经纶学典

总主编◎李朝东

经纶图书

修订版

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

必修4

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：李树政　南鲁景

人教A版

高中数学

必修4

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材解析:人教版.高中数学.4:必修/李朝东主编.——兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.5
ISBN 978-7-5422-2946-5

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第074877号

责任编辑:伏文东
封面设计:杭永鸿

教材解析·高中数学
必修4 人教A版
李朝东 主编
甘肃少年儿童出版社出版发行
(730030 兰州市读者大道568号)
0931-8773255
淄博恒业印务有限公司
开本880毫米×1230毫米 1/16 印张13 字数260千
2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷
印数:1~5 000
ISBN 978-7-5422-2946-5 定价:24.00元

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

<table>
<tr><td rowspan="3">读者简介</td><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>出生年月</td><td></td></tr>
<tr><td>所在学校</td><td colspan="2"></td><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>联系方式</td><td colspan="5">(H)：　　　　(O)：
手机：　　　　E－mail：</td></tr>
<tr><td colspan="2">本书情况</td><td>学科</td><td></td><td>版本</td><td></td><td>年级　</td></tr>
<tr><td colspan="3">您对本书栏目的评价：
1. 教材梳理：
全面□　一般□　不全面□
2. 教材拓展：
难□　合理□　易□
3. 典型题解：
全面□　不全面□
4. 针对性练习：
难□　合理□　易□
5. 拓展阅读：
需要□　不需要□
6. 五年高考回放：
需要□　不需要□</td><td colspan="2">您对本书体例形式的评价：
1. 栏目设置：
过多□　适中□　过　少□
2. 题空：
过大□　正好□　过　小□
3. 版式：
美观□　一般□　不美观□
4. 封面：
美观□　一般□　不美观□</td><td colspan="2">您的购买行为：
1. 您购买本书的途径：
广　告□　教师推荐□
家长购买□　学校统一购买□
自己购买□　同学推荐□
2. 您购买本书的主要原因（可多选）：
广告宣传□　包装形式□
内　容□　图书价格□
封面设计□　书　名□</td></tr>
<tr><td colspan="7">您对本书的其他意见：</td></tr>
</table>

欢迎登录：www. jing-lun. cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

MULU

目录 MULU

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任 意 角

A 教材梳理

知识点一 任意角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.射线的起始位置是角的始边,射线的终止位置是角的终边,射线的端点是角的顶点.

按旋转方向,角可以分为三类:

(1)正角:按逆时针方向旋转形成的角.

(2)负角:按顺时针方向旋转形成的角.

(3)零角:射线没有作任何旋转形成的角.

注意:(1)掌握角的概念应注意角的三要素:顶点、始边、终边.现在所说的角实际上是初中平面几何中"角是从一点出发的两条射线所组成的图形"的概念的推广,强调了"角是由一条射线绕着它的端点旋转而成的"这一运动的观点.

(2)角度的范围不再限于$[0°,360°]$.

(3)角的概念是通过角的终边的运动来推广的,根据角的终边的旋转"方向",得到正角、负角和零角,由此我们应当意识到角的终边位置的重要性.表示角时,应注意箭头的方向不可丢掉,箭头方向代表角的正负.

(4)当角的始边相同时,若角相等,则终边相同;终边相同,而角不一定相等.

(5)为了简单起见,在不引起混淆的前提下,"角 α"或"$\angle\alpha$"可以简记为"α".

知识点二 终边相同的角

一般地,我们有:所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

注意:(1)α 是任意角,k 是整数.

(2)α 与 $k\cdot360°$ 之间是"+",如 $k\cdot360°-30°$ 应看成 $k\cdot360°+(-30°)$.

(3)当角的始边相同时,终边相同的角不一定相等,但相等的角,终边一定相同.

(4)终边相同的角有无数多个,它们相差 360°的整数倍.

知识点三 象限角与轴线角

使角的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边落在第几象限,则称 α 为第几象限角;终边落在坐标轴上的角 α 称为轴线角.

1. 象限角的集合

象限角	角的集合表示
第一象限角	$\{x\|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
第二象限角	$\{x\|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$
第三象限角	$\{x\|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$
第四象限角	$\{x\|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$

2. 轴线角的集合

轴线角	角的集合表示
终边落在 x 轴的非负半轴上的角	$\{x\|x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在 x 轴的非正半轴上的角	$\{x\|x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在 x 轴上的角	$\{x\|x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在 y 轴的非负半轴上的角	$\{x\|x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在 y 轴的非正半轴上的角	$\{x\|x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在 y 轴上的角	$\{x\|x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
终边落在坐标轴上的角	$\{x\|x=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

注意:(1)象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一.

(2)准确区分"锐角""小于90°的角""第一象限角"：

锐角是$0°<\alpha<90°$的角；

小于90°的角是$\alpha<90°$的角，显然包括0°角和负角；

第一象限角是$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$所表示的角.

(3)终边落在坐标轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

B 教材拓展

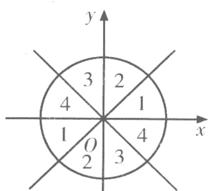
拓展点一　$\frac{\theta}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$的象限的确定

已知θ是第几象限角，要确定$\frac{\theta}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$所在象限的常用方法有两种.

方法一：分类讨论.由θ的范围得到$\frac{\theta}{n}$的范围，然后对n进行讨论，从而确定$\frac{\theta}{n}$所在象限.

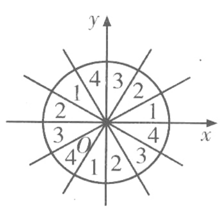
方法二：(1)$\frac{\theta}{2}$所在象限的问题.

