“211”大学数学创新课改教材

概率论

李少辅 阎国军 戴 宁 李俊芬 编著

科学出版社

"211"大学数学创新课改教材

概　率　论

李少辅　阎国军　戴宁　李俊芬　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书既是一本完整系统的初等概率论教材，又是一本引导读者由初等概率论走向以测度论和柯尔莫戈洛夫公理化体系为基础的概率论的入门读物，内容包括：概率空间、条件概率与独立性、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、特征函数、大数定律与中心极限定理. 附录中提供了测度论等阅读材料.

教材特色鲜明，富创意，知识体系完整，结构严谨，同时又通俗易懂，利于教学，可作为高等学校数学各专业的教材，也可供其他相关专业选用，对教师和科研工作者也具有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率论/李少辅等编著. 一北京：科学出版社，2011.5

“211”大学数学创新课改教材

ISBN 978-7-03-030661-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论一高等学校一教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 052522 号

责任编辑：王雨舸　李磊东/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2011 年 5 月第一次印刷　印张：20 1/2

印数：1—4 000　字数：394 000

定价：35.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《“211”大学数学创新课改教材》
丛书编委会

序　　言

随着科学的进步与社会的发展，越来越多的随机现象成为科学研究的焦点，作为研究工具的概率统计，也越来越受到人们的重视. 20 世纪 80 年代以来，国内出现了许多优秀的概率论教材，对我国的概率统计教学做出了巨大贡献. 近年来，国内翻译和影印了许多国外的概率统计教材. 这些教材在理论体系上与我国现有的教材有很大差别，其中包含了许多现代概率论的观点和理念，如条件期望、滤子、鞅等概念，处处紧跟概率论学科的新进展，为今后应用与提高带来许多方便. 国内一些高校甚至直接采用影印的英文书作为教材. 这件事说明概率论教材需要改革已成为人们的共识.

我最近粗略地翻看了这本书的初稿. 他们在初等概率的框架下，作了一些改革尝试. 融入了一些现代概率论的概念与观点，对初等概率的一些概念作了进一步深化. 这本书突出了概率直观，将一些抽象的概念形象化，便于读者进一步理解现代概率统计的理论与方法.

这种做法是值得肯定和提倡的，我非常愿意为本书作序.

王梓坤

2010 年 10 月

（王梓坤，中国科学院院士、北京师范大学原校长、中国教师节首倡者.）

前　言

本书既是一本完整系统的初等概率论教材，又是一本引导读者由初等概率论走向以测度论和柯尔莫戈洛夫公理化体系为基础的概率论(以下简称为近代概率论)的入门读物.

在多年的教学实践中，编者体会到，学生在学了初等概率论之后，还欠缺一些东西.如，对概率论的研究框架理解不深，对概率论发展的方向较为模糊，对近代概率论知之甚少.更有甚者，不太知晓概率与概率分布的区别，把独立同分布的随机变量视为同一个随机变量，尤其是对随机变量序列的各种收敛性不甚清楚.

最近翻译出版的俄罗斯教授 A. H. 施利亚耶夫著《概率》一书，令人耳目一新.使人强烈地感到，在概率论的理论教学方面，我们存在较大的差距.我国目前概率论的教学重点，只是放在初等概率的各种计算上，而且这一倾向近几年来似有愈演愈烈的势头.20 世纪 80 年代以来，我国概率论的教学内容基本上没有变化.然而近 30 年间，与近代概率论有关的众多数学分支，如马尔可夫过程、鞅和随机积分、随机优化、随机控制等都有长足的进展.尤其是随机金融学的崛起，使得经济领域的研究也都需要近代概率论作为基础知识.

课程与教学的改革成为必然.但直接采用像上述《概率》那样的教材，显然不太适合我国目前的教学实践.《概率论》教材，应是既能使学生得到足够的初等概率的训练，又能让他们学到近代概率论的一些概念和方法，了解这些概念是如何从初等概率论中发展起来的，增强他们进一步学习近代概率论及其他应用学科的能力.这就是我们编写这本书的初衷.

