高等数学学习辅导

主编　王学理　徐鹏春

NEUPRESS
东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导/王学理，徐鹏春主编．—沈阳：东北大学出版社，1999.8
ISBN 7-81054-411-X

Ⅰ．高…
Ⅱ．①王… ②徐…
Ⅲ．高等数学-学习辅导-教学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 30572 号

内 容 简 介

本书采用归类分析的方法对高等数学诸多内容进行条分缕析，向读者介绍方便快捷的解题方法.

全书共含十二讲，第十二讲为全国模拟试题选编，其他各讲均包含内容提要、客观题、主观题、疑难解析、复习题与答案等六部分.

本书的主要对象是在读的高校学生.

©东北大学出版社出版
（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）
东北印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：787×1092　1/16　　字数：500 千字　　印张：20
印数：0001～8060 册
1999 年 8 月第 1 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：刘宗玉　　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：20.00 元

序　言

高等数学，作为理工科院校大学生的一门基础课，其重要性是众所周知的．它不但是学好其他课程的基础，其本身也是内容丰富的．通过高等数学的学习，对培养学生丰富的空间想象能力、严格的逻辑推理能力和深刻的思维能力十分有益．

然而，高等数学的学习又往往因其概念抽象、题目繁复艰涩而让学生们视为畏途．那么，能否有规律可循、有捷径可走，使学生费力少而收效快呢？回答是肯定的．

本书将高等数学诸多问题进行合理的归类，通过典型问题的解析帮助读者理解基本概念，增强运算能力；介绍方便快捷的解题方法，使读者耳目一新．

除第十二讲外，其他各讲都包含内容提要、客观题、主观题、疑难解析、复习题和答案等六个部分．

参加本书编写的有徐鹏春（第一讲、第二讲），王学理（第三讲、第十二讲），张金海（第四讲），蔡敏（第五讲），石月岩（第六讲），武晓霞（第七讲），张广济（第八讲），韩志涛（第九讲），唐涧涛（第十讲），惠星杰（第十一讲），全书由王学理组织编写并统稿．

本书适用于理工科高等院校的学生，特别是使用同济大学数学教研室编写的《高等数学》（第四版）的学生，对于那些有志“考研”的学生也是一本内容翔实的辅导用书，本书也可作为高校数学教师的教学考参书．

由于作者水平所限，疏漏与不妥之处在所难免，若能得到读者的批评和同仁的指教那正是编者衷心的希冀．

编　者

1999 年 5 月 18 日

目　　录

第一讲　函数与极限

一、内容提要

（一）　主要定义

1　$\forall x \in D$，$\exists y$，按照规则 f 与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 称 D 为 $f(x)$ 的定义域.

2　函数的最简单性态

(1) $f(x) = f(-x)$，$x \in (-l, l)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x) = -f(-x)$，$x \in (-l, l)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x+T) = f(x)$，$x \in (-\infty, +\infty)$，称 $f(x)$ 为周期函数，使等式成立的最小正 T 值称为周期.

(4) $\forall x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)$ $(> f(x_2))$，则称 $f(x)$ 为 D 上的单调增加（减小）函数.

(5) 若存在 $M > 0$，使 $\forall x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称为无界.

3　点 a 的 δ 邻域 $\bigcup(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta, \delta > 0\}$. 点 a 的去心邻域 $\bigcup(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta, \delta > 0\}$.

4　$\forall x \in D$，$\exists y$，通过 $u = \varphi(x)$ 按照规则 $y = f(u)$ 与其对立，则称此函数为由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

5　基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

6　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤而得到的且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

7　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限（数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a），记作 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

极限不存在时，称 $\{x_n\}$ 发散.

8　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注：　在此定义中，将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$，则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$，或 $f(x_0 - 0)$. 类似地可定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

由此可知，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$，$A$ 为有限数.

9　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

注：　在此定义中，将 $|x| > X$ 改成 $x < -X$，则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to -\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. 类似可定义 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

由此，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

10　$\forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. 无穷大量简称为无穷大.

类似地可定义$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

注：当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时，结论都成立，则以下简记 lim. 以零为极限的量称为无穷小量，简称无穷小.

11　当 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$ 时，若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=0(\beta x)$；若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小，当 $C=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

12　若 $y=f(x)$ 在 x_0 处有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若记 $\Delta x=x-x_0$，则连续定义可写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不连续时称为间断.

13　若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（x_0 可除外），则具有下列条件之一者即间断：

(1) $f(x)$ 在 x_0 无定义. (2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. (3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

x_0 称为间断点.

具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点，极限存在的间断点称为可去间断点.

