普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数

干晓蓉　主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数

主　编　干晓蓉
副主编　杨凤藻

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据高等院校理工科数学教学大纲编写的线性代数教材. 内容包括行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、相似矩阵及二次型，共5章. 每章配有一定数量的习题，书末附有总习题，并有习题答案. 全书叙述简明扼要，条理清晰，方便教学.

本书可作为理工科及高职本科的线性代数教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/干晓蓉主编. —北京：科学出版社，2010. 10
(普通高等教育"十一五"规划教材)
ISBN 978-7-03-029180-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①干… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 195985 号

责任编辑：滕亚帆 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年10月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1—7 000 字数：210 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是根据高等院校理工科数学教学大纲，在原有线性代数教学讲义的基础上编写的线性代数教材. 由于本课程的教学时数少，如何能在较短时间内，使学生学好本课程的基本知识，是我们编写本教材时重点考虑的问题. 根据以往的教学经验，我们对原有的教学讲义，作了以下一些修改. 首先，对第 2～4 章的理论体系作了重新安排. 第 2 章介绍矩阵秩的概念及其计算方法；在第 3 章建立起向量组的秩与矩阵秩的联系，将向量组秩的计算及线性相关和无关的判别，化归为计算矩阵的秩；而在第 4 章，则通过方程组的向量表示形式，利用向量组的性质，证明了方程组解的性质及通解结构. 我们认为这样一种安排，既体现了各章紧密的逻辑联系，又使各章内容相对集中、重点突出、容易理解和掌握，其中还改写了一些定理和性质的证明，使其更省时和更容易理解. 对第 4 章，我们将原在最后一节(用初等变换解线性方程组)的内容，调到第一节先讲，以便在建立起齐次线性方程组的理论以后，可以及时地举例说明齐次方程组求基础解系的方法及解的性质的运用. 其次，删去了一些比较次要的内容. 例如，第 1 章不再先讲二、三阶行列式及解二元线性方程组的克拉默法则，而是直接定义 n 阶行列式，直接证明 n 元线性方程组的克拉默法则. 对于一些容易理解的性质，则不再作证明，如“任何矩阵可用初等行变换化为阶梯形矩阵”，“任何 n 阶矩阵都可以仅用第三种初等行变换化为上三角矩阵”等性质，都是不证明就使用. 此外，在例题和习题中，选取了一些历年的考研试题，特别是在总习题中，大部分都是这类题目. 这些题目，多数是提供给准备考研的学生复习之用，其中不属于基本内容的部分，不要求所有学生都做，教师在教学中可以灵活处理.

本书由干晓蓉教授主编，并编写了全书的正文，杨凤藻教授任副主编。参加习题编写工作的教师有：王莉，代云仙，许寅华，魏开文，李怀远，杨斌，沙春宏. 全书由主编统稿定稿. 本书初稿经过邱达三教授仔细地审阅，并提出了许多宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢.

限于作者水平，书中难免会有不妥之处，敬请读者给予批评、指正.

编　者

2010 年 7 月于昆明理工大学

目　　录

前言
第 1 章　行列式……………………………………………………………… 1
1.1　全排列的逆序数 ………………………………………………… 1
1.2　行列式的定义 …………………………………………………… 2
1.3　行列式的性质 …………………………………………………… 6
1.4　行列式按行(列)展开……………………………………………… 12
1.5　解线性方程组的克拉默法则……………………………………… 18
习题 1 ………………………………………………………………… 20
第 2 章　矩阵 ……………………………………………………………… 24
2.1　矩阵概念及其运算………………………………………………… 24
2.1.1　矩阵概念………………………………………………………… 24
2.1.2　矩阵的加法及数乘 …………………………………………… 25
2.1.3　矩阵的乘法……………………………………………………… 25
2.1.4　矩阵的转置及对称矩阵 ……………………………………… 28
2.1.5　共轭矩阵………………………………………………………… 30
2.1.6　n 阶矩阵的行列式 …………………………………………… 30
2.1.7　n 阶矩阵的伴随矩阵 ………………………………………… 31
2.1.8　n 阶矩阵的逆矩阵 …………………………………………… 31
2.2　分块矩阵…………………………………………………………… 36
2.3　矩阵的初等变换…………………………………………………… 40
2.3.1　初等变换………………………………………………………… 40
2.3.2　初等矩阵………………………………………………………… 41
2.3.3　利用初等变换求逆矩阵 ……………………………………… 44
2.4　矩阵的秩…………………………………………………………… 46
习题 2 ………………………………………………………………… 52
第 3 章　n 维向量空间 ………………………………………………… 58
3.1　n 维向量及其运算 ……………………………………………… 58
3.2　向量组的线性相关和线性无关…………………………………… 59
3.3　向量组的秩………………………………………………………… 62
3.4　向量空间…………………………………………………………… 73