从目录上看，本书与其他教科书大致相同.但由于把概念都纳入到概率空间中去理解，读者将会发现，本书有许多不同之处.为了使本书成为近代概率论的“解读”教材，我们要回答许多基本问题.如，为什么要引进可测函数；为什么要研究测度的扩张；为什么要用乘积空间与乘积概率来刻画独立重复试验；为什么要区别单个概率空间中的概率与乘积概率；为什么要把条件概率提升成为随机变量，从而引出关于 σ 域的条件概率与条件期望；为什么要把数学期望上升为关于概率测度的积分等.教材通过对这些问题的回答，使读者知道进一步学习近代概率论的必
同时，在附录中我们还向读者提供了测度论阅读材料.

在编写过程中，编者坚持抽象概念形象化的原则，无论多么抽象的概念，都把它放在最简单的环境中，看一看它究竟是什么样子.例如，关于 σ 域的条件数学期望这一概念，历来是学习近代概率论时最费解的概念之一.当 σ 域变得简单时，条

件数学期望就成为对随机变量进行局部平均. 我们就从这类最简单的情况出发，逐步引出一般性定义，同时指出由简单到一般所遇到的困难，使读者了解到拉东-尼柯迪姆定理在概率论发展中所起到的关键作用.

我们博采百家之长. 例如，用柯召先生在《组合论》一书中提出的相同球占位，来代替令人费解的允许重复组合，使许多古典型概率的计算变得简单. 用 W. 费勒的思想进行多去少补的演示，使读者了解到容斥原理的实质，同时进一步证明了多个容斥原理公式. 我们还采用了一些经典的例子和段落，在引用之处都指明了材料来源，并在这里对这些材料的作者表示感谢.

这本《概率论》教材，我们内部使用过多年，又作了较大的修改与补充，部分内容重写. 初稿完成之后，又在几所“211”院校试用多次. 这里特别感谢施仁杰教授，他仔细阅读了全书，并提出了许多宝贵意见. 我们怀着激动的心情感谢王梓坤院士，他为本书作了序言.

本书内容较多，教学中可适当取舍，带星号的章节或段落提倡学生自学.

提升概率论的教学水平是一项艰巨而又长期的任务，需要全体同仁的努力. 本教材仅是抛砖引玉，我们盼望有更好、改革步子更大的教科书出现. 由于编者水平有限，难免有不当之处，敬请读者和同仁批评指正.

作　者

2011 年 1 月

目　　录

第1章 概率空间

概率论的近代理论是由著名数学家柯尔莫戈洛夫奠基的. 他在《概率论的基本概念》[1] 一书中提出了概率论的公理体系,从而给概率论的发展提供了一个逻辑上的坚实基础. 本章的目的是用通俗的语言和大量的实例来介绍这一公理体系. 先由随机试验引出样本空间,并给出概率的描述性定义,然后介绍古典型与几何型中概率的计算方法. 在对概率有了一些直观了解的基础上,引出了事件的σ域,进而给出了概率的公理化定义,并由此定义导出概率的基本性质.

1.1 样本空间

1.1.1 随机现象

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象.

一类现象是在一定的条件下必然要发生某种确定的结果. 例如,在标准大气压下,水加热到 100 ℃ 时必然会沸腾. 用手上抛一个物体必然会下落等. 这类现象称为**必然现象**.

另一类现象是在相同的条件下进行试验和观察时,会出现不同的结果. 并且究竟出现哪一种结果不能事先预料. 例如,投掷一枚硬币,不能断定必然要出现哪一面. 这类现象称为**随机现象**.

随机现象广泛存在. 例如,种植同一品种的小麦,即使耕作条件一样,其亩产量也有高有低;一台车床按同一设计生产出的元件,其尺寸也有差别;一个商店的同一种货物,每天的销售量却不相同. 又如,一种股票每天的价格,一个地区的年降雨量,都是不能事先确定的. 这些都是随机现象.

随机现象在一次试验和观察中结果不确定,呈现出随机性,但在大量的重复试验和观察中却呈现出某种规律. 例如,一个射手在一次射击中,可能击中或未击中目标. 但在一段时间内,其命中率却是稳定的. 这种从大量的试验和观察中呈现出的规律性称为**统计规律性**.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2 样本空间

对随机现象进行观察称为**随机试验**. 随机试验具有如下特征:

(1) 在同样条件下,这种试验可以重复进行;

(2) 试验可能出现的结果不止一个,每次试验只能出现其中的一个结果,并且

事先不能断定必然要出现哪一个结果；

(3) 能够明确指出这种试验可能出现的一切结果.