（二）　主要定理与公式

1　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\lim[f(x)g(x)]=AB,$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

2　极限存在准则

Ⅰ. 单调有界数列必有极限.

Ⅱ. 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.（此夹逼准则对函数极限也成立）

3　在同一变化过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注：(1) 等价无穷小具有传递性：设 α,β,γ 为同一过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

(2) 求极限过程中可用等价无穷小替换：在同一过程中，若 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$，且 $\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

4　$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$. 这里 $\lim\alpha(x)=0$.

5　两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

6　若在 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

7　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则必存在 $U(\hat{x}_0,\delta)$，使在此邻域内 $f(x)>0(f(x)<0)$.

注：若 $A=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处连续，也有相同的结论.

8　若极限存在，则其极限值必唯一.

9　初等函数在其定义区间上连续.

10　闭区间上连续函数必有下列性质：

(1) 有最大值与最小值.

(2) 有界.

(3) 满足介值定理：任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值.

(4) 满足零点定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

（三） 结论补充

1 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=e$.

3 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

注：以上三条中 $\varphi(x)$ 不为零.

4 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6 当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

注：以上这些等价无穷小可用于求极限过程中的等价无穷小替换.

7 若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0$，且 $\alpha(x)\sim A(x)$，$\beta(x)\sim B(x)$，则有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{A(x)}{B(x)}$ 和 $\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}$.

注：其中分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不为零.

8 不为零的无穷小的倒数为无穷大；无穷大的倒数为无穷小.

9 $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}.$$

10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

11 设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$，且 $\alpha-\beta\neq0$，则 $\ln(1+\alpha)-\ln(1+\beta)\sim2(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+\beta})\sim\alpha-\beta$.

12 设 $\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}$ 均为 $x\to x_0$ 的无穷小，且 $\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\beta\sim\bar{\beta}$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=C\,(C\neq-1)$，则 $\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

13 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0)$，$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 存在且相等.

14 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 也连续.

二、客观题

（一） 是非题

解是非题时，要求对认为正确的给出证明或提出依据，认为不对的举出反例或指出错误所在. 以后不再一一说明.

【例 1】 $y=f(x)$ 为偶函数，$x=\varphi(t)$ 为奇函数，则 $y=f[\varphi(t)]$ 必为偶函数.

【解】 是. 设 $F(t)=f[\varphi(t)]$,则 $F(-t)=f[\varphi(-t)]=f[-\varphi(t)]=f[\varphi(t)]=F(t)$. $F(t)$ 满足偶函数定义.

关于函数的奇偶性,还有许多结论,形象地表示如下:

偶 + 偶 = 偶,奇 + 奇 = 奇,奇 · 奇 = 偶,奇 · 偶 = 奇等. 读者可自己证明.

【例 2】 若 $y=f(x)$ 为单调增函数,则其反函数 $x=\varphi(y)$ 必为单调增函数.

【解】 是. 用反证法证明:若 $\varphi(y)$ 不是单调增函数,则必存在 $y_1<y_2$,使 $x_1=\varphi(y_1)\geqslant\varphi(y_2)=x_2$. 由于 $y=f(x)$ 单调增,对 $x_1>x_2$,有 $y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$,矛盾. 故 $x=\varphi(y)$ 也是单调增函数.

【例 3】 数列 $\{x_n\}$ 和数列 $\{|x_n|\}$ 具有相同的敛散性.

【解】 非. 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{|x_n|\}$ 必收敛.

证明如下:设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N>0$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$. 而 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$,故

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

但若 $\{|x_n|\}$ 收敛时,$\{x_n\}$ 不一定也收敛.

例如,$x_n=(-1)^n$,则 $|x_n|=1,\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

这同时也说明,若 $\{x_n\}$ 发散,$\{|x_n|\}$ 不一定也发散.

【例 4】 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A.\ (n=1,2,3,\cdots)$.

【解】 是. $\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\therefore\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0$,只要 $x>X$,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $N=[X]$,于是只要 $n>N$,就有 $|f(n)-A|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

注:利用这一结论可将一些数列极限转化为函数极限,进而使用适用于函数极限的求极限方程来求出该数列的极限.

【例 5】 $x\to0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x$,于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

【解】 非. $x\to0$ 时,$\tan x,\sin x$ 确为 x 的等价无穷小,用 x 替换分母中的因子 $\sin x$ 也对. 但用 x 替换分子中的项(而不是因子)$\tan x,\sin x$ 却是错误的. 应该用 $\tan x-\sin x$ 的等价无穷小作替换. 现阶段求 $\tan x-\sin x$ 的等价无穷小比较困难. 本题可以这样做.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$(1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},x\to0$ 时$)$

【例 6】 无穷多个无穷小的乘积必是无穷小.

