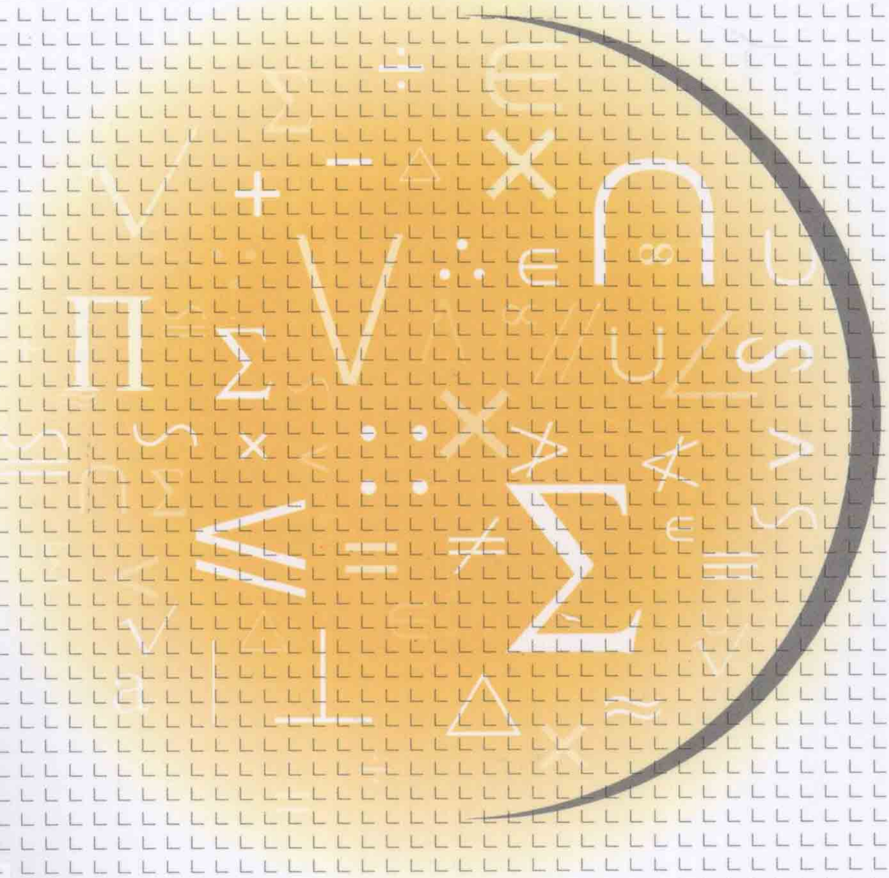
普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析十讲



刘三阳 李广民 编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析十讲

刘三阳　李广民　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

随着当代科学技术的日益数学化，许多工科专业对数学知识的需求与日俱增，在基础课设置上，越来越不满足于传统的高等数学教材，希望用数学分析取代高等数学．另一方面，数学分析作为数学专业最重要的基础课，学习一遍，学生往往难以学深吃透、融会贯通．基于上述原因，本书参阅了国内外大量教材和研究性论著，编写了这本《数学分析十讲》，取材大体基于而又略深于一般的高等数学和数学分析教材，是其某些内容的自然引申、扩展、推广、深化，与通常的高等数学和数学分析教材自然衔接．内容新而不偏、深而不难、广而不浅、精而不繁，方法简便，易学易用。

本书在选材和写法上，注重启发性、综合性、代表性、普适性和应用性，理论、方法和范例三者有机结合，并与数学思想融为一体．书中以理引法、以例释理、以例示法、借题习法、法例交融．既有一题多解(证)，又有多题一解(证)、一法多用，例题和习题丰富多样．多处穿插注记，启发思维和联想．

本书可作为理工科学生学习数学分析和高等数学的补充、提高教材，也可作为高等院校数学教师的教学参考书和考研学生的复习参考资料．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析十讲/刘三阳，李广民编．—北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-031364-5

Ⅰ．①数… Ⅱ．①刘… ②李… Ⅲ．①数学分析–高等学校–教材 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 104885 号

责任编辑：张中兴／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：北京蓝正设计广告有限公司

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷　印张：13 1/2
印数：1—6 000　字数：270 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

数学分析向来是大学数学专业最重要的基础课之一，是学生打开大学阶段数学学习局面、顺利进行后续学习和研究的关键课程，对训练学生的数学基本功和数学思维具有极其重要的作用.

