中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

典型流形与典型域

陆启铿 / 著

科学出版社

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

典型流形与典型域

陆启铿 著

科 学 出 版 社

北 京

序

本书最初是作为北京大学数学系多复变数函数论专门化课程的讲义之一部分而编写的, 曾于 1961~1962 年间在该校数学系六年级这一专门化的同学中讲授, 后来重新改写作为在厦门大学讲学的讲义.

本书内容的大部分是我国数学工作者在多复变数函数论方面创作的总结, 但也有一部分是国外重要的成果, 或受此影响而得到的一些结果. 当然, 这里远没有包括我国在这方面的全部工作, 而仅偏重于与几何有关的方面. 特别是华罗庚教授已经把他解放以后至 1957 年以前的这方面的丰富成果总结在他的著作《多复变数函数论中的典型域的调和分析》内, 这里多半只叙述在这以后的一些发展. 读者仍将会看到, 这些发展与华罗庚教授已往的工作有着密切的关系.

本书假定读者已读过拙著《多复变数函数引论》一书, 或已有相当于该书的多复变数函数论知识, 还假定读者已知道一些初步的矩阵论和集合拓扑的初等概念. 除此以外所需的数学知识, 为了便利读者, 书末有附录可供参阅.

作者得到陆汝钤和弓惠生同志帮助校阅, 谨在此表示谢意.

作　者

目　　录

序
第 1 章　典型流形 ························ 1
1.1 Grassmann 流形 ························ 2
1.2 紧致的齐性复子流形 ························ 11
1.3 非紧致的齐性复流形 ························ 20
1.4 $\mathfrak{P}(r_1, \cdots, r_p; s_1, \cdots, s_p)$ 的一些齐性复子流形 ························ 30
第 2 章　超圆与典型域 ························ 43
2.1 对称的典型域 ························ 44
2.2 一些 $\mathfrak{P}(r_1, \cdots, r_p; s_1, \cdots, s_p)$ 与 $\mathfrak{P}_J(r_1, \cdots, r_p; s_1, \cdots, s_p)$ 的超圆 ························ 63
2.3 非对称的典型域 ························ 76
第 3 章　椭圆几何与双曲几何 ························ 89
3.1 Grassmann 流形的度量 ························ 89
3.2 椭圆几何 ························ 103
3.3 双曲几何 ························ 116
第 4 章　解析不变量及其应用 ························ 135
4.1 Schwarz 常数 ························ 135
4.2 解析不变量 $L(\mathfrak{D})$ 与 $U(\mathfrak{D})$ ························ 159
4.3 借解析不变量判别某些域的非对称性 ························ 172
第 5 章　对称典型域的边界之几何性质及其应用 ························ 180
5.1 典型域的边界的几何结构 ························ 180
5.2 特征流形的体积元素的外微分表示式 ························ 197
5.3 在多复变数函数论中的应用 ························ 218
第 6 章　典型域的调和函数论 ························ 230
6.1 典型域的调和函数 ························ 230
6.2 Poisson 积分的边界性质 ························ 240
6.3 极值原理与边值问题 ························ 262
6.4 在实的典型域的应用 ························ 267
附录 I　微分流形的一些初步知识 ························ 280
I.1 微分流形与复解析流形 ························ 280
I.2 Riemann 流形, Hermite 流形与 Kähler 流形 ························ 284
I.3 某些特殊的 Riemann 流形上的积分及一些简单的外微分运算 ························ 292

附录 II　矩阵的一些补充知识 ······ 299
　II.1　一些矩阵的标准型 ······ 299
　II.2　矩阵的直乘积及其应用 ······ 311
补遗 ······ 319
参考文献 ······ 320
索引 ······ 322

第1章　典型流形

我们称一微分流形为一典型流形，如果它容许一可递的典型群. 这种流形是很多的，但我们只有兴趣于与多复变数函数论有关的复典型流形. 当然，一些实的典型流形也将不可避免地要讨论，因为在研究多复变数函数的性质时必须要涉及实的典型流形 (参阅第 5 章). 另外，如果我们所使用的方法可以应用于某些实的情形，将随时附带提出 (参阅 6.4 节).

本章主要讨论如何引进 n 个复变数空间 C^n 的无穷远点. 在单复变数函数论中，为了要讨论函数在无穷远的性质，实际上需要引进无穷远点；多复变数函数论亦然. 要使得研究单复变数函数在复平面上任一点 (包括无穷远点) 的性质都同样方便，自然地要求引进了无穷远点以后的空间 (或称复平面 C^1 的扩充了的空间) 是齐性的 (或称可递的)，即对扩充空间的任一点最少有一变换把此空间一一地映为自己，而把此点映到空间的一固定点. 此外，复变数函数论主要是研究函数的解析性，我们自然地要求上述的变换能使解析性保持不变，这首先要求扩充后的空间是一复流形，其次要求变换本身也是解析的. 由于将单复变数的无穷远只看作是一点，这样的变换必定是下面的形式：

$$w = \frac{a+bz}{c+dz}, \quad ad - bc \neq 0,$$

因为在整个平面 (包括无穷远点) 解析而只有一个零点与极点 (这是由变换的一一性得知的) 的函数，必定是这种形式. 这是复投影变换群，而扩充的空间是一维复投影空间. 这是唯一的引进无穷远点的方法.

