高等数学学习辅导丛书

高等数学

习题全解 上册

GAODENG SHUXUE
XITI QUANJIE

主编　徐丽君　温松

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等数学学习辅导丛书

高等数学习题全解

（上册）

主 编 徐丽君 温 松

西南交通大学出版社

·成 都·

前 言

本书是与张波汉、谭千蓉编写的 21 世纪高等教育规划教材《高等数学》相配套的学习辅导书，本书分为上下两册出版，其中内容包含了《高等数学》中全部习题的详细解答。

自从教材出版以来，我们不断收到读者来信和电子邮件，希望我们能提供教材中习题的解答，以便他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求，促使我们编写了这本《高等数学习题全解》。

本书给出了教材中全部习题的解答，只是大部分习题，书中给出的解法并不是唯一的。事实上，教材中大部分习题都是有多种解法的，而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型习题，希望读者能自己思考是否有多种解法，这将有助于对数学知识的融会贯通，提高自己的解题能力。

本书各章的编者是：第一章、第二章由于巍巍编写；第三章由陈新娟编写；第四章、第七章由徐丽君编写；第五章由刘涛编写；第六章由李世权编写；第八章、第十一章由温松编写；第九章由蒲永燕编写；第十章由王淑良编写；第十二章由廖永志编写。

由于编者水平有限，书中给出的题解难免会有缺陷，希望广大读者提出宝贵的意见和建议，以便今后再版时改进。

编 者

2010 年 6 月

目 录

第一章 函数与极限

第一节 函 数

习题 1.1

1. 用区间表示下列变量的变化范围.

（1）$-1 \leqslant x < 2$； （2）$x^2 > 4$；

（3）$\dfrac{1}{x+2} < 2$； （4）$|x-1| < 4$.

解 （1）$[-1,2)$.

（2）因为 $x^2 > 4$，所以 $x > 2$ 或 $x < -2$，用区间表示为 $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

（3）因为 $\dfrac{1}{x+2} < 2$，所以 $x > -\dfrac{3}{2}$ 或 $x < -2$，用区间表示为 $(-\infty,-2) \cup (-\dfrac{3}{2},+\infty)$.

（4）因为 $|x-1| < 4$，所以 $-3 < x < 5$，用区间表示为 $(-3,5)$.

2. 判断下列每组的两个函数是不是同一函数.

（1）$f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$，$g(x) = x+2$；（2）$f(x) = |x|$，$g(x) = \sqrt{x^2}$；（3）$f(x) = \dfrac{x^2}{x}$， $g(x) = x$.

解 （1）因为 $f(x)$、$g(x)$ 两个函数的定义域不同，所以不是同一函数.

（2）$f(x)$、$g(x)$ 是同一函数.

（3）因为 $f(x)$、$g(x)$ 两个函数的定义域不同，所以不是同一函数.

3. 求下列函数的定义域.

（1）$y = \sqrt{2x-1}$；

（2）$f(x) = \sqrt{\cos x}$；

（3）$f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$；

（4）设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ 2, & -2 < x \leqslant 1 \\ x^2, & x \leqslant -2 \end{cases}$；

（5）$y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} + \log_a(x+2)$；

（6）$y = \arccos(1-x^2) + (x-1)$；

（7）$y = f(3x-2) + \tan x$，其中 $f(x)$ 的定义域为[0，4].

解 （1）根据题意得：$2x-1\geqslant 0$，即 $x-\dfrac{1}{2}\geqslant 0$，所以函数的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

（2）根据题意得：$\cos x\geqslant 0$，所以函数的定义域为

$$\left\{x\left|-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$$

（3）根据题意得：$x^2+x-6\neq 0$，即 $x\neq -3$ 且 $x\neq 2$，所以函数的定义域为

$$\{x|x\in\mathbf{R},x\neq -3\text{且}x\neq 2\}$$

（4）$x\in\mathbf{R}$

（5）根据题意得：$x^2-2x-3>0$ 且 $x+2>0$，即 $-2<x<-1$ 或 $x>3$，所以函数的定义域为

$$\{x|-2<x<-1\}\cup\{x|x>3\}$$

（6）根据题意得：$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，所以函数的定义域为

$$\{x|-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$$

（7）根据题意得：$0\leqslant 3x-2\leqslant 4$ 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $\dfrac{2}{3}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为

$$\left\{x\left|\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right.\right\}\cup\left\{x\left|\frac{\pi}{2}<x\leqslant 2\right.\right\}$$

4. 求下列函数的函数值.