3.4.1 向量空间及子空间概念 …… 73
3.4.2 $\mathbf{R}^n$ 中的基变换和坐标变换 …… 74
习题 3 …… 77
第 4 章 线性方程组 …… 81
4.1 用初等变换解线性方程组 …… 81
4.2 线性方程组的矩阵表示和向量表示 …… 83
4.3 齐次线性方程组 …… 84
4.4 非齐次线性方程组 …… 94
习题 4 …… 101
第 5 章 相似矩阵及二次型 …… 106
5.1 向量的内积、长度及正交性 …… 106
5.2 方阵的特征值和特征向量 …… 110
5.3 相似矩阵 …… 116
5.4 实对称矩阵的对角化 …… 120
5.5 二次型及其标准形 …… 125
5.6 用配方法将二次型化为标准形 …… 130
5.7 正定二次型 …… 134
习题 5 …… 136
总习题 …… 140
部分习题答案 …… 150
参考文献 …… 161

第 1 章　行　列　式

本章的主要内容是行列式的定义、性质及其计算方法.此外还介绍了用行列式解线性方程组的克拉默法则.

1.1　全排列的逆序数

考虑由 1,2,3,…,n 这 n 个数排成的不重复数字的全排列,不同的全排列共有 $n!$ 个.以后这种全排列简称为排列.

例如,1,2,3 这三个数有以下 3! =6 个排列:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

定义 1.1.1　设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1,2,…, n 的一个排列,考察其中任意两个数,如果大的数排在小的数之前,就说有一个逆序.所有逆序的总数称为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.1　计算由 1,2,3 排成的 6 个排列的逆序数.

解　排列 123 没有逆序,逆序数 $\tau(123)=0$;

排列 132 中,仅有 3 在 2 之前一个逆序,$\tau(132)=1$;

排列 213 中,仅有 2 在 1 之前一个逆序,$\tau(213)=1$;

排列 231 中,2 在 1 之前,3 在 1 之前,$\tau(231)=1+1=2$;

排列 312 中,3 在 1,2 之前,$\tau(312)=2$;

排列 321 中,3 在 2,1 之前,又 2 在 1 之前,$\tau(321)=2+1=3$.

这 6 个排列中,132,213,321 为奇排列,123,231,312 为偶排列.

例 1.1.2　求 $\tau(42315)$及 $\tau(54321)$.

解　$\tau(42315)=3+1+1=5$,$\tau(54321)=4+3+2+1=10$.

性质 1.1.1　交换排列中的两个数,排列的奇偶性改变.

证　先讨论交换相邻两数的情形.设排列为

$$p_1\cdots p_S ab p_{S+1}\cdots p_m, \tag{1.1.1}$$

交换 a 与 b,得排列

$$p_1\cdots p_S ba p_{S+1}\cdots p_m. \tag{1.1.2}$$

任意一个 p_i 与 a 或 b 的大小关系在(1.1.1)与(1.1.2)两个排列中是一样的.

所以当 $a>b$ 时，排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)的逆序数减少1，当 $a<b$ 时，排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)的逆序数增加1.因此，当(1.1.1)为奇排列时，(1.1.2)为偶排列；当(1.1.1)为偶排列时，(1.1.2)为奇排列，即排列(1.1.1)与(1.1.2)有不同的奇偶性.

