21世纪高职高专规划教材·公共基础课系列

高等数学基础教程（理工类）

郑艳霞 邓艳娟 编著

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材·公共基础课系列

高等数学基础教程（理工类）

郑艳霞　邓艳娟　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书从高职高专学生的特点出发，在内容编排上力求突出重点，分散难点，强调数学的基本思想和基本内涵，弱化计算，对于繁杂的计算，全部利用 Mathematica 软件实现.

本书共分 9 章，第 1 章介绍数的起源和数系，第 2～7 章是微积分的基本内容，第 8 章是线性代数和线性规划初步，第 9 章是概率论与数理统计初步.

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校和本科院校举办的二级职业技术学院理工科各专业的数学基础课教材，也可供管理专业、财经专业及非数学类理科专业的学生学习参考，同时也为相关的人员提供了一本阅读教材，还可以作为数学教师选取应用实例的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础教程(理工类)/郑艳霞，邓艳娟编著. —北京：清华大学出版社，2010. 6
(21 世纪高职高专规划教材. 公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-22254-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①郑…②邓…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 045740 号

责任编辑：田　梅
责任校对：李　梅
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京季蜂印刷有限公司
装 订 者：三河市兴旺装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　　**印　　张**：19.5　　**字　　数**：445 千字
版　　次：2010 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2010 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.00 元

产品编号：031511-01

前 言

FOREWORD

众所周知,高等数学是高等院校各专业最重要的课程之一,在高职院校中也起着非常重要的作用.其原因不仅在于从中可以学到一些数学概念、公式和结论,为其他数学课和专业课的学习打好基础,更重要的是通过学习数学可以培养人的理性思维品格和思辨能力,启迪智慧,开发创造力.因而数学教学的好坏直接影响到21世纪人才的培养,进而影响到我国的科技发展水平与现代化进程.很多数学教育研究者在教学模式、教学方法、教学内容上都做了深入广泛的研究,教学内容的改革是其核心.因此,我们在清华大学出版社的大力支持下,根据高职高专院校学生的实际情况,在教学内容的改进上做了一些探讨,承担了面向21世纪课程教材《高等数学基础教程》(理工类)的编写工作.

现在通用的教材在知识点选择上不适合理工类高职学生的使用,要么是照搬理工类本科的体系,微积分、线性代数和概率统计、积分变换等单独形成体系,对学生而言过难;要么就是将上述多门课程合并为一本教材,但是各部分知识的选择都只讲解前几章,而没有考虑学生的实际水平和后续课程对数学的基本工具的要求,这对于现在高职学生对数学的需求是不相符的.尤其是高职学生相对于本科学生更注重动手能力和实践能力,对理论的需求相对较弱,因此对高职学生而言,如何结合学生的专业特点,将抽象复杂的数学理论进行通俗的讲解,使他们确实学有所获,是重中之重.本书的编写在内容上力求由浅入深;强调数学的基本思想和基本内涵以及基本理论的背景介绍;选取恰当的实例引发学生的学习兴趣;弱化解题技巧,对于繁杂的计算,力图通过数学软件实现求解.教材编写总体思路和特色有如下几个方面。

(1) 体系完整,思想与应用兼顾

该教材第1章从自然数的产生,到有理数的出现一直讲到实数的构造成功,阐述了数学的发展过程,不仅可以使学生了解到将要研究的微积分,理论的基础——实数来之不易,更重要的是能使读者体会到数学的严密性与抽象性,体会到数学的思维方法.即数学不是直观经验的归纳和总结,而是一种理性的抽象理论.这对于学生数学思想方法的形成有积极的作用.紧接着讲了一维连续统——实数,使学生知道实数的连续性是它与有理数本质的不同点,是全部微积分原理的出发点,从而使微积分的研究有了坚实的基础.

