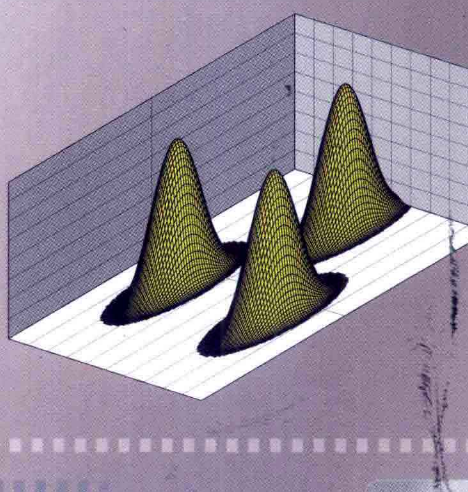
无网格方法

刘欣◎著



科学出版社

无网格方法

刘 欣 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书对无网格方法的发展进行了比较全面详细的综述，并归纳论述了无网格方法中常用的几种散点插值技术方法(移动最小二乘法、核积分法、径向基函数方法等)，以及无网格方法的几种主要实现方式(Galerkin 积分法和配点法等)的原理，这些都是无网格方法的基础. 然后，对几种主流的无网格方法进行了研究表述. 这些内容是作者十多年来研究成果的一部分，也是全书的主要内容，包括“hp 云法”、单位分解法、有限点法、径向基函数等，涉及固体力学、流体力学、油藏模拟、期权定价等方程的求解，以及对高梯度问题的自适应分析计算求解. 最后一章论述了近年来流体-结构相互作用的无网格方法研究的最新进展.

本书适合从事计算力学和数值计算等领域的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

无网格方法/刘欣著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030665-4

Ⅰ. ①无… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①计算力学 Ⅳ. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 052469 号

责任编辑：鄢德平 [illegible] 刘信力 / 责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2011 年 5 月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—2 000 字数：299 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序 言

回顾 20 世纪 90 年代初期计算力学的研究状况, 有限元研究这座 “大金矿” 经过近 50 年的开掘, 已近枯竭, 当时的计算力学研究状况以应用为主, 国内以中国科学院冯康院士为代表的研究团队提出了哈密顿体系、辛几何、辛算法, 大连理工大学的钟万勰院士正在进行计算力学与最优控制学科交叉、应用力学的哈密顿体系、辛几何与辛算法的研究, 这些都是我国学者在数值分析与计算领域的原创成果. 20 世纪 90 年代中期无网格方法研究的出现, 无疑给计算力学研究注入了 “兴奋剂”. 国际无网格方法研究热潮给计算力学研究者带来福音, 让研究者们找到了研究挖掘的金矿, 十多年来发表的相关论文 (包括会议、期刊) 达数千篇之多!

经过十多年的发展, 丰富多彩的无网格方法构成了一道道亮丽的风景线, 颇具美感. 无单元 Galerkin 法 (EFGM)“质朴、大气、亲民”, 拥有众多的 “粉丝”; 再生核粒子方法 (RKPM)“时尚、强势”, 论文发表创 “粒子方法类” 之最; hp 云法如昆曲戏剧, 精致、华贵, 又如天上漂浮的云团, 绚丽多彩, 但似乎有些 “小众审美”; 单位分解有限元方法, 归于 “无网格” 类有些尴尬, 但其确有特色, 既替有限元法增色, 又为无网格法壮威, 谁也不得罪; 径向基函数 (RBF) 应是计算数学研究者感兴趣的题材, “形参” 问题数学上有待解释突破, 但被计算力学研究者赶上 “轿”, 计算力学相关期刊因此得益, 暂时不用担心稿源不足; 光滑粒子流体力学方法 (SPH) 虽然精度不高, 但实用, 一开始上阵就 “玩” 天体撞击, 这份 “胆识” 和 “豪气”, 没 “法” 能比?! 假想一下, 当时如果 SPH 推出先拿 “小鸡” 试刀 (注: 意为求解力学常规问题, 这里纯属调皮比喻, 绝不含轻视之意!), 估计它表现不会好. 由此, 作者似乎顿悟, 以面向解决物理问题推出的计算方法生命力更强、层次更高. 有限元方法的历史发展是最好的 “注解”, 源于航空结构计算, 扩展到科学、工程甚至社会科学的许多领域, 长成 “参天大树”, 巍巍壮观!