再讨论交换不相邻两个数的情形.设排列为

$$p_1\cdots p_s a c_1\cdots c_k b p_{s+1}\cdots p_m, \tag{1.1.3}$$

交换 a 与 b，得排列

$$p_1\cdots p_s b c_1\cdots c_k a p_{s+1}\cdots p_m. \tag{1.1.4}$$

也可以对排列(1.1.3)中的 a 依次与 $c_1,\cdots,c_k$ 进行 k 次相邻的交换，得到排列

$$p_1\cdots p_s c_1\cdots c_k a b p_{s+1}\cdots p_m.$$

再对这个排列中的 b 依次与 $a,c_k,\cdots,c_1$ 进行 $k+1$ 次相邻的交换，就得到排列(1.1.4).因此，经过 $2k+1$(奇数)次相邻的交换可以由(1.1.3)得到(1.1.4).由前面已证明的结论可知，进行奇数次相邻的交换，排列的奇偶性要改变，所以排列(1.1.3)与排列(1.1.4)有不同的奇偶性.(证毕)

性质 1.1.2 由 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 所作的 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列各占一半.

证 设奇排列有 s 个，偶排列有 t 个.对每一个奇排列都交换1与2，就得到 s 个不同的偶排列.因此，$s\leqslant t$.同理可证 $t\leqslant s$，故 $s=t$.(证毕)

1.2 行列式的定义

将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 个横行及 n 个竖列的方形表格，两边再用竖线围起来，就是 n 阶**行列式**的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中每个数 a_{ij} 称为行列式的元素，它有两个下标，第一个下标表示该元素所在的行数，第二个下标表示所在的列数，a_{ij} 就是第 i 行 j 列的元素.行列式的行数是从上到下依次为第一行，第二行，…，第 n 行.列数是从左到右依次为第一列，第二列，…，第 n 列.行列式有两条对角线，由左上到右下那条对角线称为主对角线，在主对角线上的元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$.由右上到左下的对角线有时称为副对角线.

n 阶行列式是由代数和组成的一个数，其定义如下：

定义 1.2.1 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 $n!$个排列求和. 上述定义说明 n 阶行列式是含有 $n!$ 项的代数和，其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积，当把这 n 个元素按行标从小到大的顺序排列时，其列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$若为偶数，这项冠以“+”号，若为奇数，这项冠以“−”号. 因为当 $n>1$ 时，全部 $n!$ 个排列中，奇、偶排列各占一半. 所以，$n>1$ 时，冠以“+”号与冠以“−”号的项数也是各占一半.

根据行列式的定义，一、二、三阶行列式可以计算如下：

一阶行列式： $|a_{11}|=(-1)^0a_{11}=a_{11}$.

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即主对角线元素乘积冠以“+”号，副对角线元素乘积冠以“−”号.

三阶行列式：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad +(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

如果在三阶行列式中，将冠以“+”号的项的三个数用实线加以连接，将冠以“−”号的项的三个数用虚线加以连接，就可以得到如图 1.1 所示的图形.

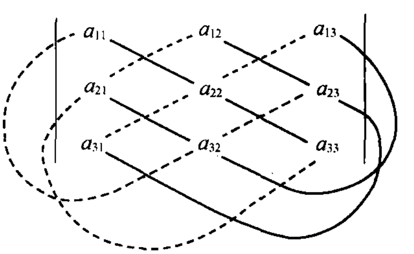

图 1.1

利用图 1.1，很容易写出三阶行列式的 6 项代数和.

例 1.2.1 计算以下两个行列式：

$$(1)\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};\quad (2)\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　(1)　$$D_1=1\times4-2\times3=4-6=-2.$$

(2) 根据图 1.1,得

$$\begin{aligned}D_2&=3\times0\times4+2\times5\times2+(-1)\times1\times(-3)-(-1)\times0\times2\\&\quad-3\times5\times(-3)-2\times1\times4\\&=0+20+3-0+45-8=60.\end{aligned}$$

四阶行列式有 4! =24 项,要写出并计算这 24 个乘积的代数和是很麻烦的.对于三阶以上的高阶行列式,一般要利用 1.3 节要介绍的行列式的性质进行计算.不过,像例 1.2.2 的几个特殊的高阶行列式,却可以用定义直接得到它的值.

