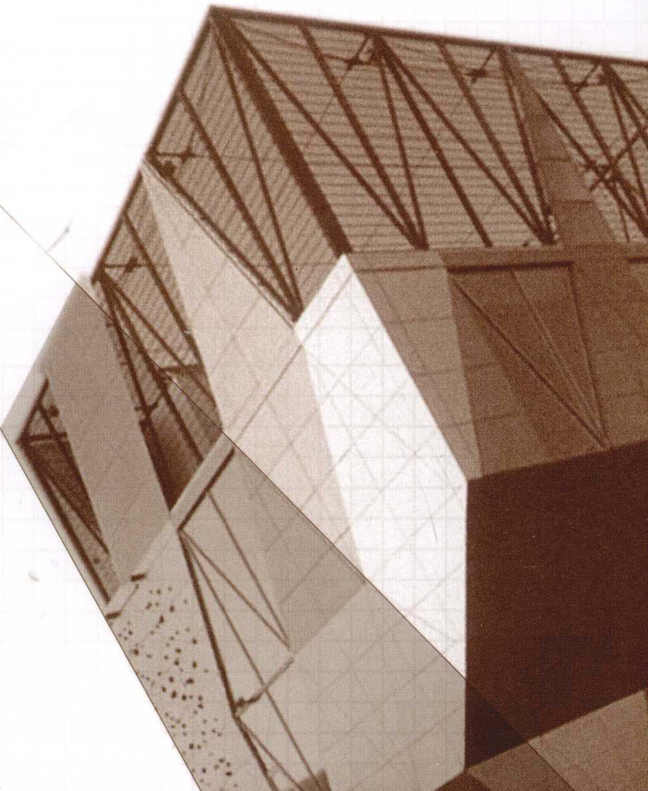
高等学校教材

概率论与数理统计

Probability and Statistics

主编　刘文安



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　刘文安
副主编　李俊芬　李晓爱　张玉霞

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书介绍概率论与数理统计的基本概念、理论和方法。第一章至第五章为概率论部分，主要内容有概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第六章至第十章为数理统计部分，主要内容有数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析及方差分析。每节后配有一定数量的习题，书后附有参考答案。

本书可作为高等学校理工类、经济管理类等专业概率论与数理统计课程的教材或参考书，也可作为考研复习用书，同时可供各类专业技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／刘文安主编．—北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032297-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121760 号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 张晓丽　封面设计 赵 阳　版式设计 马敬茹

插图绘制 尹文军　责任校对 刘春萍　责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京丰源印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787×960 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	19.75	版 次	2011 年 7 月第 1 版
字 数	360 000	印 次	2011 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	29.00 元

物 料 号 32297-00

前　言

“概率论与数理统计”是高等学校理工类、经济管理类等本科专业的一门重要基础课程，它的理论和方法已被广泛地应用于自然科学、工程技术、社会科学、经济管理等众多领域，具有很强的应用性。这门课程以有趣的应用背景、巧妙的思维方式、丰富的科学结论，使学生在深刻了解随机现象的同时，学习和掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本理论，对培养学生认识和分析随机现象的能力具有不可替代的作用。

本书结合编者们多年教学经验与体会，并参考国内外同类优秀教材的基础上精心编写而成。考虑到理工类、经济管理类学科的教学要求以及非数学类专业学生的学习特点和认知规律，本书力图做到以严密的科学理论为基础，丰富的实际应用为背景，从实际问题出发，突出概率统计的思想方法，激发学生的学习兴趣，增强学生对概率论与数理统计的基本思想、基本方法的理解，从而使学生较为轻松地学习和掌握概率论与数理统计的基本知识，达到培养学生应用能力的目的。

本书在内容的编排上，力求把学科知识的系统性和教学方法的实用性相结合，由浅入深、循序渐进。例如，我们在编写时没有采用公理化系统来定义概率，而是利用频率的稳定性引入概率；没有把中心极限定理的证明作为重点，而是把中心极限定理的应用放在了突出位置。全书共分十章。第一章至第五章为概率部分，第六章至第十章为数理统计部分。