（1）已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & (x\geqslant 1)\\ -x+3, & (x<1)\end{cases}$，求 $f(0)$，$f[f(2)]$；

（2）已知函数 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\dfrac{1-x^2}{x^2}$（$x\neq 0$），求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解 （1）

$$f(0)=-0+3=3$$

$$f[f(2)]=f(2+1)=f(3)=3+1=4$$

（2）令 $1-2x=\dfrac{1}{2}$，则 $x=\dfrac{1}{4}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=15$.

5. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

证明 因为

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\frac{1}{t}}+5\left(\frac{1}{t}\right)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

所以

$$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$$

6. 设
$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$
求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图像.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$. 如图 1.1 所示.

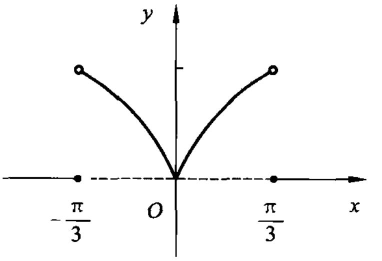


图 1.1

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性.

（1）$y=x^2,(-1,0)$；

（2）$y=\lg x,(0,+\infty)$；

（3）$y=\sin x,\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证明　（1）设 $-1<x_1<x_2<0$，则
$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$
因为 $x_1-x_2<0$，而 $x_1+x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数是单调递减的.

（2）设 $0<x_1<x_2$，则
$$f(x_1)-f(x_2)=\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2}$$
因为 $0<\dfrac{x_1}{x_2}<1$，所以 $\lg\dfrac{x_1}{x_2}<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即
$$f(x_1)<f(x_2)$$
所以函数是单调增加的.

（3）设 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$，则
$$f(x_1)-f(x_2)=\sin x_1-\sin x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}$$
因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$；而 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，所以 $\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，所以
$$f(x_1)-f(x_2)<0$$
即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数是单调增加的.

8. 判断下列函数的奇偶性.

（1）$y=x^3+x$；　　（2）$y=x+\sin x$；

（3）$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　　　（4）$f(x)=\tan x+\cos x$；

（5）$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　　　（6）$f(x)=1+\dfrac{2}{2^x-1}$.

解　（1）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，并且$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-f(x)$，所以函数$f(x)$是奇函数.

（2）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，并且$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x)$，所以函数$f(x)$是奇函数.

（3）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，并且$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以函数$f(x)$是偶函数.

（4）函数$f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$，并且$f(-x)=-\tan x+\cos x$，所以函数$f(x)$是非奇非偶函数.

（5）函数$f(x)$的定义域为$\{x|x<-1或x>1\}$，并且

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg(1+x)-\lg(1-x)=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以函数$f(x)$是奇函数.

（6）函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\in\mathrm{R},x\neq 0\}$，并且

$$f(-x)=1+\frac{2}{2^{-x}-1}=\frac{1+2^x}{1-2^x}=-1-\frac{2}{2^x-1}=-f(x)$$

所以函数$f(x)$是奇函数.

9. 说明下列函数哪些是周期函数？并指出最小正周期.

（1）$y=\sin 3x$；　　　　（2）$y=\sin^2 x$.

解　（1）因为$y=f(x)=\sin 3x$，

$$f\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=\sin 3x=f(x)$$

所以$y=\sin 3x$是周期函数，最小正周期为$\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）因为　$y=f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$f(x+k\pi)=\frac{1-\cos 2(x+k\pi)}{2}=\sin^2 x=f(x)$$

所以$y=\sin^2 x$是周期函数，最小正周期为π.

10. 已知函数$f(x)=\log_2 x+3$的定义域是$[1,8]$，求它的反函数$f^{-1}(x)$的定义域.