例 1.2.2　利用行列式的定义计算下列的行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D_4=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解　行列式 D_1 在主对角线之上的元素全为 0,这种行列式称为下三角行列式.根据定义,行列式是不同行不同列元素的乘积的代数和,因为含 0 元素的项必为 0,只要考察不含 0 元素的项.设这种项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

因为 D_1 的第一行除了 a_{11} 之外为 0,所以必有 $a_{1p_1}=a_{11}$,D_1 的第二行除了 a_{21},a_{22} 之外都为 0,但 a_{21} 与 a_{11} 位于同一列,与 a_{11} 不同列的只有 a_{22},所以 $a_{2p_2}=a_{22}$,以此类推,可知 D_1 中不含 0 元素的项只有如下一项:

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

因此,$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

D_2 的主对角线之下的元素都是 0,这种行列式称为上三角行列式.依次讨论第 n 行,第 $n-1$ 行,…,第 1 行,可知 D_2 中不含 0 元素的项与 D_1 相同,所以

$$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式与下三角行列式统称为三角行列式.行列式 D_3 中除对角线上的元素之外,其他元素都是 0,这种行列式称为对角行列式,它是三角行列式的特例,因此

$$D_3=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

以上说明三角行列式及对角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积.

D_4 在副对角线上方的元素为 0,它不是三角行列式. 类似于前面的讨论可知 D_4 中不含 0 元素的项只有 $(-1)^{\tau(n\,n-1\cdots 2\,1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$,因为

$$\tau(n\,n-1\cdots 2\,1)=(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以

$$D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1},$$

即 D_4 等于副对角线上元素的乘积再乘以 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

例 1.2.3 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

其中各元素 $a_{ij}(x)$ 都是可导函数. 试证:

$$f'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

(即行列式的导数等于对各行求一次导数的 n 个行列式的和).

证 根据行列式定义及导数公式,有

$$\begin{aligned} f'(x)&=\Big[\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x)\Big]' \\ &=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}\big[a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x)\big]' \\ &=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a'_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x) \\ &\quad+\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}(x)a'_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x)+\cdots \\ &\quad+\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a'_{np_n}(x) \end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

下面的定理是对行列式定义的另一种说法.

定理 1.2.1　对于上述行列式定义中的任意一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\,a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

若对乘积 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子顺序进行若干次交换，变为乘积 $a_{i_1j_1}\,a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，则有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\,a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}\,a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

换句话说，如果行列式各项的乘积 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子不是按行标从小到大的自然顺序排列，而是任意排列成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，则这项应冠以符号 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

证　因为 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{i_1j_1}\,a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，所以只要证明

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

设 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子经过 k 次交换，成为 $a_{i_1j_1}\,a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，则行标排列 $1\ 2\cdots n$ 经过 k 次交换，成为排列 $i_1i_2\cdots i_n$. 列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 k 次交换，成为排列 $j_1j_2\cdots j_n$，根据性质 1.1.1，若 k 为奇数，则行标排列与列标排列都同时改变奇偶性，因而

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=-(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},\quad (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

若 k 为偶数，则行标排列与列标排列的奇偶性都不变，因而有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},\quad (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

不论 k 是哪一种情况，都有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

因为 $\tau(12\cdots n)=0$，所以要证的等式成立.（证毕）

1.3　行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 D 的第一行，第二行，…，第 n 行，依次改写成第一列，第二列，…，第 n 列，得到行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D^{T} 称为 D 的转置行列式. D 中第 i 行 j 列的元素 a_{ij}，在 D^{T} 中位于第 j 行 i 列的位置上.

性质 1.3.1 行列式与其转置行列式相等.

证 D 中任意一项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 也是 D^{T} 中不同行不同列元素的乘积，但在 D^{T} 中，其行标排列为 $p_1p_2\cdots p_n$，列标排列则为 $12\cdots n$，根据定理 1.2.1，在 D^{T} 中，这个乘积应冠以符号

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}.$$

这就证明了 D 中每一项也是 D^{T} 中的一项，D 中不同的项在 D^{T} 中也是不同的，并且 D 与 D^{T} 的项数一样，都是 $n!$，因此有 $D=D^{\mathrm{T}}$.（证毕）

由性质 1.3.1 可知，行列式中的行与列具有同等地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也必定成立，反之也一样. 因此，以下的行列式性质，我们只对行的情形加以证明，将行列式转置就可得到列的相应性质，以后不再说明.

