容已经渗透到人类生活的各个领域,科学技术包括社会科学的数学化已成为一种共识.人类的现实生活需要数学,国家的发展、科学技术的进步更离不开数学.因此,具备一些必需的数学知识和一定的数学思想方法,是现代人才基本素质的重要组成部分.

与其他科学相比,数学是一门积累性很强的学科,它的许多重大理论都是在继承和发展原有理论的基础上发展起来的.如果我们不去追溯古今数学思想方法的演变与发展,也就不可能真正理解数学的真谛,正确把握数学科学发展的方向.正如法国著名数学家庞加莱所说:"如果我们想要预知数学的未来,最适合的途径就是研究数学这门科学的历史和现状."

数学史主要研究数学科学的发生、发展及其规律,简单地说就是研究数学的历史.它不仅追溯数学内容、思想和方法的演变、发展过程,而且还探索影响这种过程的各种因素,以及历史上数学科学的发展对人类文明所带来的影响.数学史的研究对象不仅包括具体的数学内容,而且涉及历史学、哲学、文化学、宗教等社会科学与人文科学内容,是一门交叉性学科.研究与学习数学史,可以弄清数学发展过程中的基本史实,再现其本来面貌,同时透过这些历史现象对数学成就、理论体系与发展模式作出科学、合理的解释、说明与评价,进而探究数学科学发展的规律与文化本质,帮助我们掌握数学的思想、方法、理论和概念,认识数学科学与人类社会的互动关系以及研究数学思想的传播与交流史,了解数学家的生平等.

具体而言,学习数学史至少具有以下一些重要意义:

首先,每一门科学都有其发展的历史,作为一门不断发展的科学,既有其历史性又有其现实性.其现实性首先表现在科学概念与方法的延续性方面,今日的科学研究在某种程度上是对历史上科学传统的深化与发展,或者是对历史上科学难题的解决,因此我们无法割裂科学现实与科学史之间的联系.数学科学具有悠久的历史,与其他自然科学相比,数学更是积累性科学,其概念和方法更具有延续性,比如古代文明中形成的十进位值制记数法和四则运算法则,我们今天仍在使用,又如费马猜想、哥德巴赫猜想等历史上的难题,长期以来一直是现代数论领域中的研究热点.数学传统与数学史材料可以在现实的数学研究中获得发展.国内外许多著名的数学大师都具有深厚的数学史修养或者兼及数学史研究,并善于从历史素材中汲取养分,做到古为今用,推陈出新.我国著名数学家吴文俊先生早年在拓扑学研究领域取得杰出成就,20 世纪 70 年代开始研究中国数学史,在中国数学史研究的理论和方法方面开创了新的局面,特别是在中国传统数学机械化思想的启发下,建立了被誉为"吴方法"的关于几何定理机器证明的数学机械化方法,他的工作不愧为古为今用、振兴民族文化的典范.科学史的现实性还表现在为我们今日的科学研究提供经验教训和历史借鉴,预见科学未来,使我们在明确科学研究的方向上少走弯路或错路,为当今科技发展决策的制定提供依据.多了解一些数学史知识,就不会出现诸如用直尺和圆规去解决三等分角作图等荒唐事.同时,总结我国数学发展史上的经验教训,对我国当今数学发展不无益处.因此,我国著名数学史家李文林先生曾经说过:"不了解数学史就不可能全面了解数学科学."

其次,美国数学史家 M.克莱因曾经说过:"一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关.这种关系在我们这个时代尤为明显","数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言,数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系,其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家和神学家的学说"①.数学已经广泛地影响着人类的生活和思维方法,是形成现代文化的重要组成部分.因而数学史是从一个侧面反映的人类文化史,又是人类文明史的最重要的组成部分.许多历史学家通过数学这面镜子,了解古代其他主要文化的特征与价值取向.例如,公元前 600—前 300 年间的古希腊的数学家们强调严密的推理并由此得出结论,但他们不关心这些成果的实用性,而是要人们去进行抽象的推理,从而激发对理想与美的追求.通过对希腊数学史的考察,就容易理解为什么古希腊会具有很难被后世超越的优美

① M.克莱因.古今数学思想[M].张理京,张锦炎,等,译.上海:上海科学技术出版社,2002.