【解】 非. 例如:

$$\{u_n^{(1)}\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

$$\{u_n^{(2)}\}:1,2,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

$$\{u_n^{(3)}\}:1,1,3^2,\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

$$\{u_n^{(4)}\}:1,1,1,4^3,\frac{1}{5},\cdots$$

$$\cdots$$

$n\to\infty$ 时，$u_n^{(1)},u_n^{(2)},u_n^{(3)},\cdots$ 都是无穷小. 但它们的乘积

$$u_n^{(1)}\cdot u_n^{(2)}\cdot u_n^{(3)}\cdots\equiv 1.$$

$\therefore n\to\infty$ 时，$u_n^{(1)}\cdot u_n^{(2)}\cdot u_n^{(3)}\cdots$ 不是无穷小.

练　　习　1-1

辨析下列各题

1　若 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$，则 $f(x)$ 为奇函数.

2　$f(x)$ 为定义在 $[-l,l]$ 上的任意函数，则 $f(x)+f(-x)$ 必为偶函数.

3　两个单调增加函数的积函数必为单调增加函数.

4　若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，而 $g(x)$ 在 x_0 点处连续，则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必不连续.

5　若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$（$a$ 为有限数），m 为任意自然数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+m}=a$.

6　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$.

7　$\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim\limits_{x\to\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}\right]^{\frac{3^x}{x}}=+\infty$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}=e$.

8　有界量与无穷大之积必为无穷大.

（二）　填空题

【例 1】　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为[　　]. (其中 $a>0$).

【解】　应填 $[a,1-a]$.

因为 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

注意到 $a>0$，只可能有两种情况：

当 $1-a<a$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，上面不等式组无解，定义域不存在.

当 $1-a\geqslant a$ 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，上面不等式的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$. 因此 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$，其中 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

【例 2】　已知 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=$[　　].

【解】　应填 0. 因为 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$，则 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$，恒有 $||f(x)|-0|=|f(x)|=|f(x)-0|<0$，故有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

注：$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. 这由以上证明中显然可见. 这一结论在极限证明中经常用到.

【例 3】　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$[　　].

【解】　应填 $\ln 2$. 由结论补充 10，原式 $=e^{3a}$，再由 $e^{3a}=8=e^{\ln 8}=e^{3\ln 2}$，故 $a=\ln 2$.

【例 4】　若 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$[　　].

【解】　应填 $\frac{1}{2}$. 因为要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. 而 $f(0)=a$，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\therefore a=\frac{1}{2}.$$

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases}x,x<1,\\ a,x\geqslant 1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$
若使 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 a、b 的值为[　　].

【解】 应填 $a=1,b=2$. 因为

$$F(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x+b, & x<0,\\ 2x+2, & 0\leqslant x<1,\\ x+2+a, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要 $F(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处连续即可，除此之外的其它点处 $F(x)$ 显然连续. $F(0)=2,F(1)=3+a$. 而 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+b)=b$, $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+2)=2.\therefore b=2$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+2)=4$, $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+a)=3+a$, $\therefore a=1$

练　　习　1-2

1　$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x<0\\ 0, & x=0\\ x-\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，已知 $f(x)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的偶函数，则 $\varphi(x)=$[　　].

2　设 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=$[　　]. $(x\neq -1)$

3　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$[　　].

4　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=$[　　].

5　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}=$[　　].

6　$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=$[　　].

7　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}=$[　　].

8　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\cot x-\dfrac{1}{x})=$[　　].

9　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{1-2^{\cot x}}=$[　　].

10　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的[　　]间断点.

(三)　选择题

【例 1】 $f(x)=x(e^x-e^{-x})$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是[　　].

(A)　有界函数；　　　　(B)　单调增加函数；

(C) 偶函数； (D) 奇函数.

【解】 应选择 C. 因为 $f(-x)=-x(e^{-x}-e^{x})=x(e^{x}-e^{-x})=f(x)$.

【例 2】 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}$的结果是[ ].

(A) 1； (B) -1； (C) 0； (D) 不存在.

【解】 应选择 D. 因为

$x\to 0$ 时，$e^{|x|}-1\sim|x|$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$. 而$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$. 因而$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$不存在，即原极限不存在.

【例 3】 设 $0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$[ ].

(A) a； (B) b； (C) 1； (D) $a+b$.

【解】 应选择 B. 因为$\sqrt[n]{a^n+b^n}=b\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$，故原极限值为 b.

【例 4】 当 $x\to 0$ 时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是[ ].