性质 1.3.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 设

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \end{array},$$

交换第 i 行与第 j 行，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \end{matrix},$$

其中 D 与 D_1 中未写出的行的元素都对应相同.

根据行列式定义,D 中任一项为

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ 也是 D_1 中不同行不同列元素的乘积,其列标排列没有变化,但行标排列为

$$1\cdots j\cdots i\cdots n.$$

它是由自然顺序 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 交换 i,j 得到的,由性质 1.1.1,有

$$(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)} = -(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots j\cdots n)} = -(-1)^0 = -1.$$

根据定理 1.2.1,乘积 $a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ 在 D_1 中应冠以符号

$$(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} = -(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)},$$

与在 D 中的符号相反,这说明将 D 中每一项变号,就得到 D_1 的所有项,故有 $D=-D_1$.(证毕)

推论 1.3.1　若行列式有两行(列)相同,则此行列式等于零.

证　将这两行交换,行列式未改变,由性质 1.3.2 得到 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.3.3　行列式某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式,即有

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

两个行列式中除第 i 行之外,未写出的元素都对应相同(这性质也可以叙述成:行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外面相乘).

证　根据行列式定义,有

$$\begin{aligned} 等式左边 &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = 等式右边. \end{aligned}$$

(证毕)

性质 1.3.4　行列式中如有两行(列)成比例,则此行列式等于零,即

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=0 \quad (\text{设第 } i \text{ 行与第 } j \text{ 行成比例}).$$

证 根据性质 1.3.3,将 D 的第 i 行提出公因子 k 以后,行列式的第 i 行与第 j 行相同,由性质 1.3.2 的推论得 $D=0$.(证毕)

性质 1.3.5 若行列式的某行(列)的元素都是两数之和,如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 记等式右边两个行列式为 D_1, D_2,则根据行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1+D_2. \end{aligned}$$

(证毕)

性质 1.3.6 将行列式的某行(列)乘以数 k,再加到另一行(列)上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=D_1,$$

D 与 D_1 中未写出的元素对应相同.

证　由性质 1.3.5 及性质 1.3.4,有

$$D_1=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=D+0=D.$$

在举例之前,先引入行列式运算的几个记号:

(1)“交换第 i,j 两行(列)”记作 $r_i\leftrightarrow r_j$($c_i\leftrightarrow c_j$);

(2)“$k\neq 0$ 乘第 i 行(列)”记作 kr_i(kc_i);

(3)“k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上”记作 r_i+kr_j(c_i+kc_j).

要注意的是,行列式经运算 r_i+kr_j 后,第 i 行改变,但第 j 行不变. 同样,运算 c_i+kc_j 使行列式的第 i 列改变,但第 j 列不变.

例 1.3.1　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解　计算数字的高阶行列式,有一种方法是利用行列式性质,尤其是用行列式的性质 1.3.6,将行列式化为上三角行列式,于是上三角行列式主对角线上元素的乘积就是行列式的值. 本题先以 2 乘第 1 行,再以 2 除行列式,使行列式的元素都为整数,方便计算. 再用行列式性质(主要是性质 1.3.6),将其化为上三角行列式. 整个计算过程如下:

$$D\xlongequal{2r_1}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+r_1\\ r_4+2r_1}]{r_2-2r_1}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_4}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-9r_2]{r_3-4r_2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-5r_3}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times(-1)\times(-4)=4.$$

例 1.3.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

解 这是文字元素的行列式，计算这种行列式，要先分析行列式的特点，采用适当的行列式性质进行化简计算. 本行列式的特点是各行的构造相类似，对列作变换可达到化简的目的. 具体运算如下：

$$D\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\ c_3-c_2}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.3.3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\quad(\text{主对角线元素都为 } a,\text{其他元素都为 } b).$$

解 本行列式的特点是各行元素之和相等，若将第 2 列之后各列都加到第 1 列，将公因子提出，再对行作运算，就可化为上三角行列式了. 具体运算过程如下：

$$D\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 1.3.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}.$$

解 第 1,2,3 行依次提公因子 x,y,z，得