解　因为$1\leqslant x\leqslant 8$，所以$0\leqslant\log_2 x\leqslant 3$，则$3\leqslant y\leqslant 6$，所以反函数$f^{-1}(x)$的定义域为$[3,6]$.

11. 求下列函数的反函数.

（1）$y=\frac{1}{1-x^2}$（$x<-1$）；　　（2）$y=\log_2(x^2-2x)$（$x>2$）.

解　（1）因为 $y=\frac{1}{1-x^2}$，$x<-1$，即 $1-x^2=\frac{1}{y}$，则 $x=-\sqrt{1-\frac{1}{y}}$，所以反函数为

$$y=-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\ (x<0)$$

（2）因为 $y=\log_2(x^2-2x)$，即 $x^2-2x=2^y$，则 $(x-1)^2=2^y+1$，所以

$$x=1+\sqrt{2^y+1}$$

即反函数为 $y=1+\sqrt{2^x+1}\quad(x\in\mathbf{R})$.

12. 求下列各题中由所给函数构成的复合函数.

（1）$y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2-1$；　（2）$y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=2x+3$；

（3）$y=\sqrt[3]{u}$，$u=1+v$，$v=\sin t$，$t=x+1$.

解　（1）$y=e^{\sqrt{x^2-1}}$.

（2）$y=(\arctan(2x+3))^2$.

（3）$y=\sqrt[3]{1+\sin(x+1)}$.

13. 指出下列函数的复合过程.

（1）$y=\ln(\sin\sqrt{x})$；　（2）$y=e^{\arctan 2x}$；　（3）$y=\sin\frac{x}{1+x}$.

解　（1）函数由 $y=\ln u,u=\sin v,v=\sqrt{x}$ 复合而成.

（2）函数由 $y=e^u,u=\arctan v,v=2x$ 复合而成.

（3）函数由 $y=\sin u,u=\frac{x}{1+x}$ 复合而成.

14. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间上的 $(-l,l)$，证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

（3）定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明　（1）设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$，令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$，令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

（2）设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$，令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，

于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$，令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x)$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x)$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

（3）令 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2},G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，所以

$$f(x)=F(x)+G(x) \text{ 又 } F(-x)=F(x),G(-x)=-G(x)$$

则结论得证.

15. 设 $f(x)$ 适合 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数），且 $|a|\neq b$，试证

$$f(-x)=-f(x)$$

证明 因为 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，则 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$. 由这两个等式得

$$f(x)=\frac{c(a-bx^2)}{(a^2-b^2)x}$$

则

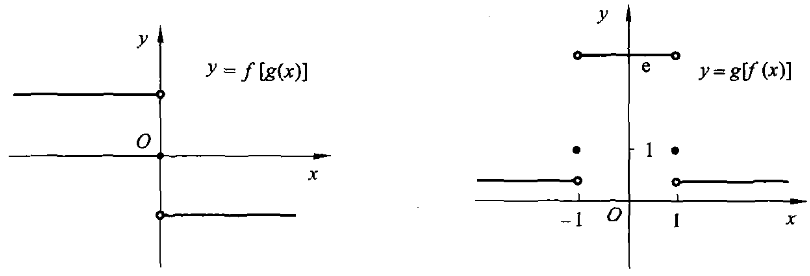
$$f(-x)=\frac{c[a-b(-x)^2]}{(a^2-b^2)(-x)}=-\frac{c(a-bx^2)}{(a^2-b^2)x}=-f(x)$$

所以 $f(-x)=-f(x)$.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$ 和 $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并作出这两个函数的图像.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1\end{cases}$

两个函数图像如图 1.2 所示.



（a）　　　　（b）

图 1.2

17. 对于函数 $f(x)=\sqrt{x}$，应如何选择邻域 $\mathrm{U}(0,\delta)$ 的半径 δ，使 $\forall x\in \mathrm{U}(0,\delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $\mathrm{U}(0,3)$ 内.

解　因为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 函数值都在邻域 $\mathrm{U}(0,3)$ 内，即 $0<\sqrt{x}<3$，得 $0<x<9$，所以 $\delta=9$.