如图所示，作出各个象限的角平分线，它们与坐标轴把周角等分成8个区域，从x轴的非负半轴起，按逆时针方向把这8个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标的数字是几的两个区域，就是θ为第几象限的角时，$\frac{\theta}{2}$的终边落在的区域，$\frac{\theta}{2}$所在的象限就可以直观地看出来了.



(2)$\frac{\theta}{3}$所在象限的问题.

如图所示，作出三等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成12个区域，从x轴的非负半轴起，按逆时针方向把这12个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的区域，就是θ为第几象限的角时，$\frac{\theta}{3}$的终边落在的区域，$\frac{\theta}{3}$所在的象限就可以直观地看出来了.



(3)$\frac{\theta}{n}$所在象限的问题.

一般地，要确定$\frac{\theta}{n}$所在的象限，可以作出n等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成$4n$个区域.从x轴的非负半轴起，按逆时针方向把这$4n$个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的区域，就是θ为第几象限的角时，$\frac{\theta}{n}$的终边落在的区域，$\frac{\theta}{n}$所在的象限就可以直观地看出来了.

拓展点二　终边相同的角与对称等几何问题

角的终边是一条射线，在平面直角坐标系中它们可能具有对称性，这些角就有一定的关系，此类问题要先找一个适合题意的角，然后由终边相同的角的集合就可将所求角表示出来，一般地：

(1)α与β的终边关于x轴对称，则$\alpha+\beta=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$；

(2)α与β的终边关于y轴对称，则$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$；

(3)α与β的终边关于原点对称，则$\alpha-\beta=(2k+1)\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$；

(4)α与β的终边在一条直线上，则$\alpha-\beta=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$.

拓展点三　数形结合的思想

角所处的范围的几何体现是角的终边所处的平面区域，因此可以由图知角，也可以由图作角，二者相辅相成.

数形结合的方法，能将区间角(象限角是特殊的区间角)在直角坐标系中正确地用图表示出来；反之，对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围，能正确地用区间角表示.

C 典型题解

▶问题一　基本概念题

例题 1　下列各命题正确的是　(　　)

A. 终边相同的角一定相等　B. 第一象限角都是锐角

C. 锐角都是第一象限角　D. 小于90°的角都是锐角

[解析]　本题主要考查任意角的概念，可根据各种角的定义，利用排除法求解；也可根据锐角和第一象限角的定义，利用定义直接判断.

解法一：对于A，$-60°$和$300°$是终边相同的角，它们并不相等，∴应排除A.

对于B，390°是第一象限角，可它不是锐角，∴应排除B.

对于D，$-60°$是小于90°的角，但它不是锐角，∴应排除D.

解法二：∵锐角的集合是$\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$，　①

第一象限角的集合是$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，　②

对于②，当$k=0$时，②与①相同.∴锐角是第一象限角.

∴选C.

[答案]　C

［点评］ 要想否定一个命题，只需举出一个反例即可，本题解法一就是恰当地举出反例，将 A、B、D 三个选项予以排除，从而确定选项 C.

例题 2 下列命题是真命题的是 （　　）

A. 三角形的内角必是第一、二象限的角

B. 第二象限的角必是钝角

C. 不相等的角终边一定不相同

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°\pm90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

［解析］ 本题主要考查象限角的概念．90°的角可以是三角形的内角，但它不是第一、二象限的角，排除 A；460°的角是第二象限的角，但它不是钝角，排除 B；390°的角与 30°的角不相等，但它们的终边相同，排除 C；D 中的两个集合都是终边落在 y 轴上的角的集合，它们相等，应选 D.

［答案］ D

［点评］ 本题易出现以下两种错解：

错解一：由于三角形内角的取值范围为(0°,180°)，故选 A.

错解二：由于第二象限的角与钝角的取值范围相同，故选 B.

以上两种错解是由于区分不清象限角、终边在坐标轴上的角、区间角等几种不同的角所造成的．

▶问题二　终边相同的角

例题 3 在与 10 030°角终边相同的角中，求满足下列条件的角：(1)最大的负角；(2)最小的正角.

［解析］ 本题主要考查有限制条件的终边相同的角. 先写出终边相同的角的一般形式，再求出满足条件的整数 k 即可，其中最大的负角在 $-360°\sim0°$ 之间，最小的正角在 $0°\sim360°$ 之间.

［答案］ (1)与 10 030°角终边相同的角的一般形式为 $\beta=k\cdot360°+10\,030°(k\in\mathbf{Z})$，由 $-360°<k\cdot360°+10\,030°<0°$，得 $-10\,390°<k\cdot360°<-10\,030°$，解得 $k=-28$，故所求的最大负角为 $\beta=-50°$.

(2)由 $0°<k\cdot360°+10\,030°<360°$，得 $-10\,030°<k\cdot360°<-9\,670°$，解得 $k=-27$，故所求的最小正角为 $\beta=310°$.

［点评］ 解决此类题目的基本方法是先写出终边相同的角的集合，然后根据要求选取 k 的值.

例题 4 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是 （　　）

A. $\{\theta|\theta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\theta|\theta=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\theta|\theta=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\theta|\theta=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

［解析］ 本题考查轴线角的表示. A,B,D 依次是终边在 x 轴的非负半轴上、x 轴上、y 轴上的角的集合. $\theta=k\cdot90°(k\in\mathbf{Z})$ 分类讨论如下：当 k 是偶数时，设 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$，则 $\theta=m\cdot180°$；当 k 是奇数时，设 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，则 $\theta=m\cdot180°+90°$. 综上，C 是 B 与 D 的并集. 故正确答案为 C.

［答案］ C

［点评］ 对 $k\in\mathbf{Z}$ 分奇数、偶数进行分类讨论是判断角的终边是否有相同情况的常用方法.