在多复变数空间的无穷远点并不止一点，虽然它们作为有限远点的极限点必然是较低维的点集. 引进的方法可以有很多，例如最简单的是利用变换

$$w_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha z_\alpha}{c_\alpha + d_\alpha z_\alpha}, \quad a_\alpha d_\alpha - b_\alpha c_\alpha \neq 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n),$$

即若有一 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 点使得有一个 $c_\alpha + d_\alpha z_\alpha = 0$，对应的 $w = (w_1, \cdots, w_n)$ 点便是无穷远点. 这是把无穷远点看作 n 个 $n-1$ 维复解析平面，扩充空间是 n 个一维复投影空间的拓扑积. 我们也可以利用变换

$$w_\alpha = \frac{a_{0\alpha} + a_{1\alpha} z_1 + \cdots + a_{n\alpha} z_n}{a_{00} + a_{10} z_1 + \cdots + a_{n0} z_n} \quad (\alpha = 1, \cdots, n),$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

来引进无穷远点, 即若 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 点使得

$$a_{00} + a_{10}z_1 + \cdots + a_{n0}z_n = 0,$$

对应的 $w = (w_1, \cdots, w_n)$ 点是无穷远点. 这是把无穷远点看作一个 $n-1$ 维复解析平面, 扩充空间是 n 维复投影空间. 但除此以外, 构造扩充空间的方法可以有很多, 并且我们也可以只引进一部分无穷远点, 而不是引进全部的无穷远点. 这问题可归结为构造一些空间具有下列的性质:

(i) 它是一复解析流形;

(ii) 它容许一可递的解析自同胚群 (即成一齐性的复流形);

(iii) 它可以用有限多个坐标邻域盖过, 此外, 它最多除了一些较低维点集以外, 可以选定一个坐标邻域盖过, 而此例外点集的点可称之为 “无穷远点”.

下面我们介绍一些构造此等流形的方法. 这些流形皆是典型的复流形. 如读者对流形的概念不够熟悉, 可先参阅附录 I.

1.1　Grassmann 流形

命 $E(m;n)$ 代表所有 $m \times (m+n)$ 矩阵

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_{11} & \mathfrak{z}_{12} & \cdots & \mathfrak{z}_{1,m+n} \\ \mathfrak{z}_{21} & \mathfrak{z}_{22} & \cdots & \mathfrak{z}_{2,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{z}_{m1} & \mathfrak{z}_{m2} & \cdots & \mathfrak{z}_{m,m+n} \end{pmatrix}$$

的集合, 此等矩阵之秩皆为 m 者. 显然, $E(m;n)$ 是 $C^{m(m+n)}$ 空间的一个开子集, 因此自然地具有一拓扑 (相对拓扑). $E(m;n)$ 的点即秩为 m 的 $m \times (m+n)$ 矩阵 $\mathfrak{Z}$.

在不致产生误会时, 我们有时简单地以 E 代表 $E(m;n)$.

显然, E 经下列的变换一一地映为自己:

$$\mathfrak{W} = A\mathfrak{Z}B, \tag{1.1.1}$$

其中 A 是 $m \times m$ 非异方阵, B 是 $(m+n) \times (m+n)$ 非异方阵.

现在把 E 的点分为等价类如下：E 中的两点 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 称为等价, 以 $\mathfrak{Z}_1 \sim \mathfrak{Z}_2$ 表之, 如果存在一非异的 $m \times m$ 方阵 Q, 使得

$$\mathfrak{Z}_1 = Q\mathfrak{Z}_2.$$

易见这里定义的等价确实满足等价关系所需的条件. 我们把 E 分为一些子集, 使得 E 的每一点必属于并且只属于一个子集, E 的两点同属于一个子集的充要条件为此两点彼此等价. 这样的子集称为等价类.

把 E 的每一等价类看作一点, 如是得一空间 $\mathfrak{P}(m;n)$, 这是等价类的集合. 在不致发生误会时我们简书之为 $\mathfrak{P}$.

有一自然的映照 π: $E \to \mathfrak{P}$, 即把 E 的每一点映为其所属的等价类, 这称为投影. 在 $\mathfrak{P}$ 中自然地有一拓扑, 这是把 $\mathfrak{P}$ 中如此的子集 $\mathfrak{U}$ 定义为开集, 若 $\mathfrak{U}$ 对于映照 π 的原象点集是 E 的开集. 对于这样定义的拓扑, 映照 π 显然是连续的, 并且 π 把开集映为开集. 因为如 K 是 E 中的开集, 经映照 π 映为 $\mathfrak{P}$ 中的点集 L, 命 K_P 代表 E 中的点 $P\mathfrak{Z}$, 其中 P 是 $m \times m$ 非异方阵, $\mathfrak{Z} \in K$. 则 K_P 是 E 中的开集, 而 L 的对于 π 的原象点集为 $\sum\limits_P K_P$, 这仍然是 E 的开集, 故 L 是 $\mathfrak{P}$ 的开集.