1994 年, 当时正值我博士论文选题. 由于喜欢小波的多分辨率、多尺度的精细特点, 极想在博士论文选题时进行小波方面的计算研究 *. 当时获知美国计算力学著名华人学者 W. K. Liu 在日本东京召开的世界计算力学大会上发表了一篇有关采用 “小波”(wavelet) 研究计算力学问题的论文 (那时我还没有 “无网格” 的概念),

---

* 20 世纪 90 年代初期国内学术界对神经网络、小波等趋之若鹜, 记得当年国家自然科学基金委员会有关人士来学校作有关 “如何申请基金” 的报告, 谈及有一年国家自然科学基金申请中挂 “小波” 关键词就达 100 多份, 主要集中在电子、控制等学科, 大有泛滥之势. 当时, 作者受此学术热点的影响, 希望从事相关的计算力学研究.

非常感兴趣. 1994 年, 国内 email 尚未开通, 获取学术资料远不及现在方便. 我所在的城市南京不能找到 W. K. Liu 的那篇论文. 打听到清华图书馆有世界计算力学大会文集, 便托朋友复印这篇论文邮寄到南京. 当我收到这篇仅两页篇幅的论文摘要时有些失望, 论文太短了, 翻来覆去看了许多遍, 不甚明了.

不久之后, 终于从 *IJNME* 和 *CMAME* 等学术期刊上获得了相关的论文全文, 仔细研读后方知W. K. Liu当时研究的主题不是"小波"而 是 "无网格"(meshless). 继而接触到 Belytschko 更早些的那篇著名的 EFGM 的论文. 于是弃 "小波" 开始了 "无网格" 的研究. 那时国际上最新的研究传到国内至少晚一年以上, 由于初次接触这种新方法, 研究中又缺少同行间的讨论, 进展缓慢. 运用 RKPM 进行一维杆的自适应动力响应计算研究花费了近 3 个月的时间, 且没达到预定的目标. 在运用 RKPM 进行二维问题的计算研究时, 由于我当时疑惑 RKPM 中出现的 "ΔV" 项在常规力学计算中力学意义不明显 (注: SPH 中 ΔV 可以表述为粒子的质量除以密度), 而致使我停止了 RKPM 的研究. 实际上现在看起来, "ΔV" 似乎不是障碍. 1995 年以后, "无网格" 研究的第一波高潮开始出现, 欧美等地计算力学方面的著名学者纷纷加入, J. T. Oden 提出 "hp 云法", Bubaska 提出单位分解方法 (partion of unity method, PUM), 以及 Onate 提出有限点方法 (finite point method), 甚至 Zienkiewicz 当时与 Oden 合作也加入了 "无网格" 的相关研究. 当时我已感到 "无网格方法" 会成为未来 10 年计算力学领域的热点. "单位分解" 的概念强烈地吸引着我, 喜欢 Oden 论文数学表述及其方法的美感, 我最终将博士论文有关 "无网格" 的研究主要锁定 "hp 云法" 和 "单位分解方法".

没想到与 "无网格" 结缘一晃就是十多年. 博士、博士后的研究, 国外几年研究员 (research fellow) 的生涯均贡献给了它. 十余年追随 "无网格" 的发展, 感受其发展的脉搏, 也曾想 "搏" 出些特色, 无奈创新能力有限, 更加上 "这山望见那山高", 爬着爬着, 掉队了, 于是乎改爬另外的山头*, "剑走偏锋" 了! 不知这样算不算老师曾说过的: "中行独复, 以从道也"? 不过隐然觉得老师讲的 "此道非彼道", 算我牵强了. "山头" 虽然换了, 但我依然关注原 "山头" 的风光, 不过多了一份欣赏和从容, 这实际是我一直追求的研究境界. 各位计算力学的同仁不要以为我真的离开 "无网格" 的研究了. 我仍在继续 "琢磨", 不过研究应用的背景和对象换成金融工程中 PDEs, 应一句金融资本市场的行话, 只是 "标的"**换了.

本书的内容取自作者十多年来的博士、博士后以及在新加坡访学的研究成果. 需要说明的是在清华大学近两年的博士后研究, 应用无网格法求解 "油藏数模" 以及 "期权定价" 等对流–扩散问题, 可惜当时博士后的研究成果由于出国 (但主要还是自己 "疏懒") 没有及时提炼成论文公开发表, 本书将其列为一章, 也算些许安慰

* 作者在这里隐喻自己专业研究方向的改变.