▶问题三　象限角

例题 5 已知 α 是第二象限的角，求 $2\alpha,\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限的角.

［解析］ 先写出角 α 的范围，$k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，在不等式两边同乘以 2，可得角 2α 的范围，在不等式两边同除以 3，可得角 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围，但应注意对 k 进行分类讨论.

［答案］ ①∵ α 为第二象限角，则 $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

∴ $2k\cdot360°+180°<2\alpha<2k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}$,

∴ 2α 是第三或第四象限角，以及终边落在 y 轴的非正半轴上的角．

② $k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°,k\in\mathbf{Z}$.

令 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$，则 $n\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$，∴ $\frac{\alpha}{3}$ 为第一象限角．

令 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$，则 $n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$，∴ $\frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角．

令 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$，则 $n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$，∴ $\frac{\alpha}{3}$ 为第四象限角．

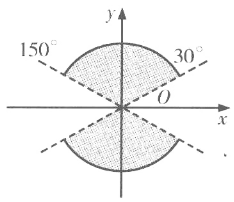
∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第四象限角.

［点评］ (1)本题中 2α 的范围应包括 y 轴的非正半轴，容易遗漏．

(2)已知角 α 所在的象限时，求解 $\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 所在的象限时，可参照拓展点一中提到的方法.

▶问题四　终边有约束条件的角的集合

例题 6　已知角 α 的终边在图中阴影所表示的范围内(不包括边界),写出角 α 的集合 S.



［解析］　本题主要考查终边相同的角的概念及表示,先在 $0°\sim360°$ 范围内找出终边落在阴影内的角,然后两边同时加上 $k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,并且要注意对角的集合化简.

［答案］　在 $0°\sim360°$ 范围内,终边落在阴影内的角为 $30°<\alpha<150°$ 与 $210°<\alpha<330°$,∴ 所有满足题意的角 α 为

$\{\alpha|k\cdot360°+30°<\alpha<k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|k\cdot360°+210°<\alpha<k\cdot360°+330°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|2k\cdot180°+30°<\alpha<2k\cdot180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|(2k+1)180°+30°<\alpha<(2k+1)180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$.

$\therefore S=\{\alpha|n\cdot180°+30°<\alpha<n\cdot180°+150°,n\in\mathbf{Z}\}$.

［点评］　(1)若角的终边为实线,则不等式中应带“=”号.

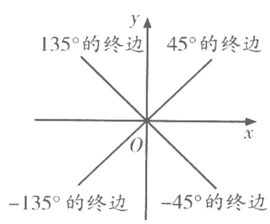
(2)本题实质上是求两个范围内角的并集,应注意化简为最简结果.

例题 7　在角的集合 $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中:

(1)有几种终边不相同的角?

(2)有几个属于区间 $(-360°,360°)$ 内的角?

［解析］　本题主要考查终边相同的角. 从代数角度看,取 $k=\cdots,-2,-1,0,1,\cdots$,可以得 α 为 $\cdots,-135°,-45°,45°,135°,\cdots$;从图形角度看是以 $45°$ 角为基础,依次加上 $90°$ 的整数倍,即依次按顺时针方向或逆时针方向旋转 $90°$ 所得各角,如图所示.



［答案］　(1)在给定的角的集合中,终边不相同的角共有四种,分别是与 $45°$、$135°$、$-135°$、-45 终边相同的角.

(2)令 $-360°<k\cdot90°+45°<360°$,得 $-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$.

又∵ $k\in\mathbf{Z}$,∴ $k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$.

∴ 属于区间 $(-360°,360°)$ 的角共有 8 个.

［点评］　把代数计算与对图形的认识结合起来即数形结合,会使这类问题处理起来更容易.

例题 8　若角 α 的终边和函数 $y=-x$ 的图象重合,试写出角 α 的集合.

［解析］　本题主要考查终边相同的角的表示,角的终边有两条,分别为第二、四象限的平分线,故先在 $0°\sim360°$ 范围内找出满足条件的角,进一步写出满足条件的所有角,并注意化简.

［答案］　解法一:由于 $y=-x$ 的图象是第二、四象限的平分线,故在 $0°\sim360°$ 范围内所对应的两个角分别为 $135°$ 及 $315°$,从而角 α 的集合为 $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+135°$ 或 $\alpha=k\cdot360°+315°,k\in\mathbf{Z}\}$,∴ $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+135°,k\in\mathbf{Z}\}$.

解法二:∵ 角 α 的终边与 $y=-x$ 的图象重合,当 $x<0$ 时的一个角为 $135°$,∴ 角 α 的集合为 $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+135°,k\in\mathbf{Z}\}$.

［点评］　终边共线且反向的角的写法有两种:一种是分别写出每条终边所代表的角的集合,再取并集;另一种是在其中一条终边上找出一个角,然后再加上 $180°$ 的整数倍.

▶问题五　两角之间的关系

例题 9　已知角 α 的终边与角 $-690°$ 的终边关于 y 轴对称,求角 α.

［答案］　$-690°=-720°+30°$,则角 α 的终边与 $30°$ 角的终边关于 y 轴对称,而与 $30°$ 角的终边关于 y 轴对称的角可取 $150°$,故 $\alpha=k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}$.

［点评］　(1)角 α,β 的终边关于直线 $y=x$ 对称,则 α,β 之间满足关系 $\alpha+\beta=k\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$.

(2)角 α,β 的终边关于直线 $y=-x$ 对称,则 α,β 之间满足关系 $\alpha+\beta=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}$.

