文登教育
Wendeng Education

陈文灯◆主编

高等数学辅导

·同济六版·

（上下册合订本）

- 集中概括概念、定理与公式
- 归纳典型题型及解题技巧
- 附同济六版总习题解析

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育

Wendeng Education

陈文灯◆主编

高等数学辅导

• 同济六版 •

（上下册合订本）

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导／陈文灯主编.—北京：北京理工大学出版社，2011.5
（文登教育）
ISBN 978-7-5640-4427-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 065256 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京时代华都印刷有限公司
开　　本／787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张／25.75
字　　数／455 千字
版　　次／2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷　责任校对／周瑞红
定　　价／28.00 元　责任印制／边心超

前　言

高等数学是我国高等院校理工科专业必修的一门重要的理论基础课程，它不仅是学习后续课程及在科学领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生其他能力的培养也起着重要的作用。如何帮助学生更好地理解和掌握高等数学的基础知识，提高学生综合运用所学知识解决实际问题的能力，及如何有效地备考，成为各高校普遍关注的问题。

本书根据高等学校数学教学大纲及同济大学应用数学系主编的《高等数学(第六版)》编写而成。本书的编写采用了目前最为独特新颖的体例设计，吸收了“以题型为纲”的教参编写思想，归纳了这门课程所涉及的几乎所有的题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并独立设计了许多新颖例题。本书另外一个凸显的编写特点是其配合相关考试来写，适合希望能继续深造的学生作为备考参考书。

本书包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。

各章节具体内容安排如下。

一、重要概念、定理及公式

针对每一章节中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳，从而帮助读者站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界，对于参加课程结业考试和期望能在考研入学考试中取得好成绩的学生来讲，这些都是必不可少的基本功。

二、典型题型的解题方法及技巧

对于一门课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。本书尽可能全面地归纳了课程所涉及的题型，并逐一进行分析、给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要的经典例题的评注，帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

三、附《高等数学》同济六版总习题详细答案

从本书的整体结构编排出发，本书给出了《高等数学（第六版）》中的总习题答案详解。

在成书过程中，我们参考了众多相关的著作和教材，在此谨向有关作者表示衷心地感谢！

由于时间仓促和水平有限，书中难免存在不足之处，欢迎广大读者、专家和同行批评指正。

陈文灯

2011 年 5 月

目　录

第二章 导数与微分

第三章 微分中值定理与导数的应用

第一章　函数与极限

§1.1　重要概念、定理及公式

一、函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若 $\forall x \in D$，变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的实数值 $f(x)$ 和它对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为函数的定义域.

全体函数值的集合

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数概念的两个要素：

(1) 定义域： 自变量 x 的取值范围(若函数是用解析式表示的，则定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合).

(2) 对应法则： 给定 x 值，求 y 值的方法.

注意： 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数，否则表示两个不同的函数.

【例 1.1】 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组.

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$；　(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$；

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$；　(4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$.

【解】 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \neq 0\}$；$y = 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \geqslant 0\}$；$y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x \neq 0\}$；且对应法则也相同，故该组的两个函

数等价.

(4) 要使 $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义,则要求 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$,即定义域为 $\{x\geqslant 3\}$;要使 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 有意义,则要求 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}\geqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$,即定义域为 $\{x\geqslant 3$ 或 $x<2\}$,故两个函数不等价.

由函数概念的两要素,我们还容易看出,函数的表示法只与定义域和对应法则有关,而与用什么字母表示变量无关,这被称为函数表示法的"无关特性".据此,可得出由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

【例 1.2】 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$,其中 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$,求 $f(x)$.

【解】 利用函数表示法的无关特性,令 $t=\dfrac{x-1}{x}$,即 $x=\dfrac{1}{1-t}$,代入原方程得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},\text{即}\quad f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x} \tag{1}$$

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$,即 $x=\dfrac{1}{1-u}$,代入上式,得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},$$

即

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x} \tag{2}$$

将原方程与方程(1)、(2) 联立,解此方程组,得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

二、函数的几何特性

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域数集 D 关于原点对称,若 $\forall x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或任意多个偶) 函数之积为偶函数;奇数个奇函数之积为奇函数.