随着科学技术的日益数学化，各门学科对数学的要求不断提高，我校 (西安电子科技大学) 为了加强本科生的数学基础，拟在工科学生学完常规的高等数学课程之后，为他们开设数学分析选讲，作为高等数学的补充和深化. 另一方面，即使对于数学专业许多学生 (甚至研究生) 而言，学一遍数学分析，也不易学深吃透、融会贯通. 因此，不论对工科学生还是数学专业学生，都很有必要对高等数学或数学分析课程中的某些内容进行细嚼、深究、强化、扩展和融合，以便进一步夯实基础、加深理解、开阔思路、增强能力，在新的起点上强化训练、充实提高. 许多数学专业正是出于这种考虑，开设了 "数学分析选讲" 课程，不过合适的教材并不多见.

根据上述需要，我们编写了这本《数学分析十讲》，除实数理论、闭区间上连续函数的性质和一致收敛性等少数内容 (为补工科学生之缺) 选自一般的数学分析教材外，其他取材大体基于而又略深于高等数学和数学分析教材，完全是其某些内容的自然延伸、扩充、推广、深化、交融和灵活运用，与通常的高等数学和数学分析教材若即若离、不即不离、自然衔接，内容新而不偏、深而不难、广而不浅、精而不繁，方法简便、易学易用，使学生温故知新、触类旁通，得到一次综合训练和充实提高的机会.

本书不是一般的题解或内容提要加例题的形式，也不刻意追求面面俱到，而是在参阅国内外大量教材和研究性论著的基础上，精选细编，注重启发性、综合性、代表性、普适性和应用性，理论、方法和范例三者有机结合，并与数学思想融为一体. 本书以理引法、以例释理、以例示法、借题习法、法例交融，既有一题多解 (证)，又有多题一解 (证)、一法多用，例题和习题丰富多彩. 多处穿插注记，启发思维和联想.

本书是从原《数学分析选讲》(科学出版社出版) 改编而来的，原书自 2007 年出版以来，已印刷 4 次，发行量较大，此番大幅改编，删繁就简、去粗取精，相当一部分

内容是重新编写和补充的, 使新书更加精致适用. 考虑到与原书同名者较多, 故将改编后的新书更名为《数学分析十讲》. 在改编过程中, 朱佑彬博士、刘丽霞博士、吴事良博士和杨国平老师对初稿进行了细致的检查, 提出了许多意见和建议, 科学出版社编辑张中兴同志为本书的出版付出了辛勤的劳动. 在此, 对他们深表感谢.

由于作者水平有限, 书中难免存在疏漏和不妥之处, 恳请读者批评指正.

作　者

2011 年 3 月

目　录

第1讲

求极限的若干方法

极限理论是数学分析的重要基础, 求极限贯穿于数学分析的始终, 其方法多种多样, 如利用极限定义、利用夹逼原理、利用单调有界原理、利用两个重要极限、利用等价代换、利用洛必达法则、利用定积分定义等, 高等数学和数学分析教材中已有详细介绍. 这一讲介绍几种在传统教材中少有介绍却比较简便的方法, 关于用积分中值定理求极限的方法, 见第 5 讲第 2 节.

1.1 用导数定义求极限

首先回想导数的定义. 若极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称其为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 即导数是用极限定义的, 现在反其道而行之, 利用导数定义计算某些数列和函数的极限.

例 1.1.1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$, $a>0$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\dfrac{1}{n}}=(a^x)'|_{x=0}=\ln a.$

例 1.1.2 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-\sqrt[2n]{a})$, $a>0$.