例题 10　(1)设集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\beta|\beta=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$,则　(　　)

A. $A\supsetneqq B$　　B. $A\subsetneqq B$

C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $A=B$

(2)设集合 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{\beta|\beta=k\cdot45°,k\in\mathbf{Z}\}$,则集合 M 与集合 N 的关系是　(　　)

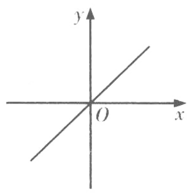
A. $M\supsetneqq N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

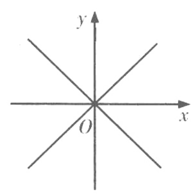
［解析］　本题主要考查角的集合之间的关系,先对集合进行化简,化为同一种式子,然后求解,或用数形结合的方法,分别在直角坐标系内作出这些角,再进行求解. (1)∵ 集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|$

$\alpha=(2k+1)\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=2k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=m\cdot 90°,m\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|\beta=k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$，∴ 集合 $A=B$，故选 D.

(2)如图①，集合 M 中的各类角的终边为两坐标轴和直线 $y=x$. 如图②，集合 N 中的各类角的终边为两坐标轴和直线 $y=x$ 和 $y=-x$. 比较图①和图②，不难得出 $M\subsetneqq N$. 故选 B.



①



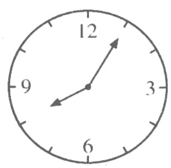
②

［答案］ (1)D (2)B

［点评］ 解决与角有关的集合问题的关键是弄清集合中含有哪些元素．其方法有三种：一种是将集合中表示角的式子化为同一种形式（这种方法要用到整数分类的有关知识，即分类讨论）；一种是用列举法把集合具体化；另一种是数形结合，即在直角坐标平面上分别作出这些角．

▶问题六 任意角在实际生活中的应用

例题 11 将钟表上的时针作为角的始边，分针作为终边，那么当钟表上显示 8 点零 5 分时，时针与分针构成的角度是________.



［解析］ 本题主要考查终边相同的角的概念与表示．应从任意角的概念出发，研究时针与分针所构成的角，其中有正角、负角，共有无穷多个角．要求这无穷多个角，根据图，可先求出负角中绝对值最小的角，应为 $-\left(4+\frac{11}{12}\right)\times 30°=-147.5°$.

∴ 所有的负角可表示为 $-k\cdot 360°-147.5°(k\in\mathbf{Z})$.

在 $0°\sim 360°$ 内最小正角为 $360°-147.5°=212.5°$.

∴ 所有的正角可表示为 $k\cdot 360°+212.5°(k\in\mathbf{Z})$.

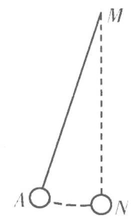
综上，所有角可表示为 $k\cdot 360°+212.5°(k\in\mathbf{Z})$.

［答案］ $k\cdot 360°+212.5°,k\in\mathbf{Z}$

［点评］ 在解决时钟中的时针与分针的角度问题时，要注意在单位时间内它们各转了多少圈．

例题 12 设钟摆每经过 1.8 s 都回到原来的位置．在图中钟摆达到最高位置时，钟摆与铅垂线所成的角为 18°，如果从这时开始计时，经过 1 min 后，请你估计钟摆在铅垂线的左边还是右边？并且此时钟摆与铅垂线所成的角是多少？

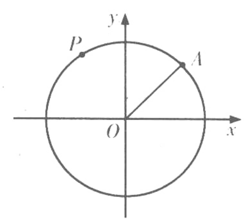
［解析］ 本题主要考查任意角在实际中的应用．



［答案］ 由于钟摆每经过 1.8 s 回到原来的位置，所以钟摆运行的周期为 1.8 s，在 AN 段从 A 到 N 运行需 $1.8\div 4=0.45$(s)．在 MN 对称的右侧运行一次同样也需0.45 s. 1 min 有 60 s，又 $60=33\times 1.8+0.6$，因此，运行 1 min 后，钟摆应在铅垂线的右边．此时，钟摆经过铅垂线 0.15 s. 钟摆与铅垂线所成的角是 $\frac{18°}{0.45}\times 0.15=6°$.

［点评］ 三角函数是描述周期现象的重要数学模型，在三角函数学习中，我们应树立一种数学模型的观念．在解决有关问题（如本题）时，要注意运用三角函数的有关知识来分析和理解．

例题 13 如图，点 A 在半径为 1 且圆心在原点的圆上，且 $\angle AOx=45°$. 点 P 从点 A 出发，依逆时针方向等速地沿单位圆周旋转．已知点 P 在 1 s 内转过的角度为 $\theta(0°<\theta<180°)$，经过 2 s 到达第三象限，经过 14 s 后又回到出发点 A，求 θ 的值，并判断其所在的象限．



［解析］ 本题主要考查终边相同的角与不等式知识．先把实际语言转化为数学语言．即 14 s 后点 P 在角 $14\theta+45°$ 的终边上，由此可得到等量关系，再注意到 θ 角的范围便可确定 θ 的值．

［答案］ 由题意有 $14\theta+45°=k\cdot 360°+45°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \theta=\frac{k\cdot 180°}{7}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $180°<2\theta+45°<270°$，即 $67.5°<\theta<112.5°$，

$\therefore 67.5°<\frac{k\cdot 180°}{7}<112.5°$，且 $k\in\mathbf{Z}$，∴ $k=3$ 或 $k=4$.

故所求的 θ 值为 $\theta=\frac{540°}{7}$ 或 $\theta=\frac{720°}{7}$.