文学、极端理性化的哲学以及理想化的建筑与雕塑了.而罗马数学史则告诉我们,罗马的文化是外来的,罗马人缺乏独创精神而注重实用.

再者,当我们学习过数学史后,自然会有这样的感觉:数学的发展并不合乎逻辑.或者说,数学发展的实际情况与我们今日所学的数学教科书很不一致.我们今日中学所学的数学内容基本上属于17世纪微积分产生以前的初等数学知识,而大学数学专业所学习的大部分内容则是17、18世纪的高等数学.这些数学教学内容业已经过千锤百炼,是在科学性与教育要求相结合的原则指导下经过反复推敲而成的,是将历史上的数学材料按照一定的逻辑结构和教学要求加以取舍编纂而成的知识体系,这样就必然舍弃了许多数学概念和方法形成的实际背景、知识背景、演化历程以及导致其演化的各种因素.因此仅凭数学教材的学习,难以了解数学的原貌和全景,同时也会忽视那些被历史淘汰掉的但对现实科学或许有用的数学材料与方法,而弥补这方面不足的最好途径就是学习和研究数学的历史.在一般人看来,数学是一门枯燥无味的学科,甚至很多人视其为畏途,从某种程度上说,这是由于我们的数学教科书介绍的往往是一些僵化的、一成不变的数学内容,如果在数学教学中适当地渗透一些数学史内容而让数学的思想、知识和方法活起来,这样便可以激发学生的学习兴趣,有助于学生对数学概念、方法和原理理解与认识的深化.

同时,数学史是一门文理交叉学科.从今天的教育现状来看,文科与理科的鸿沟导致我们的教育所培养的人才已经越来越不能适应当今自然科学与社会科学高度渗透的现代化社会,而数学史学科的这种交叉性正可显示其在沟通文理科方面的作用.通过对数学史的学习和研究,既可以使数学类专业的学生在接受数学专业训练的同时,获得人文科学方面的修养;也可使文科或其他专业的学生了解数学概貌,获得数理方面的修养.此外,历史上数学家的业绩与品德也会在青少年的人格培养上发挥十分重要的作用.

为了能让更多的学生了解和掌握初步的数学史知识,我们编写了这本教材.从历史研究和便于教师教学与学生学习的需要出发,本教材选择了数学发展进程中对数学、整个科学乃至人类社会的发展与进步具有重大意义的数学历史史料,按照历史发展的脉络,采用纵横交织、中外结合、史哲融合的方式,将数学知识与历史史实、数学思想与数学方法、数学科学与数学教育等相互渗透.考虑到大多数学校的教学需求,本教材不仅综述整个数学发展的历史,重点阐述了算术、代数、几何、三角、解析几何和微积分等重要数学学科的产生、发展过程,还对现代数学的概况作了介绍.在对内容的叙述中,既注重历史进程的纵向发展,又注意不同地区的横向比较,力求让不同层面的读者都能从中获益.

1 源自河谷的古老文明
——数学的萌芽

数学，作为人类文明的重要组成部分，有着非常悠久的历史. 那么，数学这门学科究竟是在何时何地，经何人之手诞生的呢？据文字记载，至少在 5000 年以前，人类就已有了数学活动. 数学也和其他人类文明一样，最早出现于非洲北部尼罗河中下游的古埃及、亚洲的幼发拉底河与底格里斯河两河流域的古巴比伦、黄河流域的中国和恒河流域的古印度. 但就国外数学发展的源头而言，客观地讲，一般还应首推古埃及与古巴比伦.