(A) 无穷小； (B) 有界量，但非无穷小；

(C) 无界量，但非无穷大；(D) 无穷大.

【解】 应选择C. 因为当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x^2}$是无穷大，而$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 有界量与无穷大的乘积不一定是无穷大. 实际上，当 $x=\dfrac{1}{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 的值为 0；而当 $x=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{1}{2}\pi}(k=0,1,2,\cdots)$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 的值为 1. 故当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 既不是无穷大，也不是无穷小，又不是有界量. 它是无界的.

【例 5】 方程 $x^4-x-1=0$ 至少有一个根的区间是[ ].

(A) $(0,\dfrac{1}{2})$； (B) $(\dfrac{1}{2},1)$； (C) $(2,3)$； (D) $(1,2)$.

【解】 应选择 D. 因为在上述各区间中，$F(x)=x^4-x-1$ 仅在区间$[1,2]$上满足$F(1)\cdot F(2)<0$.

练　　习　1-3

1 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$的结果是[ ].

(A) 1； (B) $\sqrt{2}$； (C) 2； (D) 极限不存在.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$[ ].

(A) 0； (B) 1； (C) 不存在；(D) ∞.

3 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的[ ].

(A) 连续点； (B) 可去间断点；

(C) 跳跃间断点； (D) 无穷间断点.

4 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$，且$f(x)$在$x=a$处无定义，则点$x=a$是$f(x)$的[ ].

(A) 可去间断点； (B) 跳跃间断点；

(C) 连续点； (D) 无穷间断点.

5 函数$f(x)$在闭区间上连续是$f(x)$在其上有最大、最小值的[ ].

(A) 必要条件； (B) 充分条件；

(C) 充分必要条件； (D) 既非充分条件，也非必要条件.

6 $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}$有[ ]个间断点.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 0.

三、主观题

(一) 函数概念与简单性态

【例 1】 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2,0\leqslant x\leqslant 1,\\2x,1<x\leqslant 2.\end{cases}$求$\varphi(x)$.

【解】 $\varphi(x+1)=\begin{cases}(x+1-1)^2,1\leqslant x+1\leqslant 2,\\2(x+1-1),2<x+1\leqslant 3.\end{cases}$

故
$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2,1\leqslant x\leqslant 2,\\2(x-1),2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

【例 2】 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$f(\sin x)$的定义域.

【解】 因为$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，故$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因此$f(\sin x)$的定义域是$[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【例 3】 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=f[e^x]=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1,\end{cases}$

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

【例 4】 证明$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

【证明】
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f(x).\end{aligned}$$

【例 5】 证明$f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【证明】 取$h>0$，则$f(x+h)-f(x)=2^{x-1+h}+2^{x-1}=2^{x-1}(2^h-1)>0$. 故$f(x+h)-f(x)>0$，即$f(x+h)>f(x)$，$x+h>x$. 故$f(x)$单调增加.

练　习　1-4

1　$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$求 $f[f(x)]$.

2　$f(x-1)=\dfrac{3x+1}{x-2}$,求 $f(x)$.

3　$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$求 $f[g(x)]$.

4　求 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

5　求 $y=\sin\pi x$ 的周期.

6　验证 $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 是偶函数.

7　验证 $y=3^x-6$ 是单调增加函数.

8　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$($a$、$b$、$c$ 均为常数)且 $|a|\neq|b|$,证明:$f(-x)=-f(x)$.

(二)　利用定义或准则研讨极限

【例 1】　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

【证明】　$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}<\dfrac{n+|a|-n}{n}=\dfrac{|a|}{n}$.

要使$\dfrac{|a|}{n}<\varepsilon$,只要 $n>\left[\dfrac{|a|}{\varepsilon}\right]+1$. 因而

$\forall\,\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{|a|}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,恒有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

【例 2】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

【解】　令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$,则

$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$. 即 $0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. 令 $n\to\infty$,则 $h_n\to 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

这是一个重要结论,在以后的学习中还要用到它.

【例 3】　已知 $x_1=\sqrt{a}$,$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$,…,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$　$(a>0)$.

【解】　显然. $x_n>x_{n-1}$　$(n=2,3,\cdots)$. 由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$,有 $x_n^2=a+x_{n-1}$,于是 $x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$,故 x_n 有界,于是知$\{x_n\}$为单调有界数列.

由极限存在准则 Ⅰ,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 有 $x_n^2=a+x_{n-1}$，两端取极限，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a+x_{n-1})$ 得 $A^2=a+A$. 解得 $A=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4a})$. 由保号性，舍去负值，得 $A=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

【例 4】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【解】 记 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$，

则 $\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$.

由夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且其值为$\frac{1}{2}$.