我们要证明 $\mathfrak{P}$ 是一齐性的 mn 维复解析流形, 并且是紧致的.

命 $M(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m)(1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m \leqslant m+n)$ 表 $E(m;n)$ 中的子集, 包含如此的点

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_{m+n}), \quad \mathfrak{z}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_{1\alpha} \\ \mathfrak{z}_{2\alpha} \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_{m\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1.1.2}$$

其中的第 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 列所组成的 $m \times m$ 方阵

$$Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} = (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \mathfrak{z}_{\gamma_2}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m}) \tag{1.1.3}$$

是非异的. 显然 $M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是开集, 并且若有一点属于 M, 则所有等价于此点的点亦属于 M, 且所有这些开集把 E 盖过, 故 $\mathfrak{P}(m;n)$ 中的点集

$$\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = \pi[M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)] \tag{1.1.4}$$

是 $\mathfrak{P}$ 中的开集, 并且所有这些开集把 $\mathfrak{P}$ 盖过.

对每一 $\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, 我们作一拓扑映照 $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m)$ 把 $\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 映为 C^{mn} 如下：若 $\mathfrak{Z} \in M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, 命 $Z_{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}}$ 为 $\mathfrak{Z}$ 中第 $\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}$ 列所组成的 $m \times n$ 矩阵, 即

$$Z_{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}} = (\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}}), \tag{1.1.5}$$

其中 $\gamma_{m+1} < \cdots < \gamma_{m+n}$ 是从整数 $1, 2, \cdots, m+n$ 除去了 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 后所余下的数. 由于 $\pi(\mathfrak{Z}) \in \mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, 我们定义 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 为

$$\pi(\mathfrak{Z}) \xrightarrow{\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}, \tag{1.1.6}$$

其中我们以 A^{-1}(有时候用 $\overset{-1}{A}$) 表一非异方阵 A 之逆方阵. 这样定义的映照与等价类之代表 $\mathfrak{Z}$ 的选取无关, 因若有等价于 $\mathfrak{Z}$ 的矩阵 $P\mathfrak{Z}$, P 为非异 $m \times m$ 方阵, 则

$$P\mathfrak{Z} = (P\mathfrak{z}_1, P\mathfrak{z}_2, \cdots, P\mathfrak{z}_{m+n}),$$

而据 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 的定义,

$$\begin{aligned}\pi(P\mathfrak{Z}) \longrightarrow & (P\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, P\mathfrak{z}_{\gamma_m})^{-1}(P\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, P\mathfrak{z}_{m+n}) \\ = & (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m})^{-1}(\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}}) \\ = & Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}.\end{aligned}$$

这表明 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 把 $\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 中的一个等价类确定地映为一 $m \times n$ 矩阵

$$Z = Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}, \tag{1.1.7}$$

这可以看作是 C^{mn} 中的一点. 如 $\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 中有两点 $\pi(\mathfrak{Z})$ 与 $\pi(\mathfrak{W})$ 映为同一的 C^{mn} 的 Z 点, 设 $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}_1, \cdots, \mathfrak{w}_{m+n})$, 则有

$$Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}} = W^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} W_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}.$$

命 $P = Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} W^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}$, 便得

$$Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} = PW_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}, \quad Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}} = PW_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}},$$

由此知

$$\mathfrak{z}_\alpha = P\mathfrak{w}_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, m+n),$$

或

$$\mathfrak{Z} = P\mathfrak{W},$$

此即 $\pi(\mathfrak{Z}) = \pi(\mathfrak{W})$. 故映照 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是一一的, 其逆映照为

$$Z \xrightarrow{\theta^{-1}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} \pi[(I^{(m)}, Z)P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)], \tag{1.1.8}$$

其中 $P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是一 $(m+n)$ 阶排列方阵, 它是把幺方阵 $I^{(m+n)}$ 的行列的次序适当排列后所得的实正交方阵, 使得

$$(\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_{m+n}) = (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m}, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}})P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m). \tag{1.1.9}$$

这里的排列方阵 $P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是存在的.

映照 $\theta(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是连续的, 因为若 $\pi(\mathfrak{Z})$ 映为 Z 点, $Z=Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}^{-1}Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}$ 之元素是 $\mathfrak{Z}\in M(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 之元素的连续函数, 而 π 是把 $M(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 的开集映为 $\mathfrak{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 的开集. $\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 也是连续的, 因由 (1.1.8) 知 $\mathfrak{Z}=(I^{(m)},Z)P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 的元素是矩阵 Z 的元素的连续函数, 故 $\theta(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是映 $\mathfrak{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 为 C^{mn} 的拓扑映照.

现证明拓扑空间 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是齐性的. 此即要证任一点 $\pi(\mathfrak{Z}),\mathfrak{Z}\in E(m;n)$, 存在一 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的自同胚变换, 把 $\pi(\mathfrak{Z})$ 映为 $\mathfrak{B}(m;n)$ 的固定点 $\pi[(I^{(m)},O)]$.