易知 $0°<\frac{540°}{7}<90°,90°<\frac{720°}{7}<180°$，

故 θ 在第一象限或第二象限．

［点评］ 一个角每旋转一周（顺时针或逆时针），终边就又回到了原来的位置，终边相同的角周而复始地出现，这正是三角函数具有周期性的本质原因，也是解决某些问题的关键．而且这种周期现象在现实生活中有广泛的应用．

D 针对性练习

【基础题】

1. 将 $-885°$ 化为 $\alpha+k\cdot 360°(0°\leqslant\alpha<360°,k\in\mathbf{Z})$ 的形式是 ( )

A. $-165°+(-2)\times 360°$ B. $195°+(-3)\times 360°$

C. $195°+(-2)\times360°$　　D. $165°+(-3)\times360°$

2. 与 $-457°$ 终边相同的角的集合是（　　）

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+457°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+97°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+263°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$

3. 设 $E=\{$小于 $90°$ 角$\}$，$F=\{$锐角$\}$，$G=\{$第一象限的角$\}$，$M=\{$小于 $90°$ 但不小于 $0°$ 的角$\}$，则有（　　）

A. $F\subsetneqq G\subsetneqq E$　　B. $F\subsetneqq E\subsetneqq G$

C. $M\subsetneqq(E\cap G)$　　D. $(E\cap G)\cap M=F$

4. 若 α 是第四象限角，则 $180°-\alpha$ 是（　　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

5. 下列命题：①小于 $90°$ 的角是锐角；②第一象限的角小于第二象限的角；③终边相同的角一定相等；④相等的角终边一定相同；⑤若 $\alpha\in[90°,180°]$，则 α 是第二象限角. 其中正确的是________.

6. 时钟走了 3 小时 20 分，则时针所转过的角的度数为________，分针转过的角的度数为________.

【综合提升】

7. 若角 α 与 $65°$ 角的终边相同，角 β 与 $-115°$ 角的终边相同，那么 α 与 β 之间的关系是（　　）

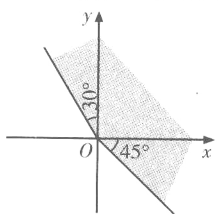
A. $\alpha+\beta=-50°$

B. $\alpha-\beta=180°$

C. $\alpha+\beta=k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha-\beta=k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$

8. 如图所示，终边落在阴影部分的角的集合是（　　）



A. $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant120°\}$

B. $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant315°\}$

C. $\{\alpha|k\cdot360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+315°,k\in\mathbf{Z}\}$

9. 在平面直角坐标系中，若角 α 与 β 的终边互相垂直，则角 α 与 β 的关系为（　　）

A. $\beta=\alpha+90°$

B. $\beta=\alpha\pm90°$

C. $\beta=k\cdot360°+\alpha+90°,k\in\mathbf{Z}$

D. $\beta=k\cdot360°+\alpha\pm90°,k\in\mathbf{Z}$

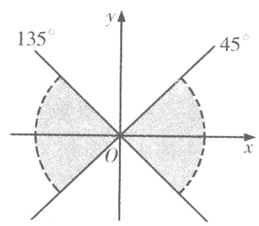
10. 集合 $A=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|\beta=60°+k\cdot720°,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\gamma|\gamma=60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，那么集合 A、B、C 的关系是________.

11. 角 α 满足 $180°<\alpha<360°$，角 5α 与 α 有相同的始边，且又有相同的终边，那么角 $\alpha=$________.

12. 自行车大链轮有 48 个齿，小链轮有 20 个齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度应该是________（链齿大小相等）.

13. 若角 θ 的终边与 $168°$ 角的终边相同，求在 $[0°,360°]$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

14. 已知角 β 的终边在如图阴影所表示的范围内（包括边界），试写出角 β 的集合.



15. 点 A 在以原点为圆心的圆周上依逆时针方向做匀速圆周运动. 已知点 A 从 x 轴正半轴出发，1 min 转过 $\theta(0°<\theta<180°)$ 角，2 min 到达第三象限，14 min 在原来出发的位置，求 θ 的值.

［参考答案］

1. B　解析：$-885°=-1\,080°+195°=(-3)\times360°+195°$.

2. C　解析：解法一：$-457°=-2\times360°+263°$. 解法二：$-457°$ 与 $-97°$ 终边相同，又 $-97°$ 与 $263°$ 终边相同，$263°$ 与 $k\cdot360°+263°$ 终边相同. ∴ 应选 C.

3. D　解析：先明确题设所给出的四个集合中作为元素的角的具体含义，再寻求这些集合间的内在关系，再对照每一个选项，从而明辨真伪；也可利用数形结合的方法，在直角

坐标平面上分别画出表示集合 E、F、G、M 的示意图，再通过直观的图形得出答案；还可用特例排除法求解：$360°+10°\in G$，但 $370°\notin E$，排除 A；同理由 $-10°$ 可排除 B，由 $0°$ 可排除 C，故选 D.

4. C　解析：由题意，知 $k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°$，$-k\cdot360°-360°<-\alpha<-k\cdot360°-270°$，故 $-k\cdot360°-180°<180°-\alpha<-k\cdot360°-90°$，$\therefore$ $180°-\alpha$ 是第三象限角.

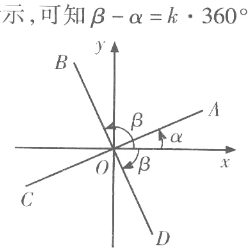
5. ④　解析：$-10°$ 小于 $90°$，但它不是锐角，故①错误；$370°$ 是第一象限的角，$100°$ 是第二象限的角，但 $370°>100°$，故②错误；终边相同的角不一定相等，相等的角终边一定相同，故③错误，④正确；$90°$，$180°$ 不是第二象限的角，故⑤错误.

6. $-100°$　$-1\,200°$　解析：从时针和分针每小时或每分钟转过的角度数切入，时针每小时转 $30°$，分针每小时转 $360°$，每分钟转 $6°$. 时针、分针都按顺时针方向旋转，故转过的角度数都是负的，3 小时 20 分即 $3\frac{1}{3}$ 小时，故时针转过的角度数为 $-3\frac{1}{3}\times30°=-100°$；分针转过的角度数为 $-3\frac{1}{3}\times360°=-1\,200°$.