** "标的"(underlying): 在金融工程中, 指金融衍生产品的基础产品.

吧!

一种新的数值方法的生命力如何？关键取决其能否解其他方法不能解或解得不成功的问题！无网格在这方面确实显示了其竞争力，但效率和精度仍有待提高. 单位分解的多级算法、多尺度算法等将导致更高精度的无网格方法涌现，我们拭目以待. 记得我刚上大学时，一位航空界前辈就告诫我们所学专业未来的奋斗目标就是"为减轻飞机的一克重量而努力"！此话音犹在耳. 数值计算研究人员何尝不是为减少一个百分点的误差而努力！人类已经进入了精细化时代，高效精细化的算法永远是数值计算研究者的追求. 本人虽离开了计算力学研究领域，但目前我所研究的对象就其计算的复杂性以及对算法的要求而言丝毫不逊色. 前些日子与朋友谈及近年来华尔街的对冲基金重金聘请物理学家研究和应用"小波"在金融资本市场寻找套利机会，为"些许"的利润动用最前沿的科学计算成果，这便是时代对我们的要求和挑战，永无止境！虽说直接追求"利润"听起来不及"为减轻一克飞机重量"显得"有境界"，而且似乎带有些"铜臭"味，但其中涉及的科学含金量却毫无二致！

十多年来，在无网格方法研究过程中，得到了许多人的帮助，在此致以衷心的感谢！

感谢朱德懋教授、陈国平教授、胡海岩院士、韩景龙教授等多年来对本书作者的关心和重要帮助.

感谢陆明万教授、张雄教授等曾给予的宝贵帮助.

感谢新加坡刘桂荣 (G. R. Liu) 教授、韩旭教授，以及 S. C. Fan, C. K. Lee, K. Tai 诸位教授在学术上曾给予的建议和帮助！

特别感谢朱位秋院士对我的关心和帮助. 此外还要感谢黄志龙教授、郑耀教授、张永强教授等曾给予的帮助！

感谢我妻子十多年来对我工作的理解与支持. 本书的文字、公式录入与绘图凝聚着她的辛勤劳动.

最后感谢国家自然科学基金 (10572128) 资助.

刘　欣

2010 年冬完稿于杭州西湖老河山下

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 前 言

有限元方法是 20 世纪数值分析的巨大成果 [1-5], 在科学技术的各个领域都起着十分重要的作用. 但是人们没有停止过寻找新的更有效的数值分析方法的努力 [6,7], 这主要是由于现有的方法不可能是完美无缺的, 不少实际问题在采用传统数值方法 (有限元法、边界元法) 处理时遇到了麻烦. 例如:

• 高速撞击往往引起结构的几何畸变 (如侵彻、穿透), 采用传统有网格的数值方法, 无法避免网格畸变问题, 给分析计算带来困难;

• 工业材料成型过程中, 采用网格模拟材料流动变形带来的不便;

• 动态裂纹扩展, 以及 "激波" 现象的数值模拟, 采用网格方法必须实施网格的重新生成, 给问题的处理造成困难;

• 在处理不连续的界面 (如岩石力学等问题) 时, 网格类方法由于模型网格的划分可能与不连续界面不一致而导致计算的不便;

• 流体–结构相互作用、相变问题的分析中界面的追踪模拟;

• 求解某些特殊问题 (如奇异性问题、高振荡问题等), 传统的数值方法计算精度和收敛性差, 且实施不方便;

• 网格类的自适应算法与技术的实现比较困难, 而无网格的自适应实现相比之下要简单便利;

• 高维 (3 维以上) 偏微分方程的数值求解, 传统的网格方法 (如有限元法) 几乎是不可能构造离散模型的, 而某些无网格方法具有这方面求解的潜力.

这些问题的解决需要更加有效的数值计算方法. 近十多年来发展势头强劲的无网格 (meshless or meshfree) 数值方法[9-260] 以其特有的优点适合处理这些问题, 受到国际科学与工程方面的数值分析计算学者高度重视, 具有重要的研究价值和应用前景.

1.2 无网格方法研究进展

将无网格方法按是否需要进行积分计算分成两大类, 即不需积分的配点型和积分型. 下面从这两大类方法出发介绍各种无网格方法的研究进展.