设 Q 是 $(m+n)\times(m+n)$ 非异方阵, 我们已知线性变换

$$\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}Q \tag{1.1.10}$$

是把 $E(m;n)$ 一一地映为自己. 显然地, 这变换把互相等价的点映为互相等价的点. 更确切地说, 若 $\mathfrak{W}_1=\mathfrak{Z}_1Q$, $\mathfrak{W}_2=\mathfrak{Z}_2Q$, 则 $\mathfrak{W}_1\sim\mathfrak{W}_2$ 的充要条件为 $\mathfrak{Z}_1\sim\mathfrak{Z}_2$. 由此可知变换 (1.1.10) 诱导出 $\mathfrak{P}(m;n)$ 中的一变换

$$\tau_Q:\mathfrak{P}(m;n)\to\mathfrak{P}(m;n), \tag{1.1.11}$$

此乃表示把以 $\mathfrak{Z}$ 为代表的等价类 $\pi(\mathfrak{Z})$, 映为以 $\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}Q$ 为代表的等价类 $\pi(\mathfrak{Z}Q)$. τ_Q 显然是 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的自同胚.

设 $\mathfrak{Z}$ 是给定的 $m\times(m+n)$ 矩阵, 其秩为 m, 习知存在 $(m+n)\times(m+n)$ 酉方阵 U, 使得

$$\mathfrak{Z}U=(A,O), \tag{1.1.12}$$

其中 A 是非异的 $m\times m$ 方阵. 此示 τ_U 把 $\pi(\mathfrak{Z})$ 点映为 $\pi[(A,O)]=\pi[(I,O)]$ 点. 故 $\mathfrak{P}(m;n)$ 在线性变换 (1.1.10) 诱导出的变换 τ_Q 所成的群 $\varGamma(m;n)$ 下是可递的, 甚至是 $\mathfrak{P}(m;n)$ 在变换 τ_U(U 是 $m+n$ 阶酉方阵) 所组成的 $\varGamma(m;n)$ 的子群 $\mathfrak{U}(m+n)$ 下是可递的.

根据上面所证 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是齐性的拓扑空间, 我们来证明 $\mathfrak{P}$ 是一 Hausdorff 空间. 此即要证: 若 $\pi(\mathfrak{Z}_1)\neq\pi(\mathfrak{Z}_2)$, 则有 $\mathfrak{P}$ 的分别包含 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{Z}_2)$ 的两个邻域, 彼此没有公共点.

由于 $E(m;n)$ 的拓扑是相对于 $C^{m(m+n)}$ 的拓扑, 而 $C^{m(m+n)}$ 是一 Euclid 度量空间, 故 E 也是一度量空间, 即对任两点 $\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2\in E$, 有一 Euclid 距离

$$r(\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2)=\{\mathrm{tr}(\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Z}_2)(\overline{\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Z}_2})'\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.13}$$

这里我们以 A' 表矩阵 A 的置换, $\overline{A}$ 表 A 的复共轭矩阵, $\mathrm{tr}A$ 表方阵 A 之迹.

我们不妨假定 $\mathfrak{Z}_1=(I^{(m)},O)$, 否则我们根据 $\mathfrak{P}$ 之可递性, 可作一拓扑变换, 把 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 点映为以 (I,O) 为代表的点.

设 $\mathfrak{Z}_2=(A^{(m)},B^{(m,n)})$. 若 A 为非异的, 则 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{Z}_2)$ 是落在 $\mathfrak{P}$ 的同一坐标邻域中, 显然地有分别包含 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{Z}_2)$ 的 $\mathfrak{P}$ 的两邻域, 彼此没有公共点者.

若 A 为奇异的, 即 $\det A=0$, 则我们取 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 点的在 E 中的互不相交的充分小邻域 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{U}_2$, 使得此两邻域中的点能写成下面之形式:

$$\mathfrak{W}_1=(I+C_{\varepsilon_1},D_{\varepsilon_1}),\quad \mathfrak{W}_1\in\mathfrak{U}_1,$$

$$\mathfrak{W}_2=(A+C_{\varepsilon_2},B+D_{\varepsilon_2}),\quad \mathfrak{W}_2\in\mathfrak{U}_2;$$

这里我们以 C_ε 表一矩阵, 其元素的绝对值皆小于正数 ε 者. 我们只要证明取 ε_1 与 ε_2 充分小时, $\pi(\mathfrak{U}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{U}_2)$ 没有公共点便可, 因为 π 是把开集映为开集的.

首先取 ε_2 充分小, 使得 $\operatorname{tr}[(B+D_{\varepsilon_2})(\overline{B+D_{\varepsilon_2}})']\geqslant\lambda>0$. 这是可以的, 因为 $\pi(\mathfrak{Z}_1)\neq\pi(\mathfrak{Z}_2)$, B 必非零矩阵. 此外, 要使得 $(A+C_{\varepsilon_2})(\overline{A+C_{\varepsilon_2}})'$ 的特征根皆小于一正常数 a, 这也是可以的, 因为 A 是一固定的常数方阵. 如是我们能书 (附录 II.1, 定理 1.1)

$$A+C_{\varepsilon_2}=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_m\end{pmatrix}V,$$

$$\sqrt{a}\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0,$$

其中 U 与 V 是 $m\times m$ 酉方阵.