7. D　解析：$\{\alpha|\alpha=k_1\cdot360°+65°,k_1\in\mathbf{Z}\}$；$\{\beta|\beta=k_2\cdot360°-115°,k_2\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore$ $\alpha-\beta=k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，故选 D.

8. C　解析：在 $(-360°,360°)$ 范围内，阴影部分表示 $(-45°,120°)$，故选 C.

9. D　解析：如图所示，可知 $\beta-\alpha=k\cdot360°\pm90°,k\in\mathbf{Z}$.



10. $B\subsetneqq A\subsetneqq C$　解析：集合 A 中的角表示所有与 $60°$ 终边相同的角，集合 B 中的角的终边也与 $60°$ 终边相同，但比集合 A 的元素个数少. 而集合 C 中当 k 为偶数，即 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$\gamma=60°+n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$；当 k 为奇数，即 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，$\gamma=240°+n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ 集合 C 中的角不但表示所有与 $60°$ 终边相同的角，还含有所有与 $240°$ 终边相同的角. 故应填 $B\subsetneqq A\subsetneqq C$.

11. $270°$　解析：$\because$ 5α 与 α 的始边和终边相同，$\therefore$ 这两角的差应是 $360°$ 的整数倍，即 $5\alpha-\alpha=4\alpha=k\cdot360°$，又 $180°<\alpha<360°$，令 $k=3$，得 $\alpha=270°$.

12. $864°$　解析：当大链轮转过一周时，共 48 齿，这时小链轮也必须转过 48 齿，有 $\frac{48}{20}=2.4$（周），即小链轮转过了 2.4（周），则小链轮转过的角度是 $360°\times2.4=864°$.

13. 解：$\theta=k\cdot360°+168°,k\in\mathbf{Z}$，$\frac{\theta}{3}=k\cdot120°+56°,k\in\mathbf{Z}$，依题意得 $0°\leqslant k\cdot120°+56°\leqslant360°$，当 $k=0,1,2$ 时，$k\cdot120°+56°$ 在 $[0°,360°]$ 内，$\therefore$ 在 $[0°,360°]$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角有 $56°,176°,296°$.

14. 解：在 $[-45°,270°]$ 范围内，终边落在阴影内的角为 $-45°\leqslant\alpha\leqslant45°$，$135°\leqslant\alpha\leqslant225°$，$\therefore$ 所有满足题意的角 α 为 $\{\alpha|k\cdot360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|k\cdot360°+135°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+225°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|2k\cdot180°-45°\leqslant\alpha\leqslant2k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|(2k+1)\cdot180°-45°\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore$ $\beta=\{\beta|n\cdot180°-45°\leqslant\beta\leqslant n\cdot180°+45°,n\in\mathbf{Z}\}$.

15. 解：由 $0°<\theta<180°$，可得 $0°<2\theta<360°$.
由题意知 2θ 的终边在第三象限，即 $180°<2\theta<270°$，
$\therefore$ $1\,260°<14\theta<1\,890°$.
又由题意知 $14\theta=k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，故 $k=4$ 或 $k=5$，
$\therefore$ $14\theta=4\times360°$，即 $\theta=\left(\frac{720}{7}\right)°$，
或 $14\theta=5\times360°$，即 $\theta=\left(\frac{900}{7}\right)°$.

E 课后答案点拨

［练习（P5）］

1. 略.

2. 星期三，星期三，星期五.

3. (1)第一象限角；(2)第四象限角；(3)第二象限角；(4)第三象限角.（图略）

4. (1)$305°42'$，第四象限角.　点拨：$\because$ $-54°18'=-1\times360°+305°42'$，$\therefore$ $-54°18'$ 的角和 $305°42'$ 的角的终边相同，它是第四象限的角.

(2)$35°8'$，第一象限角.　点拨：$\because$ $395°8'=1\times360°+35°8'$，$\therefore$ $395°8'$ 的角和 $35°8'$ 的角的终边相同，它是第一象限的角.

(3)$249°30'$，第三象限角.　点拨：$\because$ $-1\,190°30'=-4\times360°+249°30'$，$\therefore$ $-1\,190°30'$ 的角和 $249°30'$ 的角的终边相同，它是第三象限的角.

5. (1)$\{\beta|\beta=1\,303°18'+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，分别令 $k=-5,-4,-3$，得 β 为 $-496°42'$，$-136°42'$，$223°18'$.

(2)$\{\beta|\beta=-225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，分别令 $k=-1,0,1$，得 β 为 $-585°$，$-225°$，$135°$.

F 拓展阅读

中国古代有关三角的一些研究

三角学是一门研究三角形边和角的关系、三角函数及其间的关系的一门学科．我国对三角早有研究．早在春秋战国时期，齐国出了一本有名的工具书，名叫《考工记》，书中记载了几种特殊角的名称：90°角叫做“矩”，45°角叫做“宣”，135°角叫做“罄折”等．在公元前1世纪成书的数学著作《周髀算经》里，已记载了平面测量的内容，其中包括利用直角三角形和勾股定理来解决一些实际问题．公元3世纪我国著名数学家刘徽在计算单位圆（半径等于单位长度的圆）的内接（顶点都在同一圆上）正六边形等图形的边长时，以及公元13世纪赵友钦在计算圆内接正方形的边长时，实际上已求得了某些特殊角的正弦值．在我国古代历法书中关于根据竿的不同影长来确定季节和时令的方法的记载，实际上已构成了一份余切值表．16世纪，外国的三角知识传入我国，那时已有正弦、余弦、正切、余切、正割、余割及正矢、余矢等八个名称，总称八线．17世纪，第一部中文的平面三角学（邓玉函等编译的《大测》2卷）和球面三角学（徐光启等编译的《测量全义》10卷）相继问世．