18. 证明：

（1）$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$；（2）$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$.

证明　（1）左边 $=\mathrm{sh}(x+y)=\dfrac{\mathrm{e}^{(x+y)}-\mathrm{e}^{-(x+y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-y}}{2}$

右边 $=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-y}}{2}$$

两边相等，所以 $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$.

（2）左边 $=\mathrm{sh}(x-y)=\dfrac{\mathrm{e}^{(x-y)}-\mathrm{e}^{-(x-y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{y}}{2}$

右边 $=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{y}}{2}$$

两边相等，所以 $\mathrm{sh}(x-y)==\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$.

19. 规定，公民全月工薪、薪金，800 元内免收个人工薪、薪金所得税，超过 800 元的部分为全月应纳所得税额，此项款按表 1.1 分段累计进行计算.

表 1.1

级数	全月应纳所得税额	税率
1	应纳税额不超过 500 元的部分	5%
2	应纳税额超过 500 元至 2 000 元的部分	10%
3	应纳税额超过 2 000 元至 5 000 元的部分	15%
	⋮	⋮
9	超过 100 000	45%

（1）若应纳税额为 $f(x)$，试用分段函数表示 1～3 级纳税额 $f(x)$ 的计算公式.

（2）某人 2000 年 5 月份工薪总收入为 3 000 元，试计算这人 5 月份应缴纳个人所得税多少元？

解 （1）$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 800 \\ 5\%\cdot(x-800), & 800<x\leqslant 1\,300 \\ 5\%\times 500+10\%\cdot(x-1\,300), & 1\,300<x\leqslant 2\,800 \\ 5\%\times 500+10\%\times 1\,500+15\%\times(x-2\,800), & 2\,800<x\leqslant 5\,800 \end{cases}$

（2）因为 $3\,000>2\,800$，所以应缴纳的个人所得税为

$$5\%\times 500+10\%\times 1\,500+15\%\times(3\,000-2\,800)=205\ （元）$$

20. 已知一物体与地面的摩擦系数是μ，重量是 P. 设有一与水平方向成α角的拉力 F，使物体从静止开始移动（见图 1.3，即教材图 1.30），求物体开始移动时拉力 F 与角α之间的函数关系式.

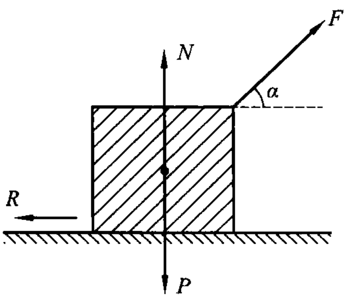


图 1.3

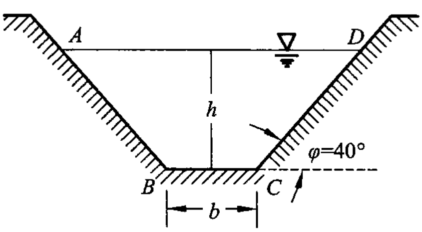


图 1.4

解 根据物体受力情况得：

垂直方向：　$N+F\sin\alpha=P$　①

水平方向：　$F\cos\alpha=\mu N$　②

把①式中的 N 带入②式，得

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$$

21. 已知水渠的横断面为等腰梯形，倾斜角 $\varphi=40°$（见图 1.4，即教材图 1.31）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周（ $L=AB+BC+CD$ ）与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

解 因为面积 $S_0=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h$，而 $AD=BC+2AB\cdot\sin 40°$，所以

$$S_0=(AB\cdot\cos 40°+BC)\cdot h$$

而 $AB=\dfrac{h}{\sin 40°}$，所以

$$BC=\frac{S_0}{h}-h\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$$

则湿周

$$L=\frac{S_0}{h}-h\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}+2\frac{h}{\sin 40^\circ}=\frac{S_0}{h}+(2\csc 40^\circ-\cot 40^\circ)h\ ,\quad h\in(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$$

22. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费计算，如从广州到某地每 kg 收 0.5 元；当超过 50 kg 时，超重部分按每千克 0.75 元收费，试求广州到该地的行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式.