解(方法一) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}na^{\frac{1}{2n}}\left(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2n}}\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}-1}{2\cdot\dfrac{1}{2n}}$

$$=\frac{1}{2}\,(a^x)'|_{x=0}=\frac{1}{2}\ln a.$$

(方法二) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}-a^0}{\dfrac{1}{2n}}\right]=\ln a-\dfrac{1}{2}\ln a=\dfrac{1}{2}\ln a.$

例 1.1.3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$, $a>0,b>0,a\neq b$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-b^x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{x^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-b^x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{a^t-b^t}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x-a^0}{x}-\lim_{x\to0}\frac{b^x-b^0}{x}$$

$$=(a^x)'|_{x=0}-(b^x)'|_{x=0}=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

例 1.1.4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln1}{\dfrac{3}{x}}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\sin\ln1}{\dfrac{1}{x}}$

$$=3\cdot[\sin\ln t]'|_{t=1}-[\sin\ln t]'|_{t=1}=2\frac{1}{t}\cos\ln t\Big|_{t=1}=2.$$

例 1.1.5 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解 设 $f_k(x)=x^{\frac{1}{k}}$, 则

$$f_k'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f_k(1)-f_k(x)}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{\frac{1}{k}}}{1-x}=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}\Big|_{x=1}=\frac{1}{k},$$

所以, 原式 $=\prod\limits_{k=2}^{n}f_k'(1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$.

例 1.1.6 设 $f(x)$ 在 a 点可导, $f(a)>0$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

解 由题设可知 $f(x)$ 在 a 点的一个邻域内大于零, 故有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{[\ln f(x)]'|_{x=a}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

例 1.1.7 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0+h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\left[2\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0)}{2h}-\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}\right]$$

$$=2f''(x_0)-f''(x_0)=f''(x_0).$$

例 1.1.8 设 $f'(0)\neq 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\mathrm{e}^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\mathrm{e}^x-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\mathrm{e}^x-f(0)}{x-0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}\\&=[f(x)\mathrm{e}^x]'|_{x=0}/[f(x)\cos x]'|_{x=0}\\&=\frac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}.\end{aligned}$$

例 1.1.9 设 $f'(a)$ 存在, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sum\limits_{i=1}^{k} f\left(a+\dfrac{i}{n}\right)-kf(a)\right]$.

解
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{f\left(a+\dfrac{i}{n}\right)-f(a)}{\dfrac{i}{n}}=f'(a)\sum_{i=1}^{k} i=f'(a)\cdot\frac{k(k+1)}{2}.$$

习 题 1.1

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-2\right)$, $a>0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p-1\right]$, $p>0$;

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$, $a>0$;

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, m,n 为正整数;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 计算 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

3. 设 $f'(x_0)$ 存在, 计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

4. 设 $a>0$, $f(a)>0$, $f'(a)$ 存在, 计算 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$.

1.2 用拉格朗日中值定理求极限

拉格朗日 (Lagrange) 中值定理是理论证明的有力工具. 它告诉我们: 当函数

$f(x)$ 在 x_0 附近可导时, 则对附近的 x, 存在 ξ_x 使 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_x)$. 这在计算某些函数的极限时非常简便有效.

例 1.2.1　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\tan x}}{x-\tan x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\xi}=1$,　　ξ 位于 x 与 $\tan x$ 之间.

例 1.2.2　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{\sin ax-\sin bx}, a\neq b$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{ax-bx}\cdot\dfrac{ax-bx}{\sin ax-\sin bx}$

$=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\xi_1}\cdot\dfrac{1}{\cos\xi_2}=1$,　　ξ_1,ξ_2 位于 ax 与 bx 之间.

例 1.2.3　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\cos\xi=1$,　　ξ 位于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间.