1.1.2 弧 度 制

A 教材梳理

知识点一　角度制与弧度制

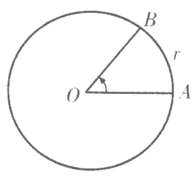
1. 角度制

规定周角的$\frac{1}{360}$为1度的角，这种用度作为单位来度量角的制度叫做角度制．

注意：角的大小不因为圆的大小而改变，所以角度是一个与圆的半径无关的量．

2. 弧度制

把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角，如图，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$就是1弧度的角，弧度制的单位符号是rad，读作弧度．用弧度为单位表示角的大小时，“弧度”与“rad”可略去不写，而只写角所对应的弧度数．



如图中$\angle AOB$的弧度数为$\frac{l}{r}=\frac{r}{r}=1$.

由此我们可以看出，这样规定出来的1弧度的角的大小是完全确定的，跟所用圆的大小无关，即与圆的半径无关，这种以弧度为单位来度量角的制度叫做弧度制．

3. 角与实数的对应

正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0，任意角α的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$，其中l是以α为圆心角所对的弧长，r是圆的半径．除零之外的角的度数和弧度数是不相同的．

角的概念推广后，在弧度制下，角的集合与实数集**R**之间建立起一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数（即这个角的弧度数）与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角（即弧度数等于这个实数的角）与它对应．

注意：(1)使用公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$求角时，得出的是角α弧度数的绝对值大小，其正负由角α终边的旋转方向决定．

(2)角α与所在圆的半径大小无关，它由比值$\frac{l}{r}$唯一确定．

(3)公式中角α是弧度数，不是角度数．

知识点二　角度与弧度的换算公式

1. 角度转化为弧度：$360°=2\pi$ rad；$180°=\pi$ rad；$1°=\frac{\pi}{180}$rad≈0.01745 rad.

2. 弧度转化为角度：2π rad $=360°$，π rad $=180°$；1 rad $=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°=57°18'$.

3. 弧度制与角度制的换算公式：设一个角的弧度数为α，角度为$n°$，则$\alpha(\text{rad})=\left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)°$，$n°=n\cdot\frac{\pi}{180}(\text{rad})$.

4. 一些需要记住的特殊角的弧度数：

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

注意：角度制与弧度制是两种不同的度量单位，在表示角时，角度制与弧度制不能混用．

知识点三　弧长与扇形面积公式

1. 弧长公式：在半径为 r 的圆中，弧长为 l 的弧所对的圆心角大小为 α，则 $\alpha=\frac{l}{r}$，变形可得 $l=\alpha r$，此公式称为弧长公式，其中的 α 是弧度角．

2. 扇形面积公式：因为圆心角为 1 rad 的扇形面积为 $\frac{\pi r^2}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2$，而弧长为 l 的扇形的圆心角大小为 $\frac{l}{r}$rad，所以其面积为 $S=\frac{l}{r}\times\frac{r^2}{2}=\frac{1}{2}lr$，将 $l=\alpha r$ 代入上式可得 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$，此公式称为扇形面积公式．

3. 弧长公式及扇形面积公式的两种表示

	角度制	弧度制
弧长公式	$l=\frac{n\pi r}{180}$	$l=\lvert\alpha\rvert r$
扇形面积公式	$S=\frac{n\pi r^2}{360}$	$S=\frac{\lvert\alpha\rvert}{2}r^2=\frac{1}{2}lr$
注意事项	r 是扇形的半径，n 是圆心角的角度数	r 是扇形的半径，α 是圆心角的弧度数，l 是弧长

显然弧度制下的两个公式在形式上都要简单得多，记忆和应用也就更加方便．

注意：在弧度制下的弧长公式、面积公式有诸多优越性，但如果已知角是以"度"为单位，则必须先化成弧度后再计算．

B 教材拓展

拓展点一　区间角的表示

1. 概念：从一个角到另一个角之间的所有角的集合，称为一个区间角．

2. 表示：在表示区间角时，要先把角度换算成弧度，再写出与区间角的终边相同的角的集合，最后利用不等式表示出区间角的集合，对于能合并的应当合并．

3. 常见错误：在表示图形所表示的区间角时，常会出现矛盾不等式的情况，这是由于没有弄清角的大小所致．

注意：对于区间角的书写，一定要看其区间是否跨越 x 轴的正方向，若区间跨越 x 轴的正方向，则在前面的角用负角表示，后面的角用正角来表示；若区间不跨越 x 轴的正方向，则无需这样写．

拓展点二　实际问题中的弧长与面积

1. 旋转在现实生活中比比皆是，旋转的转速、半径、圆心角等都可以与弧长和面积联系起来，对于弧长和面积公式应当熟记，要搞清圆心角与转速的关系，即 $\theta=\omega t$，ω 为转速，t 为旋转时间，有了圆心角之后，就能根据公式求弧长与面积了．

人看文字时有一个视角问题，要看清远处的文字，必须使文字达到规定的张角，此时把汉字的长近似地看成圆弧长，视角即是圆弧所对的圆心角，于是结合公式可以进行相关运算．

2. 对于弧长和面积求解，通常要结合方程（组）来进行计算，一般先设出半径、弧长，将已知条件利用公式转化为方程（组），解方程（组）后再计算面积，两个公式必须牢记：$l=\lvert\alpha\rvert r$，$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\lvert\alpha\rvert r^2$．

C 典型题解

▶问题一　角度与弧度的换算

例题 1　填空：(1) 18° = ________ rad；(2) 67°30′ = ________ rad；(3) $-\frac{9}{4}\pi=$ ________°；(4) 2 rad = ________°．