1.1 古埃及的数学

我们知道，发源于非洲中部，流入地中海的尼罗河是世界上最长的河流之一. 早在公元前 3000 年左右，在这条河的中下游，古埃及人建立起了早期的奴隶制国家，其地理位置与现在的埃及区别不大. 狩猎、渔业及畜牧业是古埃及人最初的谋生方式. 一年一度的尼罗河的洪水给这片谷地带来了肥沃的淤泥，那些早年以游牧为生的古埃及人被这片黑土地所吸引，便在这里定居下来，由狩猎转向耕种. 在发展农业的同时，手工业与贸易也随之迅速发展起来，这些都推动了自然科学各学科知识的积累.

提到古埃及，大家就会自然想到作为世界七大奇迹之一的胡夫金字塔. 位于开罗附近吉萨省的古埃及第四王朝法老胡夫(Khufu)的陵墓——胡夫金字塔是埃及最大的金字塔，大约建成于公元前 2500 年左右. 该金字塔建在一块巨大的凸形岩石上，占地约 52 900 m^2，塔体呈正四棱锥形①，底面正方形面向东西南北四个正方向，边长约 230.5 m，塔高约 146.5 m(现高约 137 m). 在 1889 年巴黎埃

① 经科学家考证，埃及的金字塔除了正四棱锥形的以外，还有其他许多种形状，如圆锥形、四棱台形等.

菲尔铁塔落成之前的 4 000 多年的漫长岁月里，它一直是世界上最高的建筑物. 近年来，科学家们通过使用精密的仪器对这一金字塔进行了测量，惊奇地发现，其底基正方形边长的相对误差不超过 1∶14 000，即不超过2 cm；四底角的相对误差不超过1∶27 000，即不超过 12″，四个方向的误差也仅在 2′～5′之间，这些都说明当时的测量水平已相当高. 此外，有人通过研究发现，塔体每一侧面三角形的面积等于其高度的平方；塔高与塔基周长的比恰好是地球半径与赤道周长的比，因而，用塔高去除底边的 2 倍，可得圆周率的近似值.

古埃及人在建造神奇的金字塔、狮身人面像以及神庙的同时，也创立了相当发达的数学. 从公元前 3000 年起，古埃及人就已经有了象形文字，其中最具代表性的是僧侣们所使用的僧侣文(又称祭司文). 流传至今的古埃及文献，大部分是以这种僧侣文书写在纸草上保存下来的，人们通常称其为纸草书[①](如图 1－1).

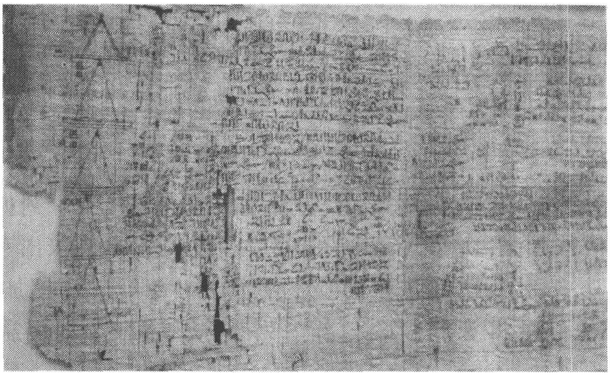


图 1－1 古埃及纸草书

保存至今的有关数学的纸草书主要有两种：一种是陈列于英国伦敦不列颠博物馆东方展室中的兰德纸草书，这是由英国人兰德(H. Rhind)1858 年搜集到的；另一种收藏于俄罗斯莫斯科的一家博物馆，被称为莫斯科纸草书，这是由俄国人郭列尼舍夫于 1893 年搜集到的. 这两份纸草书都是公元前 2000 年前后的作品，为古埃及人记录一些数学问题的问题集. 兰德纸草书长约 550 cm，宽 33 cm，共记载了 85 个问题，莫斯科纸草书长 544 cm，宽 8 cm，共记载了 25 个问题. 人们对古埃及数学的了解主要来自这些纸草书以及其他保留至今的历史文献.