例 1.2.4　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x\mathrm{e}^x)-\sin(x\mathrm{e}^{-x})}{\sin x^2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\xi\cdot x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\mathrm{e}^{\xi_1}}{x}=2$, ξ 位于 $x\mathrm{e}^x$ 与 $x\mathrm{e}^{-x}$ 之间, ξ_1 位于 x 与 $-x$ 之间.

例 1.2.5　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(1+\xi_x^2)\arctan\xi_x}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.

$$\left(x<\xi_x<x+1,\quad \frac{x^2}{1+(1+x)^2}<\frac{x^2}{1+\xi_x^2}<\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

例 1.2.6　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}, a>0,b>0,a\neq b$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2\ln a}-\mathrm{e}^{x^2\ln b}}{[\mathrm{e}^{x\ln a}-\mathrm{e}^{x\ln b}]^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\xi_1}\cdot x^2(\ln a-\ln b)}{\mathrm{e}^{2\xi_2}\cdot x^2(\ln a-\ln b)^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\xi_1}}{\mathrm{e}^{2\xi_2}}\cdot\dfrac{1}{\ln a-\ln b}=\dfrac{1}{\ln\frac{a}{b}}$,　　ξ_1 位于 $x^2\ln a$ 与 $x^2\ln b$ 之间, ξ_2 位于 $x\ln a$ 与 $x\ln b$ 之间.

例 1.2.7　计算 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}, a>1$.

解(方法一) 原式 $= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{x^x-a^x}\cdot\dfrac{x^x-a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}} = \lim\limits_{x\to a}\cos\xi_1\cdot\dfrac{x^x-a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}$

$$= \cos a^a \lim_{x\to a}\frac{x^x-a^x}{a^{a^x}(a^{x^x-a^x}-a^0)} = \frac{\cos a^a}{a^{a^a}}\lim_{x\to a}\frac{1}{a^{\xi_2}\ln a}$$

$$= \frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a},\qquad \xi_1\text{位于}a^x\text{与}x^x\text{之间}, \xi_2\text{位于}0\text{与}x^x-a^x\text{之间}.$$

(方法二) 记 $f(x)=\sin x$, $g(x)=a^x$, 由柯西 (Cauchy) 中值定理有

$$\text{原式} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}$$

$$= \frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a},\qquad \xi\text{位于 } a^x \text{ 与 } x^x \text{ 之间}.$$

习 题 1.2

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\tan x\cdot\sin x^2}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-p}[(n+1)^p-n^p]$, $p\neq 0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}$.

2. 设 $f(x)$ 在 a 处可导, $f(a)>0$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n$.

1.3 用等价无穷小代换求极限

大家知道, 若 $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$ $(x\to x_0)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$ ($g(x)$, $g_1(x)$ 在 x_0 附近不为 0), 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$. 事实上, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\dfrac{g_1(x)}{g(x)}=A$, 即等价代换不改变极限的存在性和极限值.

➤ 由拉格朗日中值定理导出的若干等价代换及其应用

先利用拉格朗日中值定理给出下述一般命题:

命题 1.3.1　设 (1) $\alpha(x),\beta(x)(\alpha\neq\beta)$ 在 x_0 的一个邻域内连续, 且

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=c;$$

(2) $f(x)$ 在 $x=c$ 的一个邻域内可导且 $f'(x)$ 在 $x=c$ 处连续, $f'(c)\neq 0$, 则

$$f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]\sim f'(c)[\alpha(x)-\beta(x)]\quad (x\to x_0).$$

证　由拉格朗日中值定理和题设条件有

$$\frac{f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)}=f'(\xi_x),\qquad \xi_x \text{ 位于 } \alpha(x) \text{ 与 } \beta(x) \text{ 之间}.$$

于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi_x)=f'(c),$$

因此有

$$f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]\sim f'(c)[\alpha(x)-\beta(x)]\ (x\to x_0).$$

根据命题 1.3.1, 可对常见的初等函数得出下列等价关系, 其中 α,β 可以是自变量, 也可以是函数 (每一个等价关系中极限过程相同). 为引用方便, 特殊情形也单独编号.