解　广州到该地的行李费与重量之间的函数关系式如下

$$y=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50\end{cases}$$

第二节　数列的极限

习题 1.2

1. 观察数列$\{x_n\}$的一般项 x_n 的变化趋势，并写出它们的极限.

（1）$x_n=\frac{n+1}{n}$；　（2）$x_n=(-1)^n$；　（3）$x_n=\frac{5}{2^n+1}$；

（4）$x_n=\sin\frac{1}{n}$；　（5）$x_n=n+3$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

（2）当 n 无限增大时，一般项总是取 - 1，1，故极限不存在.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{2^n+1}=0$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$.

（5）当 n 无限增大时，一般项趋于无穷大，故无极限.

2. 判断下列说法是否与数列极限的定义等价.

（1）对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，满足不等式 $|x_n-a|<M\varepsilon^2$（M 为正常数）;

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 中含有数列$\{x_n\}$的无穷多项；

（3）对 $\forall\varepsilon>0$，在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外只有数列$\{x_n\}$的有限项.

解　（1）是；（2）否；（3）是.

3. 根据数列极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}=2$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{888\cdots8}^{n}=\dfrac{8}{9}$.

证明 (1) 因为

$$\left|\frac{2}{n+1}-0\right|=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}$$

对任意给定的正数ε，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{2}{\varepsilon}$.

所以，对于任意给定的正数ε，总存在$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$；对于任意的自然数 n，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2}{n+1}-0\right|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1}=0$.

(2) 因为

$$\left|\frac{3n}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2(2n+1)}<\frac{3}{4n}$$

对任意给定的正数ε，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{3}{4n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{3}{4\varepsilon}$.

所以，对于任意给定的正数ε，总存在$N=\left[\dfrac{3}{4\varepsilon}\right]$；对于任意的自然数$n$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{3n}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) 因为

$$\left|\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right|=\frac{2}{n^2+1}<\frac{2}{n^2}$$

对任意给定的正数ε，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon$，即$n>\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$.

所以，对于任意给定的正数ε，总存在$N=\left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]$；对于任意的自然数$n$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2n^2}{n^2+1}-2\right|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}=2$.

(4) 因为

$$\left|0.\overbrace{888\cdots8}^{n}-\frac{8}{9}\right|\leqslant\frac{1}{10^n}$$

对任意给定的正数ε，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即$n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$.

所以，对于任意给定的正数ε，总存在$N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$；对于任意的自然数$n$，当$n>N$时，有

$\left|0.\overbrace{888\cdots8}^{n}-\dfrac{8}{9}\right|<\varepsilon$ 恒成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{888\cdots8}^{n}=\dfrac{8}{9}$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 并举例说明数列 $\{|x_n|\}$ 收敛，数列 $\{x_n\}$ 不一定收敛.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$|u_n-a|<\varepsilon$$

而又因为 $\big||u_n|-|a|\big|\le|u_n-a|<\varepsilon$，根据数列极限的定义，故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如，考虑数列 $\{(-1)^n\}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但 $\{(-1)^n\}$ 没有极限.

第三节　函数极限

习题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0$；　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2}=1$.

证明　（1）对任意给定的正数ε，要使

$$|10^x-0|=10^x<\varepsilon$$

成立，只需 $x<\lg\varepsilon=-(-\lg\varepsilon)$.

由此可知，取 $M=-\lg\varepsilon$，于是，当 $x<-M$ 时，不等式

$$|10^x-0|<\varepsilon$$

恒成立. 所以

$$\lim_{x\to-\infty}10^x=0$$

（2）对任意给定的正数ε，要使

$$\left|\frac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}-\frac{5}{2}\right|=\frac{5\sqrt{x}+14}{2(2x+\sqrt{x})}<\frac{5\sqrt{x}+14}{4x}<\frac{5\sqrt{x}+14\sqrt{x}}{4x}<\frac{5}{\sqrt{x}}<\varepsilon\ （假设\ x>1）$$

成立，只需 $x>\dfrac{25}{\varepsilon^2}$.

由此可知，取 $M=\dfrac{25}{\varepsilon^2}$，于是，当 $x>M$ 时，不等式