1.1.1 古埃及的记数制与算术

古埃及人使用的是十进位记数制，并且有数字的专门符号(如图 1－2). 当

① 这种纸草书是用尼罗河三角洲盛产的一种形状如芦苇的水生植物——纸莎草，从纵面剖成小条，拼排整齐，连接成片，压榨晒干而成的.

在一个数中出现某个数码的若干倍时，就将它的符号重复写若干次，即遵守加法的法则，这说明，古埃及人的记数系统是叠加制而不是位值制. 古埃及人已有了分数的概念，但他们仅使用单位分数也就是分子为 1 的分数，表示整体的若干等份中的一份，只有$\frac{2}{3}$是一个例外.

1		一根垂直棒或一竖(笔画)
10		一根踵骨或轭
10^2		一卷轴或一圈绳
10^3		一朵莲花
10^4		一个伸着的手指
10^5		一条鳕鱼或蝌蚪
10^6		一个受惊的人或一个支撑宇宙的神
10^7		一轮红日照耀下广袤的大地

图 1-2　古埃及人的数字记号

古埃及人的乘法运算与除法运算是通过叠加来进行的. 例如计算 26×33，他们先将 33 的倍数列表(如表 1-1)，然后从左边一列中选取出和为 26 的数 2，8 和 16，再将右边一列中它们各自对应的数即 66，264，528 相加得 858 即为所求. 又如 19÷8，他们是将 8 的倍数与部分列表(如表 1-2)，再从右边一列中选取出其和为 19 的 16，2，1 这三个数，并将其对应的左边一列中的三个数 2，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$相加即为所求①.

表 1-1

n	$33n$
1	33
2	66
4	132
8	264
16	528

表 1-2

α	8α
1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

① 其实这种造表的方法正反映了古埃及人的睿智. 从这些表的选项可以看出，他们是利用加法运算通过递推的方法来处理较为复杂的乘除运算问题的.

1.1.2　古埃及的代数

古埃及纸草书中出现的"计算若干"的问题，实际上相当于方程问题，他们解决这类问题的方法是试位法. 例如对于方程 $x+\frac{x}{7}=24$，先给 x 选定一个数值，譬如说 7，代入方程左端，于是 $7+\frac{7}{7}=8$，而不是 24，因为 8 必须乘以 3 才是 24，故 x 的正确的值一定是 7 乘以 3 即 21. 古埃及人还用这种方法来解二次甚至更高次的方程. 例如在卡洪(Kahun)发现的一份大约是公元前 1950 年的纸草书中记载了下列问题：将给定的 100 单位的面积分为两个正方形，使二者的边长之比为 4∶3. 若设此两正方形的边长分别为 x，y，且 $4y=3x$，由题设 $x^2+y^2=100$，首先取 $x=4$，则 $y=3$，此时 $x^2+y^2=25$，而不是 100，因此 x，y 的取值需修正. 事实上，只需将原数值加倍，即可得方程的解 $x=8$，$y=6$. 必须指出的是，"试位法"对于解决属于一元一次方程的问题，可以得到精确的解，而对于二次以上的方程，这种方法一般情况下只能给出近似解①.

在古埃及纸草书中还有有关数列问题的记载. 如兰德纸草书中有这样一个问题：今将 10 斗麦子分给 10 个人，每人依次递降 $\frac{1}{8}$ 斗，问各得多少？这是已知一个等差数列的前若干项和、项数以及公差求其各项的问题. 纸草书给出了其首项是 $a_1=1\frac{9}{16}$，再根据题意就不难求解.

等比数列也已在古埃及纸草书中出现. 兰德纸草书中给出一个阶梯图形(如图 1－3)，对此，数学史家康托尔是这样解释的：在一个人的财产中，有七间房子，每间房子里七只猫，每只猫能捉七只老鼠，每只老鼠能吃七穗大麦，而每穗大麦又能长出七俄斗大麦，问这份财产中房子、猫、老鼠、麦穗和麦子总共有多少？按照这样的解释，这显然是一个首项为 7、公比为 7 的等比数列求和问题，阶梯图形给出的是这个数列中的各项.