由于每次试验出现什么结果事先不能断定，故呈现随机性. 但因试验能重复进行，从而可以寻求其统计规律. 因此，概率论中所研究的随机现象并不是那种孤立的，不能再现的，纯属偶然的现象.

今后我们只研究随机试验，并简称为试验.

定义 1.1.1　试验中每个可能出现的结果称为**样本点**，全体样本点构成的集合称为**样本空间**.

我们用 ω 或 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 表示样本点，用 Ω 表示样本空间.

例 1.1.1　掷一个硬币，出现正面与反面是两个可能结果. 若用 ω_1 表示正面，ω_2 表示反面，则 ω_1 与 ω_2 都是样本点，而样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

若一次掷两枚硬币，则有 4 个样本点：

$$\omega_1 = \text{“正正”},\quad \omega_2 = \text{“正反”},\quad \omega_3 = \text{“反正”},\quad \omega_4 = \text{“反反”}.$$

样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

例 1.1.2　从数字 1,2,3,4,5 中任取两个数，但取的方法不一样，得到不同的样本空间.

(1) 若一次取出两个数，不计次序，则样本点有 $C_5^2 = 10$ 个，即

$$\begin{array}{cccc}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\
 & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\
 & & (3,4) & (3,5) \\
 & & & (4,5)
\end{array}$$

(2) 如果每次取一个数，取后不放回，连取两次(不放回的抽样)，则样本点有 $A_5^2 = 20$ 个. 例如，(1,2) 与(2,1) 就是不同的样本点. 样本空间除了包含上面的样本点外，还包括两个数字交换位置后得到的那些样本点.

(3) 如果每次取一个数，取后放回，再取第二次(有放回的抽样)，则样本点有 5^2 个. 除了(2) 中的 20 个样本点外，还要加上(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5) 等样本点.

这个例子说明样本点与样本空间完全由随机试验的方式与方法来决定.

例 1.1.3　检查灯泡的使用寿命，每一个非负实数都有可能是某个灯泡的寿命. 因而每一个非负实数都是一个样本点，样本空间 $\Omega = [0, \infty)$.

例 1.1.4　在后面的极限理论中，要用到这样的样本空间：试验是将一个硬币无限次地掷下去. 若用“0”表示反面，“1”表示正面来记录每次投掷的结果，则这个试验的每一可能结果是由 0 与 1 组成的无穷序列，这种序列有不可数无穷多个，因而样本空间 Ω 具有不可数无穷多个样本点. 又因由 0 与 1 组成的无穷序列与二进制小数对应，则样本空间 Ω 可用闭区间 $[0,1]$ 表示.

例 1.1.5　观察一个粒子在直线 $\mathbf{R}$ 上的运动，在时刻 $t = 0$ 时，粒子位于直线

上某个点 x 处，然后粒子开始向左或向右作随机运动. 我们用 $w(t)$ 表示粒子于时刻 t 时在直线 $\mathbf{R}$ 上的位置，观察结果就是一条定义在时间轴 $[0,\infty)$ 上而取值于 $\mathbf{R}$ 上的连续曲线，而这类曲线的全体就构成样本空间：

$$\Omega = \{w(t): w(t)\ 是 [0,\infty)\ 到\ \mathbf{R}\ 的连续函数\}.$$

例 1.1.5 中的样本点与时间 t 有关，又如股票价格与期权价格都随时间而变，研究它们都要用到这类样本点. 这类样本点与样本空间是随机过程研究的对象.

1.1.3　随机事件

定义 1.1.2　样本空间 Ω 中，具有某种性质的样本点构成的子集称为**随机事件**，简称**事件**.

我们常用大写字母 $A,B,\cdots$ 或 $A_1,A_2,\cdots$ 来表示事件.

例 1.1.6　在例 1.1.1 一次掷两枚硬币的试验中，设 A 表示“至少有一个正面”的事件，则 $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. 若事件 B 表示“出现两个正面”，则 $B=\{\omega_1\}$.

注　符号 ω_1 与 $\{\omega_1\}$ 是不同的. ω_1 仅是一个样本点，$\{\omega_1\}$ 是由一个样本点组成的单点集，它是一个事件. 单点集构成的事件称为**基本事件**.