为了帮助学生理解并掌握概率论与数理统计的理论与方法，本书在内容的安排、例题的讲解、习题的选择等方面，都进行了精心的设计。结合理工类、经济管理类学生的考研需求，我们还专门搜集整理了历年来全国硕士研究生入学统一考试中的相关考题，并安排在每节内容之后，便于学生有针对性地加强对知识点的理解和基本方法的运用，对有志于考研的学生提供直接的指导。

本书编者的分工如下：王继霞、马冰清、刘娟芳和李晓春编写了第一章至第五章的内容及习题、并负责全书的习题答案；李晓爱和张玉霞编写了第六章至第九章的内容、习题；穆建勇编写了第十章的内容、习题及附录部分；李俊芬和苗雨负责全书的校对。

由于编者的水平有限，不当之处在所难免，敬请广大教师和学生提出宝贵意见。

编　者

2011 年 3 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

概率论的基本概念是学习概率论的基础, 其中心任务是阐明概率的意义和概率计算的重要法则. 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等反映了解决问题的正确思路, 同时也体现了互不相容、独立和条件概率等重要概念的应用.

本章主要介绍了样本空间、概率、条件概率和事件的独立性等概念, 并给出了概率的计算方法及相关的重要公式.

§1.1　样 本 空 间

一、随机现象

自然界和人类社会中存在着两类不同的现象, 一类是**确定性现象**, 即在一定条件下必然发生的现象. 例如, 在一个标准大气压下, 水加热到 100℃ 必然会沸腾; 直角三角形中, 斜边边长的平方等于两直角边边长的平方和等. 另一类现象是**随机现象**, 即在一定条件下, 其结果不能事先确定. 例如, 上抛一枚硬币, 落地时可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 并且在抛之前无法肯定哪一面朝上; 一位射击选手用同一支枪向同一目标射击, 在每次射击前, 无法确定成绩到底是几环; 用同一门炮向同一目标射击, 每次的弹着点不尽相同, 在射击之前无法预测弹着点的确切位置, 诸如此类的现象都是随机现象.

随机现象在一次试验和观察中结果不确定, 呈现出偶然性, 但在大量重复试验和观察中却呈现出某种规律性. 例如, 一位射手在一次射击中可能击中目标, 也可能未击中目标, 但在一个短时间内, 其命中率却是稳定的; 又如, 同一门炮射出的炮弹落点虽然不同, 但这些落点形成一个椭圆, 中心处落点密集, 边缘处落点稀疏, 其落点分布是稳定的. 命中率的稳定性和落点分布的稳定性说明随机现象中蕴含着某种确定的规律, 这种规律只有在大量重复试验和观察中才能呈现出来, 是随机现象本身所固有的. 这种规律性叫做随机现象的**统计规律性**.

二、随机试验

为了对随机现象的统计规律性进行研究, 人们往往要对随机现象进行观察, 对随机现象进行观察称为**随机试验**, 一般用 E 表示. 随机试验具有如下特征:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先确定试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前无法确定这次试验会出现哪一个结果.

本书只研究随机试验, 并简称为**试验**.

三、样本空间

为了用数学方法描述随机现象, 需要引入样本空间的概念.

随机试验 E 的所有可能结果构成的集合称为试验 E 的**样本空间**, 样本空间中的每一个元素都称为一个**样本点**. 用 Ω 表示样本空间, 用 ω 或 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 表示样本点.

例 1.1 抛一枚均匀硬币, 观察正面、反面出现的情况. 这个试验有两个样本点: 正面、反面. 记 ω_1 表示正面, ω_2 表示反面, 则样本空间可表示为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 1.2 抛一颗均匀骰子, 观察出现的点数. 这个试验有六个样本点: $1,2,\cdots,6$. 样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

例 1.3 观察一个新灯泡的寿命, 其样本点有无穷多个, 即 $[0,+\infty)$ 中的每一个实数都有可能是灯泡的寿命, 故样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$.