1.2.1 配点型

◇ *光滑粒子流体动力学方法*

追溯起来, 无网格数值方法的研究有近 40 年的历史. 20 世纪 70 年代, Lucy[9] 提出了一种新的数值方法, 他称之为 "光滑粒子流体动力学方法" (smoothed particle hydrodynamics, SPH)[9−23]. SPH 是一种纯 Lagrange 方法, 不需网格. 此方法在天体物理领域得到了成功应用. 80 年代, Monaghan 等发展了 SPH 方法[10,11], 用来模拟流场中的激波强间断现象. 最近几年来, SPH 方法被应用于高速碰撞等材料动载响应的数值模拟、水下爆炸仿真模拟等领域[12−22]. G. R. Liu 和 M. B. Liu 近年著有关于 SPH 方法的英文专著[23]. 我国学者近年来也开展了 SPH 方法的应用研究[199−202].

SPH 方法的精度较差, 为提高精度, 需要大量的节点. 但这种方法在处理高速撞击等方面显示出优越性, 是至今为数不多的进入实际应用 (有商业软件) 的无网格方法.

◇ *有限点方法*

Onate 和 Idelsohn 等[61,62] 提出了有限点方法 (the finite point method, FPM). FPM 采用了移动最小二乘 (MLS) 生成形函数, 离散代数方程的生成采用配点方式, 是一种不需背景网格的真正的无网格方法, 主要用于流体力学、空气动力学领域[61,62,64,65,217]. 本书第 6 章是关于有限点方法研究的, 作者进行了对流–扩散方程、Burgers 方程、油藏数模和期权定价方程的有限点法计算研究. 特别探讨了采用瞬态时间发展型方程的高阶时间差分格式替代有限点法的数值稳定性处理的有效性研究.

FPM 求解问题一般需进行数值稳定性加项处理, 固体力学问题的有限点法求解不太成功[63].

◇ Liszka *云法*

Liszka 等[96] 提出了 "Liszka 云法", 这种方法不同于 Oden 的 hp 云法之处是它采用的是配点形式, 不需背景网格作为积分域, 是一种纯无网格方法. 早在 20 世纪 70 年代末, Liszka 就提出了一种适合处理不规则节点分布的广义差分方法[97], 其主要思想是利用二阶 Taylor 展开级数表述场量近似.

◇ *径向基函数方法*

20 世纪 60 年代由 Hardy 提出的 MQ(multiquadric) 方法[153] 实际上是一种可用于求解边值问题的无网格配点方法. MQ 方法采用径向基函数来逼近函数表达, Hardy 最早将其用于散点曲面插值拟合, 并取得了非常好的插值效果. 20 世纪 90

年代初, Kansa 将 MQ 方法成功用于求解流体方程[154,155]. 由于基函数的变量只由一个 "距离" 含义的径向量表示, 简便直观, 有望在高维 (3 维以上) 问题的数值分析中独具优势. 传统的有限元方法 (FEM) 必须对几何体作拓扑网格分析, 即便 FEM 经过几十年的发展, 但 3 维网格的划分仍存在 "3 维网格烦恼", 对 3 维以上的抽象空间依赖于网格的方法实际上是无法面对的. 由于基函数的全域性质, MQ 方法形成的系数矩阵是非带状的满阵, 这显然不便于处理规模较大的问题.

20 世纪 90 年代以来, 计算数学研究者提出了具有紧支撑的径向基函数 (radial pase functions, RBFS)[175], 以改进上面提出的问题. 新加坡学者 G. R. Liu 提出径向基点插方法 (RPIM), 有效地实现了径向基函数方法的局部化. RPIM 属积分型无网格方法, 在后面还要较详细介绍. 径向基点插配点方法 (RPCM)[177−181] 是 RPIM 的配点版. RPCM 已由本书作者等用于边值问题的求解[177−181,252], G. R. Liu 等进行了 RPCM 的自适应分析计算以及数值稳定性的改进研究[128]. 本书第 7 章开展了径向基点插配点法 (RPCM) 的研究, 涉及 RPCM 的 Hermite 插值、非线性 Poisson 方程以及 FPK 方程求解的计算研究等内容.

新加坡学者 C. Shu 等提出了基于径向基函数的微积分法 (RBF-based differential quadrature method, RBF-DQ), 并进行了流体力学方程求解的计算研究[170,171]. RBF-DQ 中场量导数直接由 DQ 方法近似, 函数则由 RBF 来近似, 然后直接代入偏微分方程中求解. 这种方法有较高的计算精度.

此外, C. K. Lee 等也探索过局部径向基函数法 (local RBFs) 的研究[169].