例 1.1.7　将一尺长的木棒随意折成三段，写出此试验的样本空间，并表示出事件 $A=$“三段能构成一个三角形”.

解　将一尺长的木棒随意折成三段，用 x,y 分别表示左段与中段的长度，则右段的长度为 $1-x-y$，于是用 (x,y) 表示一个可能出现的结果就够了. 但必须满足 $0<x<1, 0<y<1, 0<1-x-y<1$，于是样本空间为

$$\Omega=\{(x,y): x>0, y>0, x+y<1\},$$

如图 1-1 所示.

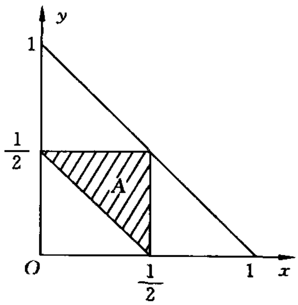

图 1-1

由三角形两边长度之和大于第三边可得

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega: 0<x<\frac{1}{2}, 0<y<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x+y<1\right\}.$$

进行一次试验，必出现一个样本点，而且只出现一个样本点. 一个事件可能包含许多个样本点. 如果在一次试验中出现的样本点属于事件 A，就称事件 A 在这次试验中**发生**了.

任何一个样本空间 Ω 都有两个特殊子集，即空集 $\varnothing$ 和 Ω 自身. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它在任何次试验中都不可能发生，因此称空集 $\varnothing$ 为**不可能事件**；而 Ω 包含一切样本点，它在每次试验中都必然发生，因此称 Ω 为**必然事件**.

1.1.4　概率

虽然我们不能断定随机事件在一次试验中是否必然发生，但是可以确定它发

生的可能性有多大."可能性"一词我们并不陌生. 例如，神枪手射击时，命中目标的可能性就很大，而一个新手射击时，命中目标的可能性就很小. 可能性的大小常用介于 0 与 1 之间的一个实数来表达，通常用百分数，如 90% 的合格率、百分之百的把握等.

定义 1.1.3　对于样本空间 Ω 的每一个事件 A，都对应一个实数 $P(A)$，它是事件 A 发生可能性大小的数量标志，并且

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad P(\Omega) = 1,$$

则实数 $P(A)$ 称为事件 A 的**概率**.

事件的概率是事件本身固有的属性. 它是一个确定的数，不因在一次具体试验中该事件是否发生而改变. 例如，掷硬币时正面出现的概率是 1/2，这是由于硬币的形状对称、密度均匀等客观条件决定的. 假设一个硬币，正面是铜的，反面是铝的，那么正面出现的概率就小于 1/2 了.

概率的客观存在性的一个很重要的证据是事件出现的频率呈现稳定性. 重复进行 n 次试验，其中事件 A 出现了 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 次，则 k/n 就称为事件 A 出现的**频率**，记为 $\mu(A)$. 频率 $\mu(A)$ 也能反映事件 A 出现的可能性，但它不是一个固定的数字. 试验次数不同时，频率一般也不一样，即使试验次数相同，若另外再进行 n 次试验，频率也会改变. 但频率的变动有一个明显的趋势，即它总是围绕某个固定常数上下波动，这个常数就是事件的概率. 一般来说，当试验次数 n 增大时，频率与概率之间的偏差会越来越小，只是偶尔会有较大的偏差，这种性质称为**频率的稳定性**.

频率的稳定性是一种统计规律性. 我们将在极限理论部分给出它的理论证明. 历史上有许多学者做过投掷硬币的试验，发现正面出现的频率的确在 1/2 左右摆动，从实践上证实了频率具有稳定性. 如表 1.1 所示.

表 1.1　历史上几次掷硬币试验记录

试验者	投掷次数	正面出现的次数	正面出现的频率
德摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

习　题　1.1

1. 一次投掷三枚硬币，写出这个试验的样本空间. 并写出下列事件：$A =$ "出现两个正面"；$B =$ "至少出现两个正面".

2. 袋中有 5 件产品，其中有正品 a_1, a_2, a_3；次品 b_1, b_2. 从中依次取出两件产品，取后不放回. 写出这个试验的样本空间. 并写出下列事件：$A_0 =$ "没有取到次品"；$A_1 =$ "恰好取到一件次