另外,本教材增强了数学概念的背景材料介绍,加强了数学知识与实际应用的结合.现在我们所接触的数学类教材限于篇幅,基本上都没有数学理论发展历史、产生背景等的说明,学生在学习时常常会感到一头雾水,数学为什么会产生这样的定理、命题和公式?这样学生往往会对数学产生一种神秘感,觉得不可捉摸,这对学生掌握数学知识,自觉地运用数学,就形成了一种障碍.实际上,数学理论的创立以及数学体系的发展并非“空穴来风”,它也像其他学科一样有其产生的实际背景和过程,数学问题的提出和解决也很自然.

教材在编写中加强背景介绍，并且教材中每章开始的相关链接会直接引起学生的兴趣；每章结尾对数学家进行简单介绍，摘选了一些他们的逸闻趣事.通过这些环节可以让学生对基本的数学思想有一个感性的认识，也有助于培养学生自觉应用数学的意识，同时也增加了他们的学习兴趣，增强了教材的可读性；而每一章的观察与思考，则是本章相关知识的深化或者是实际应用，使学生能够体会到将所学的数学知识应用在实际中的乐趣.本教材的应用性特色非常鲜明，如在第5章微分方程中，除了学生熟悉的力学、电学问题外，还增加了人口增长的模型.这充分体现了各学科对数学的依赖程度，开阔了学生的视野，提升了学生的学习兴趣，可以有效地培养学生综合运用知识分析问题、解决问题的能力，起到既教数学，又教思想的作用.该教材通过数学知识这个载体，反复地向学生传递数学思想、数学方法，使这种思想方法根植在学生的脑海中，终生受益.

(2) 局部章节采用了一些新思路、新观点、新讲法

局部章节采用了一些新思路、新观点、新讲法，有效地化解了数学中的难点，使学生视数学为畏途的局面有所改变.将数学建模方法与思想贯穿于整个课程体系.数学的特点就是与现实结合非常紧密：一方面，数学中的一些理论就是对现实问题的抽象、归纳与模拟；另一方面，这些理论又对现实有直接的指导意义，具有很高的理论价值.但是现行的教材经常缺少实际应用部分，以至于学习了多年数学的学生仍然很少想到将数学应用于实践.数学建模是数学理论与实践结合的桥梁，学生只有具有数学建模的意识与思想，才能够活学活用，把学到的数学理论应用到现实中遇到的问题上，而不是简单机械地照搬书中的一些特例，这也是高职学生学习数学的重要目的之一.鉴于此，我们将数学建模的思想与基本方法贯穿于整个教材的编写中.

为了在有限的课时中使学生比较深入地理解高等数学的基本思想，本教材从离散变量性质的研究入手，逐步引入与其相对应的连续变量函数的基本运算和性质，这种由浅入深的方式使学生比较容易理解和掌握高等数学中的一些基本方法和概念.大家都知道极限是微积分实现其严密化的一种理论方法，是构筑微积分坚实理论体系的基石，是每种《高等数学》教材都要讲的内容；同时它也是课程的难点，每当讲到这部分内容时，学生都会如坠雾里云中.这部分内容传统的讲解顺序：数列的极限，函数的极限，无穷小与无穷大，极限四则运算法则，极限存在准则，两个重要极限，无穷小的比较.本教材的讲法是：先描述离散变量的极限，然后讨论连续型变量的极限.通过比较可以看出，本教材在这部分内容的处理上采用了一些新思路、新讲法：强调微元法是微积分的思想与方法的核心.微元法在后面多次被使用，特别是在定积分、差分和微分方程部分.由于微元法的引入，使后面计算部分的学习变得较为容易.

(3) 教学内容注意学生的专业特点，注重理论联系实际

本教材增加了许多内容，但篇幅并没有增加，其主要原因是详略得当.本教材注重数学思想与数学方法的学习，而只强调必要的基本解题技能的训练.复杂的计算都用Mathematic 5.0软件来完成.尤其是现在人们利用数学解决实际问题时，常利用数学软件进行数据的计算，因此在每一章的最后都介绍了Mathematic 5.0数学软件解相关问题的方法，可以使学生掌握实用的计算方法，同时也绕过了对于高职学生不太重要的一个难关——解题技巧，使大幅度减少教学课时成为可能.