例 1.4 一门大炮在同一发射条件下进行射击, 观察炮弹的落点. 每个落点都是一个样本点, 若在地面上建立一个坐标系, 则每一个样本点都是一个二维向量 $(x,y),x,y\in\mathbf{R}$. 故样本空间 $\Omega=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$.

样本空间是由试验确定的, 不同试验所得的样本空间也不一样.

例 1.5 从数字 1,2,3,4,5 中任取两个数, 若取法不同, 得到的样本空间也是不同的.

(1) 如果取出的两个数不计次序, 则样本点有 $\mathrm{C}_5^2=10$ 个. 它们是

$$\begin{array}{cccc}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\
 & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\
 & & (3,4) & (3,5)\\
 & & & (4,5)
\end{array}$$

(2) **(不放回抽样)** 如果每次取一个数, 取后不放回, 连取两次. 则样本点有 $\mathrm{A}_5^2=20$ 个. 例如 (1, 2) 与 (2, 1) 就是不同的样本点. 样本空间除了包含 (1) 中的样本点外, 还包括两个数字交换位置后得到的那些样本点.

(3) **(放回抽样)** 如果每次取一个数, 取后放回, 再取第二次. 则样本点有 5^2 个. 除了 (2) 中的 20 个样本点外, 还要加上 (1,1)、 (2, 2)、 (3, 3)、 (4, 4)、 (5, 5) 这五个样本点.

四、随机事件

在进行随机试验时，人们经常研究满足某种性质的样本点所构成的集合. 样本空间 Ω 中，具有某种性质的样本点所构成的集合称为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件是样本空间 Ω 的子集合，常用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示.

例 1.6 在例 1.2 中，设 A 表示“点数是 5”，B 表示“出现的点数为偶数”，C 表示“点数小于 4”，则 A,B,C 均为事件，且 $A=\{5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,3\}$.

例 1.7 在例 1.3 中，若灯泡的寿命超过 1500 小时为合格品. 设 A 表示“合格品”，B 表示“不合格品”. 则 A 和 B 为事件，且 $A=(1500,+\infty)$，$B=[0,1500]$.

进行一次试验，必出现一个样本点，而且只出现一个样本点. 若这个样本点属于事件 A，就称事件 A 在这次试验中**发生**了，否则称事件 A 不发生. 例如，在例 1.6 中，若样本点 6 在一次试验中出现了，则事件 B 在这次试验中发生了，但事件 C 在这次试验中没有发生. 特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，在例 1.1 中有两个基本事件：$\{\omega_1\}$ 和 $\{\omega_2\}$. 在例 1.2 中有六个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

任何一个样本空间 Ω 都有两个特殊子集，即样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

五、事件间的关系与事件的运算

样本空间 Ω 中的事件不止一个，因此需要研究事件之间的关系和运算. 由于事件是一个集合，因而事件间的关系和运算自然与集合论中集合间的关系和运算相对应. 下面给出这些关系和运算在概率论中的描述.

设样本空间为 Ω，$A,B,A_k\ (k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) $A\subset B$ 称为事件 B **包含**事件 A，或事件 A 包含于事件 B. $A\subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

(2) $A\bigcup B$ 称为事件 A 与事件 B 的**并事件**，$A\bigcup B$ 表示事件 A,B 中至少有一个发生.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的并事件.

(3) $A\bigcap B$ 称为事件 A 与事件 B 的**交事件**（或**积事件**）. $A\bigcap B$ 表示事件 A,B 同时发生，简记作 AB.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的交事件.

(4) $A-B$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. $A-B$ 表示事件 A 发生，事件 B 不发生.