【例 5】 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$，其中 $a>0$，$x_0>0$. 数列$\{x_n\}$的极限是否存在？若存在，求其值.

【解】 由 $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)=\frac{x_{n-1}^2+a}{2x_{n-1}}\geqslant\frac{2\sqrt{a}\,x_{n-1}}{2x_{n-1}}=\sqrt{a}\quad(n=1,2,\cdots)$，即数列$\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$. 又因为 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，所以数列$\{x_n\}$单调减少. 由极限存在准则 I，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

对 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ 两端取极值，有

$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，解得 $A=\pm\sqrt{a}$，而 $x_n>0$，由保号性，$A=\sqrt{a}$（负值舍去）. 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

练　　习　1-5

1　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0)$.

2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

3　设 $x_1>a>0$，且 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4　已知 $a_1=0$，$a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3)\quad(n=2,3,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在，并求此极限值.

5　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

（三）　利用两个重要极限求极限

两个重要极限是指$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. 在解题过程中，也可以利用其变形，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$， $\lim\limits_{n\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 等.

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{2}.$$

✓【例 2】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

【解】 做代换 $a^x-1=t$,则 $x=\log_a(1+t)$,$x\to 0$ 时,$t\to 0$. 故

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1}{\log_a e}=\ln a$.

✓【例 3】 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0,a\neq 1,b\neq 1,c\neq 1)$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$,其中,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc).$$

故原式 $=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

【例 4】 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{x}{2}}\right\}^{-2}=e^{-2}.$$

注:除利用上述两个重要极限外,也可以利用已知的其它重要结论简化计算. 如可利用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$,解例 5 如下.

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{4x}\cdot 4-\dfrac{\sqrt[3]{1+(-3x)}-1}{-3x}\cdot(-3)\right]$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot(-3)=3.$$

练　　习　1-6

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x+1}$.

4　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

5　设 a、b 为常数，且 $a>0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)$.

（四）利用等价无穷小替换求极限

【例 1】　求 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{e^{\sin x}-1}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{e^{\sin x}-1}$. 当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$. 故

$$原式=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【例 2】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$.

【解】　原式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})(e^x-1)}$. 当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$e^x-1\sim x$. 故

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})\cdot x}=1.$$

【例 3】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

【解】　当 $x\to 0$ 时，$x\sin x\to 0$，故 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}x\sin x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

【例 4】　求 $\lim\limits_{x\to 1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}}$. 当 $x\to 1$ 时，$\tan(x-1)\to 0$，$\ln x=\ln[1+(x-1)]\to 0$，$\tan(x-1)\sim(x-1)$，$\ln[1+(x-1)]\sim x-1$. 由前面内容提要之结论补充中公式 7，有

$$原式=\lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=e.$$

注意：利用上述补充公式，可简化许多计算. 例如

1　$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$.

2　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

3　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}$，而当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，因而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$.

故原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

【例 5】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(e^{2x}-x^2)-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}$.

$x\to 0$ 时, $\dfrac{\sin^2x}{e^x}\to 0$, $-\dfrac{x^2}{e^{2x}}\to 0$, $\ln\left(1+\dfrac{\sin^2x}{e^x}\right)\sim\dfrac{\sin^2x}{e^x}$, $\ln\left(1-\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)\sim-\dfrac{x^2}{e^{2x}}$, $\sin^2x\sim x^2$, 故

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x\cdot e^{-x}}{-x^2e^{-2x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot e^x=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}e^x=-1.$$

练　　习　1-7

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)}-\dfrac{1}{\ln(1+2x)}\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{x\sin x}$.

5 设 $a>0.a\neq 1$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

提示:先提取 $a^{\frac{1}{x+1}}$.

(五) 利用单侧极限或子数列讨论极限

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0\\ 1, & x=0\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=1$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

【例 2】 证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

【证明】 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 故

$$\lim_{x\to 0^+}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\ 不存在.$$

【例 3】 对于数列 $\{x_n\}$,若 $x_{2n}\to a$, $x_{2n-1}\to a(n\to\infty)$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【证明】 $\forall\ \varepsilon>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$,故 $\exists\ N_1>0$,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$;同理, $\exists\ N_2>0$,当 $n>N_2$ 时,恒有 $|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{2N_1,2N_2\}$,则与 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

反之,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$. 读者不难给出证明.

注:一个数列极限存在的充要条件是:该数列奇数项构成的子数列与偶数项构成的子数列有相同的极限. 这一结论可用于求数列的极限. 反之,当某一无穷子数列极限不存在时,可断定极限不存在;当两个子数列极限存在而不相等时,极限也不存在.