在本教材的编写过程中,刘阅安副教授和朱立副教授提出了许多意见和建议,朱立副教授还提供了一些参考资料,在此一并表示诚挚的谢意.

本教材的编者希望能写出一套质量较高、适合高职实际教学需要的教材,但是由于水平有限,加之时间仓促,本教材的构思还很肤浅,还存在许多缺点和问题,能否适应更多学校的要求,还需要广大数学教师在实践中检验,并不断提出改进意见,对此我们将不胜感谢.

编 者

2010 年 4 月

目　录

CONTENTS

第 1 章

数与数系

相关链接

万物皆数

最早把数的概念提到突出地位的是毕达哥拉斯学派.他们很重视数学,企图用数来解释一切.宣称数是宇宙万物的本原,研究数学的目的并不在于使用,而是为了探索自然的奥秘.他们从5个苹果、5个手指等事物中抽象出了5这个数.这在今天看来很平常的事,在当时的哲学和实用数学界,却是一个巨大的进步.在实用数学方面,它使得算术成为可能;在哲学方面,这个发现促使人们相信数是构成实物世界的基础.

毕达哥拉斯对数论做了许多研究,将自然数区分为奇数、偶数、素数、完全数、平方数、三角数和五角数等.在毕达哥拉斯学派看来,数为宇宙提供了一个概念模型,数量和形状决定一切自然物体的形式,数不但有量的多寡,而且也具有几何形状.在这个意义上,他们把"数"理解为自然物体的形式和形象,是一切事物的总根源.因为有了数,才有几何学上的点,有了点才有线、面和立体,有了立体才有火、气、水、土这四种元素,从而构成万物.所以数在物之先.自然界的一切现象和规律都是由数决定的,都必须服从"数的和谐",即服从数的关系.

毕达哥拉斯还通过说明数和物理现象间的联系,进一步证明自己的理论.他曾证明用三条弦发出某一个乐音,在它的第5度音和第8度音时,这三条弦的长度之比为6∶4∶3.他从球形是最完美几何体的观点出发,认为大地是球形的,提出了太阳、月亮和行星做均匀圆运动的思想.他还认为10是最完美的数,所以天上运动的发光体必然有10个.

他同时任意地把非物质的、抽象的数夸大为宇宙的本原.认为"万物皆数";数是"万物的本质";是"存在由之构成的原则",而整个宇宙是数及其关系的和谐的体系.毕达哥拉斯将数神秘化,说数是众神之母,是普遍的始原,是自然界中对立性和否定性的原则.

数是数学中的基本概念,也是人类文明的重要组成部分.数的概念的每一次扩充都标志着数学的巨大飞跃.人们对于数的认识与应用以及数系理论的完善程度,反映了当时数学发展的水平.今天所应用的数系,已经构造得十分完备和缜密.因此在科学技术和社会生活的一切领域中,它都成为基本的语言和不可或缺的工具.具有一定性质的数放在一起构成了数系.通常所熟知的数系有自然数系、整数系、有理数系、实数系和复数系.数的观念具有悠久的历史,特别是自然数观念,其产生在史前时期.但建立严谨的数系基础理论却是在19世纪下半叶才完成的.本章将介绍数系的产生过程.

1.1 数与集合

1.1.1 数的扩展及运算

自然数或正整数的数学理论称为算术.引用字母 $a,b,c,\cdots$,作为整数的符号.算术的基础在于整数的加法和乘法服从加法的交换律,加法的结合律,乘法的交换律,乘法的结合律及乘法对加法的分配律.按此约定,可以表述这5个算术定律如下.

(1) $a+b=b+a$;

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$;

(3) $ab=ba$;

(4) $a(bc)=(ab)c$;

(5) $a(b+c)=ab+ac$.

这些算术定律是很简单的,可以视作显然的.但是它们未必适用于除整数外的其他方面.例如,a 和 b 不是整数符号,而是代表不同的化学物质,且假设"加"是按通常的意义理解的,则交换律显然不一定是对的.例如,将硫酸加入水中,就得到稀硫酸;而若将水加入浓硫酸中,势必给实验者带来灾难性的后果.类似的解释可以阐明在这种化学的"算术"中,加法和乘法的结合律和分配律也是不成立的.可以想象出各种类型的"算术",而使定律(1)~(5)中的一个或几个可能不成立.