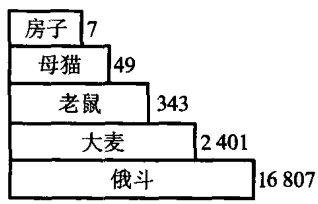


图 1－3

1.1.3　古埃及的几何学

古埃及人在建筑规模宏大的神庙、金字塔和修建复杂的灌溉系统时，都需要

① 一般认为，古埃及人的方程解法要比古巴比伦人的方法落后. 事实上，他们的这种方法可以看作是后来的数学中对那些无法用所谓一般解法处理的高次方程的数值解法的先驱. 有关高次方程的数值解法，可参考有关"计算方法"的教材或著作.

测量；尼罗河水泛滥时冲刷去了许多边界标记，洪水退后也需要重新勘测土地的界线；……，所有这一切，为他们认识基本几何形状和形成几何概念提供了实际背景. 因此，古埃及人的几何学知识较为丰富. 在上述两种纸草书的 110 个问题中，有 26 个是几何问题，其中大部分是计算土地的面积与谷垛的体积，还有许多与金字塔有关. 例如，古埃及人知道，任何三角形的面积均为底与高的乘积的一半；圆的面积等于直径的$\frac{8}{9}$的平方，由此可知，他们把圆周率近似地取为 3.16；直圆柱的体积为底面积与高的乘积. 在兰德纸草书中有这样一个问题："已知金字塔的陡度为每肘五手又一指(一肘为七手，一手为五指)，底面边长为 140 肘，求其高."在莫斯科纸草书中还有这样一个问题，用现代语言表达就是："如果告诉你一个截顶金字塔的垂直高度为 6，底边为 4，顶边为 2，求其体积."古埃及人的解法是：4 的平方为 16，4 的二倍为 8，2 的平方是 4，把 16，8 和 4 相加得 28，取 6 的三分之一为 2，取 28 的二倍为 56，则它的体积就是这个数. 由此我们可以看出，古埃及人是通过具体问题说明了高为 h、底边长为 a 和 b 的正四棱台的体积公式是

$$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h.$$

著名数学史家贝尔(E. T. Bell，1883—1960)形象地将这一古埃及数学杰作称为"最伟大的埃及金字塔"①.

1.2　古巴比伦的数学

古巴比伦，又称美索不达米亚，意为"两河之间的地方"，位于亚洲西部的幼发拉底与底格里斯两河流域，大体上位于今天的伊拉克所在的位置. 大约是在公元前 3000 年左右，古巴比伦人②在这里建立起了自己的奴隶制王国.

在过去相当长的一段时间内，人们对于古巴比伦数学的认识是通过古希腊文化中所记载的零星资料得到的. 19 世纪后期，考古学家开始对美索不达米亚遗址进行考古挖掘，这些遗址大多数是由过去长期存在过的城市的废墟所形成的土丘，其中的房屋几乎都是用未经烧制的土坯建造的. 每次降雨后，房屋都要被冲毁一些，而新的房屋就建造在同一地方，于是地面就逐渐升高，形成了

① 因为棱锥与埃及金字塔在英语中的单词都是 pyramid.

② 事实上，居住在这里的除了巴比伦人外，还有苏美尔人、阿卡德人、卡尔迪安人、亚述人等，为了方便起见，人们把他们都归入巴比伦人.

现在的土丘.如果绘制一幅土丘的垂直剖面图,就可以发现,同一个城市按不同的时期分成不同的层次,最古老的处在土丘的最底层.在发掘的过程中,人们发现了数以万计的不同时期的泥板,它们是用胶泥制成的.一块完整的泥板与手掌的大小差不多,上面写有符号(如图 1-4).因为这种符号是用断面呈三角形的尖棍刻写出来的,呈楔形,故人们形象地称之为楔形文字.我们现在对古巴比伦数学及其他文化的了解,主要来自这些泥版书.