其次取 ε_1 充分小, 使得 $\operatorname{tr}(D_{\varepsilon_1}\overline{D}'_{\varepsilon_1})<\dfrac{\lambda}{2a}$. 此外能书

$$I+C_{\varepsilon_1}=U_1\begin{pmatrix}\mu_1&0&\cdots&0\\0&\mu_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\mu_m\end{pmatrix}V_1,$$

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_m\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}},$$

其中 U_1 与 V_1 是 $m\times m$ 酉方阵. 这是可以的.

如果 $\pi(\mathfrak{U}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{U}_2)$ 有公共点, 即有 $\mathfrak{W}_1\in\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{W}_2\in\mathfrak{U}_2$ 使得

$$\mathfrak{W}_1=P\mathfrak{W}_2,$$

其中 P 是 $m\times m$ 非异方阵. 比较元素可得

$$I+C_{\varepsilon_1}=P(A+C_{\varepsilon_2}),$$

$$D_{\varepsilon_1}=P(B+D_{\varepsilon_2}).$$

由第一个等式可知 $A+C_{\varepsilon_2}$ 必非异的. 从上两式中消去方阵 P 可得

$$D_{\varepsilon_1}=(I+C_{\varepsilon_1})(A+C_{\varepsilon_2})^{-1}(B+D_{\varepsilon_2}),$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\overline{D'}_{\varepsilon_1}D_{\varepsilon_1})\\
=&\operatorname{tr}[(\overline{B+D_{\varepsilon_2}})'(\overline{A+C_{\varepsilon_2}})'^{-1}\overline{V_1'}\begin{pmatrix}\mu_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_m^2\end{pmatrix}V_1\\
&\times(A+C_{\varepsilon_2})^{-1}(B+D_{\varepsilon_2})]\\
\geqslant&\frac{1}{2}\operatorname{tr}[(\overline{B+D_{\varepsilon_2}})'(\overline{A+C_{\varepsilon_2}})'^{-1}(A+C_{\varepsilon_2})^{-1}(B+D_{\varepsilon_2})]\\
\geqslant&\frac{1}{2a}\operatorname{tr}[(\overline{B+D_{\varepsilon_2}})'(B+D_{\varepsilon_2})]\geqslant\frac{\lambda}{2a}.
\end{aligned}$$

这是与 $\operatorname{tr}(D_{\varepsilon_1}\overline{D'}_{\varepsilon_1})<\dfrac{\lambda}{2a}$ 之假设矛盾.

现在我们证明 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是 mn 维复解析流形. 我们取 $\{\mathfrak{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)\}$ 为 $\mathfrak{B}$ 的坐标邻域系, 上面已经证明 $\mathfrak{B}(m;n)$ 是实 $2mn$ 维流形, 我们只需证明 $\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ $\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是一解析映照便可. 实际上, 若 $\pi(\mathfrak{Z})\in\mathfrak{B}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\bigcap\mathfrak{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$, 设 $\pi(\mathfrak{Z})$ 在 $\mathfrak{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 中的局部坐标为 Z, 而在 $\mathfrak{B}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 的局部坐标为 W, 则据 (1.1.8) 及 (1.1.6),

$$Z\xrightarrow{\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)}\pi[(I,Z)P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)]\xrightarrow{\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}W,\tag{1.1.14}$$

其中

$$W=(q_{\lambda_1}(Z),\cdots,q_{\lambda_m}(Z))^{-1}(q_{\lambda_{m+1}}(Z),\cdots,q_{\lambda_{m+n}}(Z)),\tag{1.1.15}$$

这里 $q_\lambda(Z)$ 是矩阵 $(I,Z)P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 的第 λ 列, 它的元素显然是 Z 的元素的解析函数. 又由 $\pi[(I,Z)P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)]=\pi(\mathfrak{Z})\in\mathfrak{B}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 可知 $(q_{\lambda_1}(Z),\cdots,q_{\lambda_m}(Z))$ 是非异的, 因此变换 (1.1.15) 是解析的, 亦即 $\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是解析的.