在两个整数加法定义的基础上,可以定义不等的关系.两个等价说法是:$a<b$(读作"a 小于 b")和 $b>a$(读作"b 大于 a"),是指整数 b 可以通过整数 a 加上适当选取的第三个整数 c 而得到,即 $b=a+c$.在此情况下,记作

$$c=b-a,$$

它定义了减法的运算.

加法和减法称为**互逆运算**,这是因为正整数 a 加上整数 b,接着又减去整数 b,则结果仍是原来的整数 a:

$$(a+b)-b=a.$$

必须注意整数 $b-a$ 仅当 $b>a$ 时才有意义.当 $b<a$ 时,记号 $b-a$ 作为负整数的说明,将在后面讨论.

为了方便起见,通常采用下述记号之一,$b\geqslant a$(读作"b 大于或等于 a")或 $a\leqslant b$(读作"a 小于或等于 b"),用来表示陈述 $a>b$ 的否定.例如:$2\geqslant 2$,且 $3\geqslant 2$.

可以稍稍扩大一下正整数的范围,引入整数零.如果用通常的记号0来表示零,则按照对加法和乘法的定义,对于每个整数 a,有

$$a+0=a,$$

$$a\cdot 0=0.$$

于是可以自然地扩充减法的定义,即对于每个整数 a,令

$$a-a=0.$$

这是零的特定的算术性质.

1.1.2　数系

为了适应实践与理论的需要，必须扩充原始的自然数的概念. 经过漫长的发展进程，零、负数和分数逐渐被人们所接受，并获得与正整数同样的地位. 但是要使得代数运算完全自如，必须进一步扩充，使数的概念中包括无理数. 虽然自然数概念的这种扩充已运用了几个世纪并且已成为近代数学的基础，但是将它们置于坚实的逻辑基础上却只有不太长的时间. 在此将叙述此事的进展.

1. 出于实际测量需要而扩展出的有理数

整数概念是从计数事物的有限集合的基础上抽象出来的. 但是人们在日常生活中，不仅要数各种不同的事物，也需要测量许多量. 诸如长度、面积、质量和时间等. 如果要求在测量这些量时能够任意地细分，就必须超出整数范围而扩大算术的领域. 最初的步骤是将测量的问题转化为计数的问题. 首先，可以完全任意地选取一个测量单位——如米、尺、千克、克或秒等各种可能情形——并约定为 1，然后数一下合起来形成被测的量的这些单位的个数. 一块已知质量的铅块可能恰好重 54 kg. 然而，一般来说，数单元的办法常不能恰好数完，因而只用选定单元的整数倍并不能准确地测量所求之量，至多只能说，它位于单元的两个相继的整数倍之间，譬如说在 53 kg 与 54 kg 之间. 在出现这种情况的时候，采取进一步的步骤，引入新的子单元，它通过将原单元划分为 n 个相等的部分而得到. 在日常用语中，这些新单元可以有许多特定的名称；例如，1 m 划分为 100 cm，1 尺划分为 10 寸，1 kg 划分为 1000 g，1 h 划分为 60 min，1 min 划分为 60 s 等. 然而，在数学的符号体系中，由原始单元 1 划分为 n 个相等部分所得的子单元记作记号 $1/n$；且若给定的量恰好含有 m 个这种子单元，它的度量就记作记号 m/n. 这个记号称为分数或比（有时记作 $m:n$）. 经过若干世纪的摸索和努力之后，人们才自觉地采取一个决定性步骤：记号 m/n 的测量过程和被测之量的具体内容被扬弃了，而只是本质地考虑作纯粹的数，且与自然数具有同样的地位. 当 m 和 n 是自然数时，记号 m/n 称为有理数.