［解析］　本题主要考查角度与弧度的换算，直接套用角度与弧度的换算公式即可．

(1) $18°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\times18=\frac{\pi}{10}\text{rad}$；

(2) $67°30'=67.5°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\times67.5=\frac{3\pi}{8}\text{rad}$；

(3) $-\frac{9}{4}\pi=-\left(\frac{9}{4}\times180°\right)=-405°$；

(4) $2\text{ rad}=2\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°\times2=114.60°$．

［答案］　(1) $\frac{\pi}{10}$　(2) $\frac{3\pi}{8}$　(3) -405　(4) 114.60

［点评］　(1) 进行角度与弧度换算时，要抓住关系：π rad = 180°．

(2) 特殊角的度数与弧度数对应值要记熟．

例题 2 (1)把 $-1\,480°$ 写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$；

(2)若 $\beta\in[-4\pi,0]$，且 β 与(1)中 α 的终边相同，求 β.

[解析] (1)考查角度与弧度的互化.利用互化关系将 $-1\,480°$ 化为弧度即可；(2)由 β 的范围及 $\beta=\alpha+2k\pi$ 即可求出 β.

[答案] (1) $-1\,480°=-\frac{74\pi}{9}=-8\pi-\frac{2\pi}{9}=-10\pi+\frac{16\pi}{9}$.

$\because 0\leqslant\frac{16\pi}{9}<2\pi$，$\therefore -1\,480°=\frac{16\pi}{9}+2\times(-5)\pi$.

(2) $\because \beta$ 与 α 的终边相同，

$\therefore \beta=\alpha+2k\pi=\frac{16\pi}{9}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

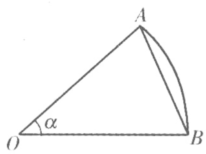
又 $\because \beta\in[-4\pi,0]$，

$\therefore \beta_1=\frac{16\pi}{9}-2\pi=-\frac{2\pi}{9}$，$\beta_2=\frac{16\pi}{9}-4\pi=-\frac{20\pi}{9}$.

[点评] 快速准确地实现角度和弧度的互化在今后的学习中是必要的，而实现这两者之间互化的桥梁就是 $180°=\pi$ rad.

▶问题二 扇形面积、弧长公式的应用

例题 3 如图，扇形 AOB 的面积是 4 cm^2，它的周长是 10 cm，求扇形的中心角 α 的弧度数及弦 AB 的长.



[解析] 本题主要考查扇形的面积公式，弧长及弦长等概念，由 $S=\frac{1}{2}lR$ 和 $|\alpha|=\frac{l}{R}$ 可求解.

[答案] 设 $\overset{\frown}{AB}$ 长为 l cm，扇形半径为 R cm，则由题意，得

$\begin{cases}l+2R=10,\\ \frac{1}{2}l\cdot R=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}R=1,\\ l=8\end{cases}$（不合题意，舍去）或 $\begin{cases}R=4,\\ l=2.\end{cases}$

$\therefore \alpha=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}(\text{rad})$.

$\therefore$ 弦 $AB=2\times4\times\sin\frac{1}{4}=8\sin\frac{1}{4}(\text{cm})$.

[点评] 弧度制下扇形的弧长公式、面积公式均得到简化，解决这些问题通常采用弧度制．一般地，几何图形中研究角的范围是 $[0,2\pi)$.

例题 4 一扇形的周长为 20 cm，则扇形的半径和圆心角各取什么值时，才能使扇形面积最大？

[解析] 本题主要考查扇形面积公式，圆心角及函数最值，由已知条件，列出扇形面积与 r 之间的函数关系式，转化为二次函数最值问题处理.

[答案] 设扇形圆心角为 θ，半径为 r，面积为 S，则 $2r+\theta r=20$，$\therefore \theta=\frac{20-2r}{r}$，$S=\frac{1}{2}\theta r^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{20-2r}{r}\cdot r^2=(10-r)r=10r-r^2$. $\therefore$ 当 $r=\frac{-10}{2\times(-1)}=5$ 时，$S_{\max}=25$，此时 $\theta=2$.

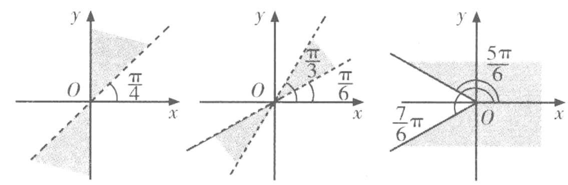
[点评] (1)联系半径、弧长和圆心角的有两个公式：一是 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$，二是 $l=|\alpha|r$，如果已知其中两个，就可以求出另一个.

(2)函数思想、转化为方程的思想是解决数学问题的常用思想.

(3)当扇形周长一定时，其面积有最大值，最大值的求法是把面积 S 转化为 r 的函数.

▶问题三 区间角的表示

例题 5 写出终边在如图所示各图中阴影部分的角的集合（虚线表示不含边界，实线表示含边界）.



① ② ③

[解析] 本题考查区间角的表示，在表示区间角时，要先把角度换算成弧度，再写出与区间角的终边相同的角的集合，最后利用不等式表示出区间角的集合，能合并的要合并.

[答案] ①终边落在阴影部分在第一象限的角的集合为

$S_1=\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

终边落在阴影部分在第三象限的角的集合为

$S_2=\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\alpha\leqslant2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$\therefore$ 适合题意的角的集合为

$S=S_1\cup S_2$

$=\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}\text{或}(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha\,\middle|\,n\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$

②依照①得，所求角的集合为

$S=\left\{\alpha\,\middle|\,n\pi+\frac{\pi}{6}<\alpha<n\pi+\frac{\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$