此外, 我们还要证明 $\Gamma(m;n)$ 中的变换 τ_Q 是解析的. 变换 τ_Q 是由 $E(m;n)$ 中的线性变换 (1.1.10) 所诱导出的, 我们即要证明 $\mathfrak{Z}$ 所属的等价类 $\pi(\mathfrak{Z})$ 的局部坐标与经变换 τ_Q 映为 $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}Q$ 所属的等价类 $\pi(\mathfrak{W})$ 的局部坐标之间的关系是解析的. 设 $\pi(\mathfrak{Z}) \in \mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, $\pi(\mathfrak{W}) \in \mathfrak{B}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$. 由 (1.1.10) 可知

$$\begin{aligned}&(W_{\lambda_1\cdots\lambda_m}, W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}})P(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)\\=&(Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}, Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}})P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)Q,\end{aligned}$$

或

$$(W_{\lambda_1\cdots\lambda_m}, W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}}) = (Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}, Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}})\widetilde{Q}, \tag{1.1.16}$$

其中

$$\widetilde{Q} = P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)QP'(\lambda_1, \cdots, \lambda_m). \tag{1.1.17}$$

我们书

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_1^{(m)} & Q_3^{(m,n)} \\ Q_2^{(n,m)} & Q_4^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{1.1.18}$$

则由 (1.1.16) 可知

$$\begin{aligned}W_{\lambda_1\cdots\lambda_m} &= Z_{\gamma_1,\cdots\gamma_m}Q_1 + Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}Q_2,\\ W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}} &= Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}Q_3 + Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}Q_4.\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

由于 $W_{\lambda_1\cdots\lambda_m}$ 与 $Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}$ 是非异的, 而 $\pi(\mathfrak{W})$ 与 $\pi(\mathfrak{Z})$ 的局部坐标分别为

$$W = W^{-1}_{\lambda_1\cdots\lambda_m}W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}}, \quad Z = Z^{-1}_{\gamma_1\cdots\gamma_m}Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}},$$

以 (1.1.19) 代入上面之第一式并应用第二式得

$$W = (Q_1 + ZQ_2)^{-1}(Q_3 + ZQ_4), \tag{1.1.20}$$

这是 $\pi(\mathfrak{Z})$ 点与 $\pi(\mathfrak{W})$ 点之局部坐标间的关系, 显然是解析的. 注意关系式 (1.1.20) 只当 $\pi(\mathfrak{Z}) \in \mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 而对应的点 $\pi(\mathfrak{W}) \in \mathfrak{B}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 时才能应用, 否则 $\widetilde{Q}$ 不能由 (1.1.17) 定义, 要适当的改变. 兹考虑当 $\mathfrak{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = \mathfrak{B}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \mathfrak{B}(1, 2, \cdots, m)$ 的特殊情况, 此时 $P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = P(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = I^{(m+n)}$, $\widetilde{Q} = Q$; $\pi(\mathfrak{Z}) = \pi[(I, Z)]$ 的局部坐标为 Z, $\pi(\mathfrak{W}) = \pi[(I, W)]$ 的局部坐标为 W. 由 (1.1.20) 知, 此关系式只当 $\det(Q_1 + ZQ_2) \neq 0$ 时才有意义, 如 $\det(Q_1 + ZQ_2) = 0$, 则对应的点在 "无穷远", 而事实上是对应的点已不在坐标邻域 $\mathfrak{B}(1, 2, \cdots, m)$ 中, 因而局部坐标之关系式不能再用 Q 的子矩阵 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 表达. 但另一方面, 坐

标邻域 $\mathfrak{B}(1,2,\cdots,m)$ 把整个 $\mathfrak{P}(m;n)$ 除了一较低维点集外盖过, 因为如 $\pi(\mathfrak{Z}) \notin \mathfrak{B}(1,2,\cdots,m)$, 则 $\det Z_{1,\cdots,m}=0$. 我们总有一串非异的 $m\times m$ 矩阵 A_k 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = Z_{1,\cdots,m}$. 由于 $\pi[(A_k, Z_{m+1},\cdots,Z_{m+n})] \in \mathfrak{B}(1,\cdots,m)$, 而 π 是连续的映照, 故有 $\lim\limits_{k\to\infty} \pi[(A_k, Z_{m+1,\cdots,m+n})] = \pi(\mathfrak{Z})$, 这表明 $\mathfrak{B}(1,\cdots,m)$ 不能盖过的 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的点皆是 $\mathfrak{B}(1,\cdots,m)$ 的极限点, 因之最多是较低维点集. 如是 $\mathfrak{P}(m;n)$ 可看作是 C^{mn} 的扩充空间.

最后我们证明 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是紧致的. 首先我们注意, 如 $\mathfrak{Z}\in E(m;n)$, 则 $\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Z}'}$ 必然是定正的 Hermite 方阵, 因之存在非异的方阵 P 使得 $P\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Z}'}\overline{P'}=I^{(m)}$. 由于 $\mathfrak{Z}$ 与 $P\mathfrak{Z}$ 是等价的, 此示 $E(m;n)$ 的属于一个等价类的矩阵当中, 最少有一矩阵 $\mathfrak{Z}$ 适合

$$\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Z}'} = I. \tag{1.1.21}$$

因此 $\mathfrak{P}(m;n)$ 也可以如此的构造: 命 $\mathfrak{C}(m;m+n)$ 代表所有 $m\times(m+n)$ 的矩阵 $\mathfrak{Z}$ 适合 (1.1.21) 者 [1], $\mathfrak{Z}$ 之秩显然必须为 m. $\mathfrak{C}(m;m+n)$ 中的两矩阵 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 称为等价的, 如果存在一 $m\times m$ 酉方阵 U 使得

$$\mathfrak{Z}_1 = U\mathfrak{Z}_2. \tag{1.1.22}$$

我们把 $\mathfrak{C}(m;m+n)$ 的点按上面的等价关系分为等价类, 而把每一等价类看作是一点, 如此而得的空间即 $\mathfrak{P}(m;n)$. $\mathfrak{C}(m;m+n)$ 显然是紧致的, 由此易见 $\mathfrak{P}(m;n)$ 也是紧致的.