对于这些新的记号，数（原来仅指自然数）字的用法由下述事实辨明，即这些新符号的加法和乘法服从支配自然数运算的定律. 要想证明此结论，必须首先定义有理数的加法、乘法和相等. 这些定义如下.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\frac{a}{a}=1,\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\text{如果 } ad=bc.$$

其中，a,b,c,d 是任意整数.

例如：$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15},\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15},\frac{3}{3}=1,\frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$

如果想用有理数来测量长度、面积等，那么，这些定义是必须采用的. 但严格来说，这些记号的加法、乘法和相等的规则，是自己定义的，且除了一致性和可应用性之外，不是任何先验的需要所强加给的. 在定义了有理数运算的基础上，可以证明自然数的算术基本定律在有理数范围内继续保持：加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律和乘法对加法的分配律.

2. 出于有理数的内在需要而进行的扩展

除了实际测量的需要之外，有理数的引入还有其内在的理由，甚至是更加有力的理

由.现在就来进行讨论,它与前一段的论述全然无关.它具有纯粹的算术特性,并且在数学方法中是一种典型的主要倾向.

在自然数的通常算术中,总可以进行两种基本运算:加法和乘法.但是对作为"逆运算"的减法和除法来说,并不总是可能.两个整数 a,b 之差 $a-b$ 是指整数 c,使得 $a-c=b$,就是说,它是方程 $a+x=b$ 的解.但是在自然数系中,记号 $b-a$ 仅在限制条件 $b>a$ 下有意义,因为只有在此情形下方程 $a+x=b$ 才具有自然数解 x.引入记号 0,并约定 $a-a=0$,这是取消此限制所迈出的重要一步.更重要的是,通过引入记号 $-1,-2,-3,\cdots$,连同在 $b<a$ 时定义

$$b-a=-(a-b)$$

就能确保减法在正、负整数范围内通行无阻.引入新记号 $-1,-2,-3,\cdots$ 后,在包括正、负整数的扩张了的算术中,当然必须这样来定义运算,使得原来的算术运算规则保持不变.例如用以支配负整数乘法的规则

$$(-1)\cdot(-1)=1 \tag{1-1}$$

它是根据想保持分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 的愿望而推演出来的,若规定 $(-1)\cdot(-1)=-1$,则记 $a=-1,b=1,c=-1$,将有 $-1(1-1)=-1-1=-2$,而另一方面,又有 $-1(1-1)=-1\cdot 0=0$.数学家花了很长时间才认识到"符号规则"(1-1),连同支配负整数及分数的所有其他定义,都是不能"证明的".它们是人们的创造,借以达到运算自如,同时又保持算术的基本定律的目的.因此在这些定义基础上,可能且必须被证明的仅是算术中的交换律、结合律,以及分配律依然成立.甚至大数学家欧拉也曾经凭借一个完全不可信服的论据来证明 $(-1)\cdot(-1)$"必须"等于 $+1$.他是这样说的:因为 $(-1)\cdot(-1)$ 必须是 $+1$ 或者 -1,又因 $-1=(+1)\cdot(-1)$,所以 $(-1)\cdot(-1)$ 不可能是 -1.

如同负整数和零的引入为减法开拓了道路,同样,分数的引入,为除法清除了类似的算术障碍.两个整数 a 和 b 的商 $x=b/a$,由方程

$$ax=b \tag{1-2}$$

定义,仅当 a 是 b 的因子时,才存在整数解 x.如果不是这种情形,譬如说 $a=2,b=3$,只要引入一个新的记号 b/a,称为分数,它服从规则 $a(b/a)=b$,从而 b/a"按定义"是式(1-2)的解.作为新的数系来说,分数的创造使除法得以无约束地进行——但用零除例外,且完全不予考虑.

对研究来说,诸如 1/0,3/0,0/0 等表示式是没有意义的记号.如果用 0 除被允许,就会从正确的等式 $0\cdot 1=0\cdot 2$ 推导出谬误的结论 $1=2$.这种表示式有时采用符号 ∞(读作"无穷")来记.不过,人们不能把它当作服从数的通常计算规则那样进行运算,因为 ∞ 不是一个数.