其他配点型方法还有有限云法 (finite cloud method, FCM)[91,92], 它是再生核粒子方法 (RKPM) 的配点版.

1.2.2 积分型

◇ *扩散元方法*

20 世纪 90 年代初, Nayroles 等[24] 提出了 "扩散元方法" (diffuse element method, DEM), Nayroles 使用了移动最小二乘原理 (MLSM), 提供了近似解的 C^1 连续, 而通常有限元方法只是 C^0 连续. 从计算力学的角度看, 此法已具无网格特点, 但 Nayroles 没有提到这个高度, 他省去了形函数导数表达式中的部分项. Modaressi 等将 DEM 用于瞬态耦合分析[25]. 后来 Krongauz 和 Belytschko 提出了 Petrov-Galerkin(PG) DEM[26], 计算结果可以通过分片试验, 取得更好的计算精度.

◇ *无单元 Galerkin 方法*

1994 年, Belytschko 等提出了一种基于移动最小二乘 (moving least squares, MLS)[27] 的新的数值方法 "无单元 Galerkin 法" (element-free Galerkin method, EFGM)[28]. 这种方法采用 MLS 进行场量的近似表达, 由于一般采用非奇异权函数,

因此场量近似具有不过点的拟合性质, Dirichlet 边界条件的处理采用了 Lagrange 乘子法[28]、修改的 Lagrange 乘子法[29], 以及与有限元法的耦合[42−45] 等方式. Kaljević 等[41] 利用了奇异权函数进行场量近似, 使场量近似具有过点的插值性质, 便于 Dirichlet 边界条件的处理, 这种处理的数值计算精度和效率均有改善. 变分离散后的域积分需利用 “背景网格”(background cell). Belytschko 等利用 EFGM 进行了固体力学等问题的计算分析[28−60], 其中最成功的应用是对动态裂纹扩展的数值模拟[30−39], 克服了有限元方法模拟裂纹扩展需不断进行网格重划分的缺点, 在分析中可连续对裂纹的扩展进行模拟. 经过十余年的发展, 该方法已广泛用于不仅限于力学的工程计算的各个领域.

EFGM 计算精度较高, 并能获得连续型的场量函数的导数级量. 连续模拟裂纹的扩展是 EFGM 最成功的应用. EFGM 也是所有无网格方法中研究最多、应用最广的方法. 缺点是计算相对费时, 且对本质边界条件的处理不便利.

◇　*再生核粒子方法*

1994 年, W. K. Liu 等利用积分再生核思想提出了 “再生核粒子方法”(reproducing kernel particle method, RKPM)[68,69], 并利用了 “小波” 分析的伸缩尺度平移、多分辨率等特点, 提出了 “多尺度再生核粒子方法”(multiscale reproducing kernel particle method) 等[70−72], 实现了该方法的自适应分析[70]. 这种方法引入了柔性可调窗函数进行积分变换, 适合对局部进行细致的数值分析. RKPM 已被用于固体、流体、空气动力学、热传导对流–扩散等领域问题的数值计算分析[68−90]. 文献 [72] 提出了广义多尺度再生核质点方法, 分析了解析函数再生概念以及 Hermite 再生概念. 文献 [76,77] 进行了 RKPM 和移动最小二乘结合的研究, 从 Fourier 积分变换和泛函空间误差分析、收敛性角度, 给出了严格的数学证明.

Chen 等[73,79] 用 RKPM 方法分析了橡胶材料的大变形问题, 橡胶块体的拉伸与压缩、橡胶块的剪切、无限长橡胶圆筒的内压问题等, 其数值结果表明 RKPM 法比有限元更适合计算大变形问题, 在处理不可压缩材料的几何大变形问题时不会出现体积闭锁现象, 同时 RKPM 方法也能有效地解决材料的过渡扭曲变形问题.

最近几年, RKPM 被用于细观力学问题、生物力学问题和流体结构相互作用等问题的研究[83,84,88,89].

RKPM 在 SPH 方法基础上, 引入了校正函数, 通过多项式再生使方法的计算精度大为提高. 而利用小波思想, 又得到了柔性可调积分核 (窗函数) 和多分辨率性质, 作者避开了像 Wavelet 方法常采用的 Daubechies 小波而带来计算上的不便利, 灵活地运用了小波思想. 但这种方法中 Δx_i(或 ΔV_i) 的确定是一个不可回避的问题, 虽然可以采用计算机图形学的一些知识确定, 但并不十分方便.