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|$，$\cos x$，x^{2n}（n 为正整数），e^{x^2}，…；

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\frac{1}{x}$，x^{2n+1}，$\arcsin x$，$\arctan x$，….

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对 $\forall x \in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质：

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 T_1，T_2（$T_1 \neq T_2$）为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见的周期函数：$\sin x$，$\cos x$，其周期 $T=2\pi$；$\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$，其周期 $T=\pi$.

【例 1.3】 设对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，则 $f(x)$ 是周期为______的周期函数.

【解】

$$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]\left(\text{由题设 } f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)=f(x),$$

即　$f(1+x)=f(x)$，故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在 $M>0$，使得 $\forall x \in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界，数 M 为 $f(x)$ 的一个界；若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注意： 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数：

$|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1, x \in (-\infty, +\infty)$
$|\arcsin x| \leqslant \pi/2$；$|\arccos x| \leqslant \pi, x \in [-1,1]$
$|\arctan x| < \pi/2$；$|\operatorname{arccot} x| \leqslant \pi, x \in (-\infty, +\infty)$

【解题提示】 将函数取绝对值，然后用不等式放缩法，或借助于导数利用求最大(小)值法判断函数是否有界.(导数将在第二章介绍)

【例 1.4】函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为 (　　)

(A) 有上界无下界　　(B) 有下界无上界

(C) 有界，且 $-\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$　　(D) 有界，且 $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$

【解】 $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{|x|}{2|x|} = \dfrac{1}{2}$(因为 $1+x^2 \geqslant 2|x|$)，

故 $-\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$，应该选(C).

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在集合 X 上有定义，若对 $\forall x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

【例 1.5】设 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有定义，$x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证：

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减少，则 $f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2)$；

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加，则 $f(x_1+x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

【证】 (1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$，且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_1 f(x_2) < x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} < \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1+x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1+x_2) < x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

(2) 证略.

三、分段函数

用解析法表示的函数，若在其定义域 D 的各个不相交的子集上，分别用不同的式子表示，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数：

(1) 符号函数　$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$

(2) 狄利克莱(Dirichlet) 函数　$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$

注意：一般地，分段函数不是初等函数.

【例 1.6】 将 $f(x) = |2x - 3| - 1$ 表示成分段函数.

【解】 根据绝对值的定义

当 $2x - 3 \geqslant 0$ 时，$|2x - 3| = 2x - 3$；

当 $2x - 3 < 0$ 时，$|2x - 3| = 3 - 2x$

所以，$y = f(x) = \begin{cases} 2x - 4, x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ 2 - 2x, x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

四、反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，其值域为 Z，若对 $\forall y \in Z$，有唯一确定的 $x \in D$ 满足 $y = f(x)$，则称 x 是定义在 Z 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x = f^{-1}(y)[\text{或 } x = \varphi(y)].$$

并称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数，而 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x), x \in Z$.

注意：① $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像重合；而 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

② $y = f(x)$ 的定义域是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数.

④ $y = f(f^{-1}(y)), x = f^{-1}(f(x))$.

五、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数称为基本初等函数.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \Phi$，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数. x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所得到的函数统称为初等函数.

若 $f(x)$、$g(x)$ 都是初等函数，则 $f(x)^{g(x)}$ 称为幂指函数. 幂指函数也可以通过对数恒等式写成如下形式 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

【例 1.7】将函数 $y = \arcsin^2 \dfrac{2x}{1+x^2}$ 分解成由基本初等函数复合及四则运算而成的形式.

【解】 令 $u = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $y = u^2$，

令 $v = \dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $u = \arcsin v$.

于是函数由下列各式构成：$y = u^2, u = \arcsin v, v = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

【例 1.8】已知 $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = x+1$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = x+1$，因 $\varphi(x) \geqslant 0$，故

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+1)}.$$

由 $\ln(x+1) \geqslant 0$，可知 $x+1 \geqslant 1$，所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

六、极限与连续基本概念

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

2. 函数极限

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3. 左右极限

左极限：$f_-(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$，

当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限：$f_+(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$，

当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4. 无穷小量：以 0 为极限的变量称为无穷小量

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x)| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| < \varepsilon$.