(5) $A\bigcap B=\varnothing$ 称事件 A 与事件 B **互不相容**（或**互斥**）. 表示事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

(6) $A\bigcup B=\Omega$ 且 $A\bigcap B=\varnothing$，称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**（**或对立事件**），表示对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=\Omega-A$.

同样，我们可借助集合论中的维恩图 (Venn diagram) 来帮助说明事件的关系与运算. 将试验看作向一方框内投点（长方形表示样本空间 Ω）. 事件 A,B 表示“所投的点落入闭曲线内部”（圆 A，圆 B 表示事件 A 与事件 B），如图 1.1 所示.

由于事件的运算和集合的运算一样，所以可类比得到事件运算的性质. 设 A,B,C 为事件，则有：

(1) **交换律**

$$A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A.$$

(2) **结合律**

$$\begin{aligned}A\bigcup(B\bigcup C)&=(A\bigcup B)\bigcup C,\\ A\bigcap(B\bigcap C)&=(A\bigcap B)\bigcap C.\end{aligned}$$

(3) **分配律**

$$\begin{aligned}A\bigcup(B\bigcap C)&=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C),\\ A\bigcap(B\bigcup C)&=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C).\end{aligned}$$

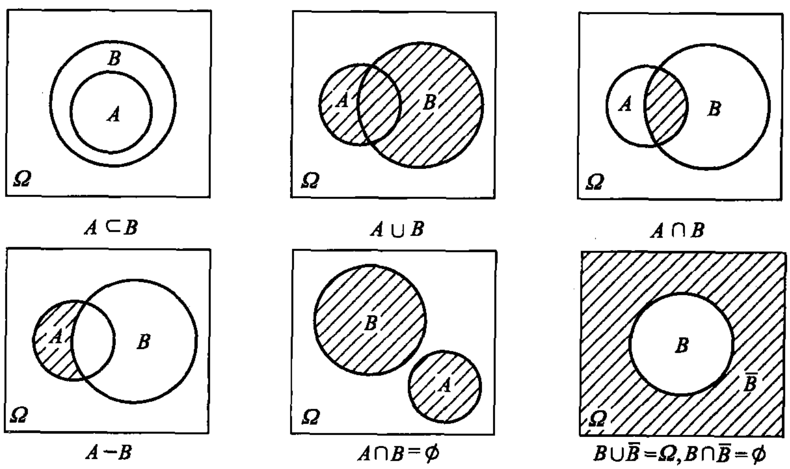


图 1.1

(4) **德摩根 (De Morgan) 律** (对偶律)

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B},\ \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}.$$

对偶律可推广到一般情况:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k,$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k.$$

注 我们以后常用到如下结果

$$A = AB \bigcup A\overline{B}, B = AB \bigcup \overline{A}B, A - B = A - AB = A\overline{B}.$$

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	必然事件, 基本事件空间	抽象点集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	点（元素）
A	事件	Ω 的子集
$\omega \in A$	事件 A 发生	ω 是 A 中的点
$A \subset B$	事件 A 发生, 则事件 B 一定发生	A 是 B 的子集
A=B	二事件 A,B 相等	二集合 A,B 相等
$A \bigcup B$	二事件 A,B 至少有一个发生	二集合 A,B 的并集
$A \bigcap B$	二事件 A,B 同时发生	二集合 A,B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	二集合 A,B 的差集
$\overline{A}$	A 的逆事件	A 的补集
$A \bigcap B = \varnothing$	二事件 A,B 互不相容	二集合 A,B 不相交

例 1.8 用三个事件 A,B,C 表示下列事件:

(1) A 发生, 只有 A 发生;

(2) A 与 B 都发生但 C 不发生;

(3) 恰好有两个事件发生;

(4) 三个事件都不发生, 三个事件不都发生.

解 (1) A 发生就用 A 表示, 只有 A 发生是指 A 发生而 B,C 皆不发生, 用 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 表示.