所有有理数——正整数和正分数、负整数和负分数以及零——组成的数系,它的纯算术意义现在就自明了.因为在此扩张的数系中,不仅在形式上结合律、交换律和分配律依然成立,而且方程 $a+x=b$ 和 $ax=b$ 无条件地具有解 $x=b-a$ 和 $x=b/a$,其中在后一情况下要求 $a\neq 0$.换句话说,在有理数的范围内,有理运算——加、减、乘、除——可以无条件地进行,且其运算结果始终不超出这个范围.数的这种封闭性的范围称为**域**.由此可以将有理数称为有理数域.

引入新的符号以扩充范围，使得在原有范围内适用的定律在较大的范围内依然成立，这是数学中扩充原理的一个特征. 自然数扩充为有理数同时满足理论上和实践上的要求：在理论上，它取消了减法和除法的限制；在实践上，它可用于表示测量的结果. 有理数同时满足这两方面的需要，这是有理数真正的意义. 如上所述，数的概念的扩充，基于新数的创造和抽象的符号形式，例如 0，-2 和 3/4. 当然，在今天，大家很难相信，直至 17 世纪，有理数还并没有被普遍承认与正整数有同样的合法地位，在必须运用它们时，还抱着若干疑虑和惊异的态度. 这说明为什么迈出不可避免的一步是如此缓慢. 事实证明只有在抽象的范围内才能创造出合理的算术系统.

3. 有理数的几何解释

有理数系的具有启发性的几何解释由下述作图法给出.

在一直线或称“数轴”上，截取从 0 到 1 的线段，如图 1-1 所示. 从 0 到 1 的线段之长取作单位长，并可任意选定. 于是正整数和负整数可以用数轴上的一组等间隔的点来表示，正整数位于点 0 的右方，负整数位于左方. 为了表示分母为 n 的分数，将每个单位长的线段划分为 n 个相等部分，于是用分点表示分母为 n 的分数. 如果对于每个整数 n，都这样做了，那么所有的有理数便可用数轴上的点来表示. 称这些点为**有理点**，并且术语“有理数”和“有理点”将互相通用.

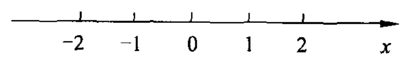

图 1-1　数轴

在 1.1.1 小节中，对于自然数定义过关系 $A<B$. 这个关系在数轴上有其类似的表示：若自然数 A 小于自然数 B，则点 A 位于点 B 的左方. 因为在所有的有理点之间存在这种几何关系，所以可以这样扩充此算术关系，即保持对应点之间相对的几何次序. 这可通过下述定义达到：有理数 A 小于有理数 $B(A<B)$，亦称 B 大于 $A(B>A)$，是指 $B-A$ 是正的. 由此推知，设 $A<B$，介于 A 和 B 之间的点(数)是既大于 A 又小于 B 的那些点. 任意这样一对相异的点，连同介于两者之间的点，称为线段，或**区间**，记为$[A,B]$.

从原点到点 A 的距离是一非负数，称为 A 的**绝对值**，用记号

$$|A|$$

来表示. 这就是说，如果 $A\geqslant 0$，则有 $|A|=A$；如果 $A\leqslant 0$，则有 $|A|=-A$. 显然，若 A 和 B 具有同样的符号，则等式 $|A+B|=|A|+|B|$ 成立；而若 A 和 B 符号相反，则有 $|A+B|<|A|+|B|$. 因此，合并这两个关系式，得到一般的不等式

$$|A+B|\leqslant|A|+|B|,$$

它是正确的，而且与 A 和 B 的符号无关.

一个重要的命题：**有理数在直线上是稠密的**. 意思是指：在不论多小的每个区间中总存在有理点. 只需取分母 n 充分大，使得区间 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ 小于所述区间$[A,B]$，则至少有一个分数 m/n 落在此区间中. 因此在直线上不存在这样的区间(不论多小)，它不含有有理点. 进一步可以推知，在任一区间中必有无限多个有理点. 因若仅有有限多个，则任意两个相邻有理点之间的区间将不含有有理点，但这是不可能的.