又由 (1.1.12) 知, $\mathfrak{P}(m;n)$ 在酉群诱导的变换 τ_U 下可递.

这里所构造的紧致的齐性复流形 $\mathfrak{P}(m;n)$ 即所谓 Grassmann 流形. Grassmann 流形也可以如下定义: 在 $m+n$ 个复变数 $z_1, z_2, \cdots, z_{m+n}$ 空间 C^{m+n} 中, 把通过原点的非蜕化的 n 维复解析平面看作是一点, 所有这些 n 维复解析平面的集合即 Grassmann 流形. 实际上, C^{m+n} 中过原点的 n 维复解析平面是由 m 个线性方程定义的:

$$\begin{gathered} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1,m+n}z_{m+n} = 0, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \cdots + a_{2,m+n}z_{m+n} = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \cdots + a_{m,m+n}z_{m+n} = 0. \end{gathered}$$

若此平面非蜕化的, 此组方程是线性独立的, 亦即由系数所成的矩阵

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m+n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,m+n} \end{pmatrix}$$

1) 注意 $\mathfrak{C}(m;m+n)$ 即 5.2 节中 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m;m+n)$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_1(m;m+n)$, 也叫做 Stiefel 流形.

之秩为 m. 若命 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_{m+n})$, 则方程组可简书为

$$\mathfrak{A}z'=0.$$

由此可见, 如 P 是一 $m\times m$ 非异方阵, 则由

$$P\mathfrak{A}z'=0$$

定义的解析平面即由 $\mathfrak{A}z'=0$ 定义的解析平面. 反之, 若有两个秩为 m 的 $m\times(m+n)$ 矩阵 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{A}_2$ 所定义的线性方程

$$\mathfrak{A}_1z'=0 \text{ 与 } \mathfrak{A}_2z'=0$$

代表同一解析平面, 我们不妨假定 $\mathfrak{A}_1=(A_1^{(m)},A_2)$, 其中 A_1 是非异的, $\mathfrak{A}_2=(B_1^{(m)},B_2)$, 而书 $z=(z^{(1)},z^{(2)})$, 其中 $z^{(1)}$ 是 m 维向量. 由第一个方程解出

$$z^{(1)'}=-A_1^{-1}A_2z^{(2)'},$$

而代入第二个方程得

$$(-B_1A_1^{-1}A_2+B_2)z^{(2)'}=0,$$

对任意之 m 维向量 $z^{(2)}$, 因此必须

$$B_2=B_1A_1^{-1}A_2,$$

而

$$\mathfrak{A}_2=(B_1,B_2)=B_1A_1^{-1}\mathfrak{A}_1.$$

由于 $\mathfrak{A}_2$ 之秩为 m, $B_1A_1^{-1}$ 必非异, 故 $\mathfrak{A}_1\sim\mathfrak{A}_2$. 由此可见每一 n 维解析平面对应一个而且只一个等价类, 故两种 Grassmann 流形的定义是等价的.

当 $m=1$ 时, Grassmann 流形 $\mathfrak{P}(1;n)$ 即 n 维复投影空间, 因为此时 $\mathfrak{P}$ 的点的齐次坐标是 $\mathfrak{z}=(z_1,\cdots,z_{n+1})$, 其中 z_α 不全为零. 而若有一非零的复数 λ 使得

$$(z_1,\cdots,z_{n+1})=\lambda(w_1,\cdots,w_{n+1}),$$

则 $(z_1,\cdots,z_{n+1})$ 与 $(w_1,\cdots,w_{n+1})$ 代表同一的点. 若我们限定

$$\mathfrak{z}\overline{\mathfrak{z}}'=1,$$

则 $\mathfrak{w}$ 与 $\mathfrak{z}$ 代表复投影空间的同一点, 如果

$$\mathfrak{w}=e^{i\theta}\mathfrak{z}.$$

此乃表示 n 维复投影空间的一点可看作是复 $n+1$ 维超球的实 $2n+1$ 维超球面上的一个圆.

1.2 紧致的齐性复子流形

在本节我们考虑 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的一些紧致的齐性复子流形.

首先我们考虑 $E(m;n)$ 中的子集, 它由一广义的二次型为零

$$\mathfrak{z}J\mathfrak{z}' = 0, \quad \mathfrak{z} \in E(m;n) \tag{1.2.1}$$

的点定义, 这里 J 是一 $(m+n)\times(m+n)$ 复常数方阵. 我们以 0 表一零矩阵. 此子集我们以 $E_J(m;n)$ 表之.