◇ hp 云法

Oden 和 Duarte 提出了 “hp 云法”(hp-clouds)[93−95], 该方法利用移动最小二乘建立单位分解函数, 实际计算中采用了 MLS 最简单的常数基得到的形函数, 即 Sheperd 函数, 作为单位分解函数. 然后在单位分解的框架内, 建立场量函数的近似表达. 这种方法适合进行 hp 型自适应分析[93], 因此取名 “hp 云法”. Oden 等[94] 对其进行了严格的数学分析. 文献 [95] 讨论了如何在其数值计算中加入解析信息进行增强, 并对断裂问题进行了分析. 由这种解析增强形式, 诸如应力强度因子等重要物理量可以直接求解得到, 而不需像有限元方法要进行 J 积分间接得到而影响精度.

第 4 章对 hp 云法进行了研究, 第 8.3 节进行了 hp 云法的 h 型、p 型和 hp 型的自适应计算研究[251].

◇ 无网格局部 Petrov-Galerkin 法

1998 年, Atluri 和 Zhu 在局部边界积分方程 (LIBE) 的基础上, 提出了无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (meshfree local Petrov-Galerkin method, MLPGM)[102−104], MLPGM 不只是一种方法, 而且是一个概念和框架, 在这个框架下, 可以使用不同的插值函数和试函数[104]. 该法的基本思想是在局部小域内满足平衡方程的 Galerkin 积分形式, 加权试函数的选取与近似场量函数的形函数不同. 此方法不同于 EFGM 和 DEM, 它采用了局部对称积分形式, 使数值积分不在全域而只在子域上进行, 是一种真正的无网格法, 适用于固体和流体力学的方程求解, 数值精度和稳定性都不错. 然而该法在复杂边界的情况下, 由于局部积分域可能与其相交构成复杂形状的积分域, 不便进行数值积分.

◇ 单位分解有限元方法

1996 年, Melenk 和 Babuska 提出了单位分解有限元方法 (the partition of unity finite element method, PUFEM)[107] 和单位分解方法 (the partition of unity method, PUM)[108], 也称为广义有限元 (generalized finite element method, GFEM)[117], 并进行了严格的数学证明和论述.

20 世纪 90 年代初期, 美籍华人学者石根华 (Genhua Shi) 基于单位分解从流形的概念提出了 “数值流形方法”(numerical manifold method, NMM), 应用于岩石力学领域[106]. 在 NMM 中, 单位分解函数也是由传统的有限元法的形函数确定的, 有点类似于近十年发展起来的单位分解有限元法, 不过 NMM 针对的是含大量不连续界面和裂纹的岩石力学问题. 此外, NMM 与 PUFEM 不同之处在于 NMM 通常要推出显式单元刚度矩阵[106], 而 PUFEM 通常采用数值积分得到模型的刚度矩阵, 如果不考虑这点区别, 两种方法的理论基础实质上没有什么不同. 但 NMM 的

提出要早好些年.

Oden, Duarte, Zienkiewicz 等提出了 “基于云的新 FEM”(new clouds-basd FEM)[118], 这种方法借助有限元网格, 将其形函数作为单位分解函数, 边界条件的处理同有限元方法一样便利. 虽然网格的使用损坏了 “无网格” 的特性, 但由此带来了不少新的特点, 实际上它与单位分解有限元法的思想是相同的.

单位分解有限元主要被用于传统有限元无法或难以处理的问题, 这些问题的解具有高度振荡性或高梯度, 比如奇异问题、层状材料的弹性力学问题、材料硬化问题、高维的 Helmholtz 问题[107−121]. Duarte 等将其用于 3 维裂纹扩展[119] 和增强型 GFEM 的研究[120,121]. 本书作者及其合作者进行了裂纹问题[115]、奇异问题[113]、材料界面问题[114] 等 PUFEM 计算研究, 尤其进行了 p 型收敛和解析信息加入提高精度的研究. 这些研究大都收集在第 5 章.

◇ *扩展有限元方法*

继提出 EFGM 后, 1999 年, Belytschko 研究团队提出了扩展有限元方法 (extended finite element method, XFEM)[144]. 扩展有限元保留了常规有限元的所有优点, 由于利用了单位分解概念, 可以在材料或几何不连续处在场量函数近似构成时做特殊处理, 使网格的划分可以不考虑结构内部的几何或物理不连续界面, 模拟裂纹扩展时也不必进行网格的重构. 实际上, 如果归类, XFEM 也是一种单位分解方法. 自 2000 年被正式提出以来[145], XFEM 主要应用于裂纹扩展模拟、复杂流体结构相互作用、相变等问题的计算研究[144−152].