图 1-4 古巴比伦的泥版书

1.2.1 古巴比伦的记数制与算术

古巴比伦人很早就有了数的写法,他们通常用楔形文字中较小的▼(竖写)代表 1,较大的▼(竖写)代表 60.由此可知,古巴比伦人的记数系统是 60 进制[①].他们还用较小的◀(横写)代表 10,较大的◀(横写)代表 100.

古巴比伦人也使用分数,他们总是用 60 或 60 的方幂作为分母,例如◀◀作为分数来记时可以表示 20/60,而◀◀▼作为分数来记时可以表示 21/60=20/60+1/60.因此古巴比伦人的分数系统是不成熟的.

与古埃及人相仿,古巴比伦人的算术运算也是借助于各种各样的表来进行的.在已发现的泥版书中,大约有 200 块是乘法表、倒数表、平方表、立方表,甚至还有指数表.倒数表用于把除法转化为乘法进行,指数表和插值法一起用来解决复利问题.例如,设有本金为 1,利率为 20%,问需要多久即可使利息与本金相等.这需要求解指数方程

$$(1+20\%)^x=2.$$

由指数表,古巴比伦人首先确定出 x 的取值范围是:$3<x<4$.然后使用一次插入法求出 4 与 x 的差,相当于现在这样的算法:

$$4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}\approx 0.21,$$

故得 $x\approx 4-0.21=3.79$(年).

1.2.2 古巴比伦的代数

在公元前 2000 年前后,古巴比伦数学已出现了用文字叙述的代数问题.如

① 由此可见,古埃及和古巴比伦人采用的记数制都不是 10 进位值制.10 进位值制记数法最早是由中国人和印度人首先采用的,详细情况可参见有关章节.

英国不列颠博物馆所藏的 13901 号泥板记载了这样一个问题:“我把我的正方形的面积加上正方形边长的三分之二得$\frac{35}{60}$,求该正方形的边长.”这个问题相当于求解方程

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}.$$

该泥板上给出的解法是:1 的三分之二是$\frac{40}{60}$,其一半是$\frac{20}{60}$,将它自乘得$\frac{6}{60}+\frac{40}{60^2}$并把它加到$\frac{35}{60}$上得$\frac{41}{60}+\frac{40}{60^2}$,其平方根是$\frac{50}{60}$,再从中减去$\frac{40}{60}$的一半得$\frac{30}{60}$,于是$\frac{1}{2}$就是所求正方形的边长.这一解法相当于将方程 $x^2+px=q$ 的系数代入公式

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$$

求解,只不过在计算时用的是 60 进制.又如,已知两个正方形的面积之和为 1 000,其中一个正方形的边长为另一个正方形的边长的$\frac{2}{3}$减去 10,求这两个正方形的边长.设较大的正方形的边长为 x,则另一正方形的边长为$\frac{2}{3}x-10$,故只需解二次方程

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x-10\right)^2=1\,000.$$

古巴比伦人将这一解法所需的步骤简单地叙述为“平方 10,得 100;1 000 减去 100,就得 900,开平方得 30”,求得该正方形的边长为 30,另一个正方形边长为 10.这就是说,古巴比伦人那时可能已经知道某些类型的一元二次方程的求根公式.由于他们没有负数的概念,二次方程的负根不予考虑.至于他们是如何得到上述这些解法的,泥板书上没有具体说明.他们还讨论了某些三次方程和双二次方程的解法.在一块泥板上,他们给出这样的数表,它不仅包含了从 1 到 30 的整数的平方和立方,还包含这个范围内的整数组合 n^3+n^2,专家经研究认为,这个数表是用来解决形如 $x^3+x^2=b$ 的三次方程的.

此外,在洛佛尔博物馆收藏的一块泥板上,人们还发现了两个级数问题.用现代形式可表述为

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1,$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3}\right)\times55=385.$$

古巴比伦人究竟是通过直接计算得到上述结果的,还是掌握了这些级数求和的技巧甚至公式,对于我们来说现在还是一个谜.