(1) $\ln\alpha-\ln\beta\sim\dfrac{1}{a}(\alpha-\beta)\ (a>0,\ \alpha\to a,\ \beta\to a,\ \alpha\neq\beta)$;

(2) $\ln\alpha-\ln\beta\sim\alpha-\beta\ (\alpha\to 1,\beta\to 1,\alpha\neq\beta)$;

(3) $\ln\alpha\sim\alpha-1\ (\alpha\to 1)$;

(4) $\sin\alpha-\sin\beta\sim\alpha-\beta\ (\alpha\to 0,\beta\to 0,\alpha\neq\beta)$;

(5) $\tan\alpha-\tan\beta\sim\alpha-\beta\ (\alpha\to 0,\beta\to 0,\alpha\neq\beta)$;

(6) $b^\alpha-b^\beta\sim\ln b(\alpha-\beta)\ (b>0,b\neq 1,\alpha\to 0,\beta\to 0,\alpha\neq\beta)$;

(7) $\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\beta\sim\alpha-\beta\ (\alpha\to 0,\beta\to 0,\alpha\neq\beta)$;

(8) $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(\alpha-\beta)\ (a>0,\alpha\to a,\beta\to a,\alpha\neq\beta)$;

(9) $\alpha^\lambda-\beta^\lambda\sim\lambda(\alpha-\beta)\ (\alpha\to 1,\beta\to 1,\alpha\neq\beta,\lambda\neq 0)$;

(10) $\alpha^\lambda-\alpha^\mu\sim(\lambda-\mu)(\alpha-1)\ (\alpha\to 1,\lambda\neq\mu)$.

下面给出一些应用例题.

例 1.3.1　求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-1}{\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

解　由等价关系 (2) 有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{n}}{\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2n}.$$

例 1.3.2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{\ln\cos x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{\ln\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\frac{1}{3}\ln\cos 3x}{\ln\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos x}$$

$$=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{\cos x-1}$$

$=1+2+3=6$ (用洛必达法则或等价代换).

例 1.3.3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\ln\cos\sqrt{x}}{3^{x^2}-2^{-x^2}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos\sqrt{x}-1)}{\ln 3^{x^2}-\ln 2^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x^2(\ln 3+\ln 2)}=-\dfrac{1}{2\ln 6}$.

例 1.3.4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(xe^{x^2})-\sin(x^2e^{-x})}{\tan(\sin 2x)-\tan(\sin x)}$.

解 利用等价关系 (4) 和 (5) 有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}-x^2e^{-x}}{\sin 2x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-xe^{-x})}{2x-x}=\lim_{x\to 0}(e^{x^2}-xe^{-x})=1.$$

例 1.3.5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^5-(1+\sin x)^5}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}$.

解 利用等价关系 (4) 和 (9) 有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{5(\tan x-\sin x)}{\tan x-\sin x}=5.$$

例 1.3.6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt[6]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$.

解 利用等价关系 (9) 和 (10) 有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(1+x\sin x-\cos x)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(\cos x-1)}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}\right)=-6.$$

➤ 加减运算下的等价代换

对乘除运算求极限, 利用等价无穷小代换简便而有效, 而对加减运算则需格外谨慎, 下面定理给出了加减运算求极限时施行等价无穷小代换的条件.

命题 1.3.2　设 α, α_1, β, β_1 均为 $x \to x_0$ 时的无穷小量, 且 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在, 但不等于 -1. 则有 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$ $(x \to x_0)$.