◇ *自然元法*

自然元法 (natural element method, NEM)[122−126]、粒子有限元法 (particle finite element method, PFEM)[99−101] 是另外两种借助 Voronoi 多边形网格 (或 Delaunay 三角形) 的广义无网格方法, 其中尤其是自然元法的近似表达比较有特色, 不同于常见的构成近似函数的方式, NEM 是根据 Voronoi 多边形分割面积比例计算来定义形函数的[122]. 它们被用于几何大变形[125]、流体–结构相互作用[99,100] 等问题的数值计算. 它们能很好地处理网格畸变而不必进行网格的重构.

◇ *径向基点插法*

传统的径向基函数 (RBF) 是一种无网格方法, 以其求解精度高以及对散点模型适应性强等优点吸引了许多数值分析计算研究者的兴趣[153−158]. 然而, 它是一种全域方法, 离散形成的代数方程是满阵, 不便于求解较大规模的问题. 目前有两种方式对其进行改进, 一种是采用紧支径向基函数[174,175]; 一种是采用径向基函数局部插值 [164−167,169−171]. 这两种方式都能保证所形成的方程具带宽特点而非满

阵. 但紧支撑径向基法只是在计算时间和精度上取得了平衡[214], 即牺牲了求解的精度换取了带宽矩阵的优点.

G. R. Liu 等提出了多项式点插法[159−163] (point interpolation method, PIM) 和径向基点插法[164−167](radial point interpolation method, RPIM). 多项式点插方法的数值稳定性过于依赖节点的分布, 文献 [160] 采取了一些有效的措施. 径向基点插法数值稳定性远超多项式点插法, 并且解决了传统径向基函数是一种全域方法的缺点, 具有局部性, 可以求解较大的问题. RPIM 已被用于求解各类问题[159−167].

径向基点插法克服了传统的径向基函数法出现的满阵缺点, 保证了形成的离散代数模型是带状矩阵, 这一点对偏微分方程的数值求解非常重要, 尤其是实际复杂工程问题的求解. 但是该法的 h 收敛性严重依赖于径向基函数中的形参选取, 虽然文献 [162] 对形参的选取进行了研究, 然而至今尚缺数学上严谨的解释.

◇ 小波 Galerkin 法

20 世纪 90 年代提出的小波 Galerkin 法 (wavelet-Galerkin method)[197,198] 也是一种无网格方法. 这种方法是利用 “小波” 级数作为函数近似表达, 通过 Galerkin 变分或配点方式对偏微分方程进行数值离散. 这种方法在处理局部化现象 (如塑性变形局部化) 和自适应分析方面具有独特的优势.

1.3 国内无网格方法研究进展

国内的无网格方法研究高峰在 2000 年以后出现, 已发表的与无网格方法相关的论文数目达数百篇之多, 其中综述论文可能都有十多篇. 从数量看, 我国开展无网格方法的研究堪称热点. 2000 年以前, 只有少数无网格方法的研究, 本书作者 1997 年的两篇探索性的论文[246,247] 以及 1998 年的博士论文[248] 应算较早的以无网格方法为主题的研究, 当时不曾想到 10 年后国内无网格方法的研究会有如此 “盛况”.

20 世纪 90 年代后期, 陆明万、张雄提出了紧支撑加权残量法建立无网格方法框架, 并在此基础上建立了最小二乘配点无网格方法[189,203,207,209], 吸收了 Galerkin 法和配点法各自的优点, 效率高、精度高, 并且解是稳定的; 建立了基于子域法的无网格方法[188], 控制方程的残差在每个子域里予以消除, 避免使用背景网格, 它和最小二乘配点无网格方法一样, 是一种真正的无网格法; 提出了 Hermite 型无网格边界格式和含域外节点的无网格法[191,210], 在计算量基本不变的条件下, 大幅度地提高了无网格法解的精度. 他们已将无网格方法成功地应用于求解弹塑性问题[207]、波动传播问题[211,216,218]、多孔充液生物材料的力–电–化学耦合问题、对流–扩散方程[212]、期权定价[212]、油藏数值模拟[212]、奇异性[213] 等问题, 充分显示了无网格