(1.2.1) 可书为

$$\mathfrak{z}S\mathfrak{z}' + \mathfrak{z}K\mathfrak{z}' = 0, \tag{1.2.2}$$

其中

$$S = \frac{1}{2}(J+J'), \quad K = \frac{1}{2}(J-J')$$

分别是对称和斜对称方阵. 由此可知, 若在 (1.2.2) 中取置换, 便得

$$\mathfrak{z}S\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}K\mathfrak{z}' = 0,$$

故必须

$$\mathfrak{z}S\mathfrak{z}' = 0 \text{ 与 } \mathfrak{z}K\mathfrak{z}' = 0.$$

此表示 E_J 可化为 E_S 与 E_K 的交集. 今后我们只讨论 J 为对称或斜对称的情形.

我们要证明, 当 J 是非异, $E_J(m;n)$ 是 $E(m;n)$ 的复解析子流形.

设 $J = (a_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m+n}$, $\mathfrak{z}J\mathfrak{z}' = (f_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant m}$. 如 J 是对称的非异方阵, $E_J(m;n)$ 由下面的方程组定义:

$$f_{kl} = 0 \quad (1\leqslant k\leqslant l\leqslant m),$$

其中

$$f_{kl} \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{m+n} a_{\alpha\beta}\mathfrak{z}_{k\alpha}\mathfrak{z}_{l\beta}.$$

由此可知

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial \mathfrak{z}_{p\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{m+n} a_{\alpha\beta}(\mathfrak{z}_{k\alpha}\delta_{lp} + \mathfrak{z}_{l\alpha}\delta_{kp}) \quad (k\leqslant l). \tag{1.2.3}$$

我们把 $f_{kl}(k\leqslant l)$ 随便地排成单一的次序, 例如

$$f_{11}, f_{12}, \cdots, f_{1m}, f_{22}, f_{23}, \cdots, f_{2m}, \cdots, f_{m-1,m}, f_{mm},$$

又把 $\mathfrak{z}_{p\beta}(p=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,m+n)$ 随意排一次序, 例如

$$\mathfrak{z}_{11},\mathfrak{z}_{12},\cdots,\mathfrak{z}_{1,m+n},\mathfrak{z}_{21},\mathfrak{z}_{22},\cdots,\mathfrak{z}_{2,m+n},\cdots,\mathfrak{z}_{m1},\mathfrak{z}_{m2},\cdots,\mathfrak{z}_{m,m+n}.$$

我们只要证明函数矩阵

$$\frac{\partial(f_{11},f_{12},\cdots,f_{1m},\cdots,f_{m-1,m},f_{mm})}{\partial(\mathfrak{z}_{11},\mathfrak{z}_{12},\cdots,\mathfrak{z}_{1,m+n},\cdots,\mathfrak{z}_{m1},\mathfrak{z}_{m2},\cdots,\mathfrak{z}_{m,m+n})}$$

之秩恒为 $\dfrac{m(m+1)}{2}$, 则 $E_J(m;n)$ 便是 $E(m;n)$ 的复解析子流形 (见附录 I.1).

若此函数矩阵之秩 $<\dfrac{m(m+1)}{2}$, 则有一组不全为零的复数 $b_{kl}(k\leqslant l)$, 使得

$$\sum_{k\leqslant l}b_{kl}\frac{\partial f_{kl}}{\partial \mathfrak{z}_{p\beta}}=0\quad(p=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,m+n).$$

以 (1.2.3) 代入上式得

$$\sum_{\alpha=1}^{m+n}\left[2\sum_{k=1}^{m}b_{kk}a_{\alpha\beta}\mathfrak{z}_{k\alpha}\delta_{kp}+\sum_{k<l}b_{kl}a_{\alpha\beta}\mathfrak{z}_{k\alpha}\delta_{lp}+\sum_{k<l}b_{kl}a_{\alpha\beta}\mathfrak{z}_{l\alpha}\delta_{kp}\right]=0. \tag{1.2.4}$$

若我们定义

$$b_{kl}=b_{lk},\quad 当\ k>l,$$

则 (1.2.4) 能写为

$$\sum_{\alpha=1}^{m+n}\left[\sum_{k=1}^{m}\delta_{pk}(2b_{kk})\mathfrak{z}_{k\alpha}+\sum_{k>l}\delta_{pk}b_{kl}\mathfrak{z}_{l\alpha}+\sum_{k<l}\delta_{pk}b_{kl}\mathfrak{z}_{l\alpha}\right]a_{\alpha\beta}=0,$$

此即

$$IB\mathfrak{Z}J=0,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}2b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\ b_{21}&2b_{22}&\cdots&b_{2m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{m1}&b_{m2}&\cdots&2b_{mm}\end{pmatrix}$$

是一对称方阵. 由于 J 是非异而 $\mathfrak{Z}$ 之秩为 m, 必须

$$B=0.$$

这与 b_{kl} 不全为零之假设矛盾. 故 $E_J(m;n)$ 是 $E(m;n)$ 的 $m(m+n)-\dfrac{m(m+1)}{2}$ 维复解析子流形.