证　需证 $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha + \beta}\right) = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha + \beta - (\alpha_1 + \beta_1)}{\alpha + \beta} = 0$,

因为 $\dfrac{\alpha + \beta - (\alpha_1 + \beta_1)}{\alpha + \beta} = \dfrac{\alpha - \alpha_1}{\alpha + \beta} + \dfrac{\beta - \beta_1}{\alpha + \beta}$, 注意到 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} \neq -1$, 故有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha + \beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha(1 + \frac{\beta}{\alpha})} = \frac{1 - \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\alpha}}{1 + \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta}{\alpha}} = 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta - \beta_1}{\alpha + \beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta - \beta_1}{\beta\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + 1\right)} = \frac{1 - \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta_1}{\beta}}{1 + \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}} = 0.$$

注 1.3.1　命题 1.3.2 中的条件 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} \neq -1$ 可换为 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \neq -1$(当然极限首先要存在). 显然, 若无穷小量 α 与 β(或 α_1 与 β_1) 同时为正 (负), 且极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在, 则有 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

例 1.3.7　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\sin x) + \sin 2x}{\tan x - 2\arcsin 2x}$.

解　因为 $x \to 0$ 时, $\tan\ (\sin x) \sim x$, $\tan x \sim x$, $-2\arcsin 2x \sim -4x$, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\sin x)}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2} \neq -1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{-4x} = -\dfrac{1}{4} \neq -1$, 所以原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2x}{x - 4x} = -1$.

例 1.3.8　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\mathrm{e}^{2\tan x} - \mathrm{e}^{\sin x}}$.

解　因为 $x \to 0$ 时, $\sqrt{1 + \tan x} \to 1$, $\sqrt{1 - \sin x} \to 1$, 所以由等价关系 (7), (8) 和命题 1.3.2 有

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\tan x + \sin x)}{2\tan x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x + x)}{2x - x} = 1.$$

例 1.3.9　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{1 - \cos^3 x - \tan^2 x}$.

解　由等价关系 (9) 得 $1 - \cos^3 x \sim 3(1 - \cos x)$, 由命题 1.3.2 有

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{3(1 - \cos x) - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{3 \cdot \frac{1}{2}x^2 - x^2} = 3.$$

例 1.3.10 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-\cos 2x}{(\tan 2x-\sin x)(\sin 2x-x)}$.

解 由命题 1.3.2 得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x)}-1+1-\cos 2x}{(2x-x)(2x-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)+\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^2}{x^2}=3.$$

例 1.3.11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})}$.

解 利用等价关系 (2), (3) 和命题 1.3.2 得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x^2+\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{3}{2}x^2}=\frac{1}{3}.$$

习 题 1.3

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\lambda-1}{(1+x)^\mu-1}$, $\mu\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right]$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\ln\cos x}{e^{x^2}-e^{-x^2}-\sin x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)+2\sin x}{\sin(2\tan 2x)-\sin(\tan 2x)-\tan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x+\tan x}-\sqrt[3]{\cos x-\sin x}}{\ln(1+x)-\ln(1-\sin x)-\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{ax}-(1+bx)^{bx}}{(\tan 2x-x)(\sin x+x)}$, $a\neq -b$.

3. 设 $\alpha_k,\beta_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为 $x\to x_0$ 时的无穷小量, 且 $\alpha_k\sim\beta_k(x\to x_0,k=1,2,\cdots,n)$. 又设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2},\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_3},\cdots,\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ 均存在但均不等于 -1. 证明:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\sim\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\ (x\to x_0).$$

1.4 用泰勒公式求极限

泰勒 (Taylor) 公式是用多项式逼近函数的一种有效工具, 具有广泛的应用. 这

里只介绍带佩亚诺 (Peano) 余项的泰勒公式在求某些极限过程中的应用. 该公式可以表述如下:

若 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0). \tag{1.1}$$

式 (1.1) 需要的条件较少, 只需 n 阶导数在 x_0 处存在, 但由此可以推知 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内存在 $k(k<n)$ 阶导数.

例 1.4.1 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^2 \cdot \tan^2 x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

例 1.4.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.

解(方法一) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} n\left[e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} ne^{\xi}\left[1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} ne^{\xi}\left[1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} ne^{\xi}\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\xi}}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{e}{2}.$$

其中 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \xi < 1$, $n\to\infty$ 时, $\xi \to 1$.

(方法二) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} n\left[e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[e - e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[e - e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right]$$