(2) 显然为 $AB\overline{C}$;

(3) 恰好有两个事件发生为 $AB\overline{C} \bigcup A\overline{B}C \bigcup \overline{A}BC$;

(4) 三个事件都不发生表示为 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$, 三个事件不都发生表示为 $\overline{ABC}$.

例 1.9 化简 $(A\bigcup B)\bigcap(\overline{\overline{B}\bigcap\overline{C}})$.

解

$$
\begin{aligned}
& (A\bigcup B)\bigcap(\overline{\overline{B}\bigcap\overline{C}}) \\
= \ & (A\bigcup B)\bigcap(\overline{\overline{B}}\bigcup\overline{\overline{C}}) = (A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C) \\
= \ & [(A\bigcup B)\bigcap B]\bigcup[(A\bigcup B)\bigcap C] = B\bigcup[(AC\bigcup BC)] \\
= \ & (B\bigcup BC)\bigcup AC = B\bigcup AC.
\end{aligned}
$$

习题 1.1

1.1.1 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 对目标进行射击, 直到击中为止, 记录结果;

(2) 在区间 $[0,1]$ 上随机取一点, 记录结果;

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的记上"正品", 不合格的记上"次品", 如连续查出 2 个次品就停止检查, 或检查 4 个产品就停止检查, 记录检查的结果;

(4) 某城市一天内的用电量.

1.1.2 设 A,B,C 为三个事件, 用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A,B,C 中至少有一个发生;

(2) A,B,C 中不多于一个发生;

(3) A,B,C 中不多于两个发生;

(4) A,B,C 中至少有两个发生.

§1.2 频率与概率

在一次随机试验中, 一个随机事件是否发生, 事先不能确定, 但它发生的可能性大小是客观存在的. 例如, 抛一枚均匀硬币, 不能事先确定正面一定出现. 但由于硬币是均匀的, 可以确定出现正面和反面的可能性相同, 均为 $\frac{1}{2}$. 因此我们希望找到一个合适的数来刻画事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此, 首先引入频率来描述事件发生的频繁程度, 进而引出事件在一次试验中发生的可能性大小的度量——概率.

一、频率

假定在相同条件下进行了 n 次试验. 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**, 并记为 $f_n(A)$.

由定义易知频率具有下述基本性质:

(1) **非负性** 对任一事件 A,$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) **规范性** $f_n(\Omega) = 1$;

(3) **有限可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

不过, 必须指出, 由于事件 A 的频率是它发生的次数与试验次数之比, 因而它依赖于试验次数 n, 并且由于 A 是随机事件, 在一次试验中 A 可能发生, 也可能不发生, 因此, 即使试验次数相同, 频率也未必一样. 我们可以从下面的例子中看到这样的结果.

例 1.10 将一枚硬币连抛 n 次, 观察正面（事件 A）出现的次数 n_A, 并计算出它的频率 $f_n(A)$. 表 1.2 是历史上记录的试验结果.

表 1.2

实验者	投掷的次数 n	正面出现的频数 n_A	正面出现的频率 $f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
德摩根	4 092	2 048	0.500 5
杰万斯	20 480	10 379	0.506 8
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

例 1.11 随机试验 E: 观察新生婴儿的性别. 根据瑞典自 1871 年到 1900 年这 30 年的观察得到如下结果: 出生婴儿总数 $n = 2\ 644\ 757$, 其中男婴个数 $n(\text{男}) = 1\ 359\ 671$, 女婴个数 $n(\text{女}) = 1\ 285\ 086$. 因此, 在此期间男婴和女婴出生的频率分别为

$$f_n(\text{男}) = \frac{1\ 359\ 671}{2\ 644\ 757} \approx 0.514\ 100\ 5,$$
$$f_n(\text{女}) = \frac{1\ 285\ 086}{2\ 644\ 757} \approx 0.485\ 899\ 5,$$

而 1935 年一年的统计资料如下:

表 1.3

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	全年
总数	7 280	6 957	7 883	7 884	7 892	7 609	7 585	7 393	7 203	6 903	6 552	7 132	88 273
男婴	3 743	3 550	4 017	4 173	4 117	3 944	3 964	3 797	3 712	3 512	3 392	3 761	45 682
女婴	3 537	3 407	3 866	3 711	3 775	3 665	3 621	3 596	3 491	3 391	3 160	3 371	42 591
女婴频率	0.486	0.490	0.490	0.471	0.478	0.482	0.477	0.486	0.485	0.491	0.482	0.473	0.482 5

对于固定的 n, 具体地进行 n 次试验称为一轮试验. 显然, 一个事件的频率 $f_n(A)$ 既依赖于试验次数 n, 又依赖于试验的轮次.

另一个验证频率稳定性的著名试验是由英国生物统计学家高尔顿 (Galton) 设计的. 它的试验模型如图 1.2 所示.

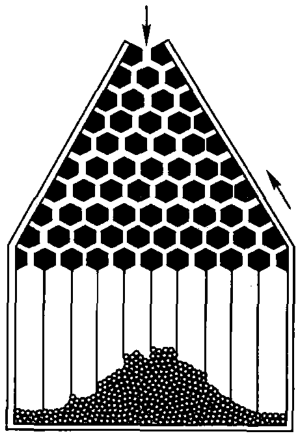


图 1.2

自上端放入一小球, 任其自由下落, 在下落过程中当小球碰到钉子时, 从左边落下与从右边落下的机会相等. 碰到下一排钉子时又是如此. 最后落入底板中的某一格子. 因此, 任意放入一球, 此球落入哪一个格子, 预先难以确定. 但是试验证明, 如放入大量小球, 其最后所呈现的曲线, 几乎总是一样的. 也就是说, 小球落入各个格子的频率十分稳定, 在学习第五章极限定理之后, 会有更深刻的理解.

根据频率的稳定性, 当试验次数很大时, 频率稳定于某个常数. 这个常数是客观存在的, 可以用来刻画事件发生的可能性大小, 这个常数称为事件 A 的概率.

二、概率

设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A, 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应, 称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) **非负性** 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geqslant 0$;

(2) **规范性** 对于必然事件 Ω, 有 $P(\Omega) = 1$;

(3) **可列可加性** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots$, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.1}$$

由概率的定义, 可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.1 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\varnothing) = 0$.

证 令 $A_1 = \Omega, A_i = \varnothing (i = 2, 3, \cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, 且 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$. 由概率的可列可加性 (1.1) 得

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing).$$

又由概率的非负性知,$P(\varnothing) \geqslant 0$. 故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2 (有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.2}$$

证 因为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n \bigcup \varnothing \bigcup \varnothing \bigcup \cdots,$$

而右端诸事件两两互斥, 应用可列可加性及性质 1.1 即可得证.

性质 1.3 (减法公式) 设 A, B 是两个事件, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB). \tag{1.3}$$

证 由于 $B=AB \bigcup (B-A)$, 且 $AB \bigcap (B-A)=\varnothing$, 由概率的有限可加性得

$$P(B)=P(AB)+P(B-A),$$

所以公式 (1.3) 成立.

推论 1.1 (单调性) 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B) \geqslant P(A). \tag{1.4}$$

性质 1.4 对于任一事件 A,$P(A) \leqslant 1$.

证 因 $A \subset \Omega$, 由公式 (1.4) 得 $P(A) \leqslant P(\Omega)=1$.

性质 1.5 (逆事件的概率) 对于任一事件 A, 有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 因 $A \bigcup \overline{A}=\Omega$, 且 $A\overline{A}=\varnothing$, 由公式 (1.2) 得

$$1=P(\Omega)=P(A \bigcup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

性质 1.6 (加法公式) 对于任意两事件 A, B, 有

$$P(A \bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.5}$$

证 因 $A \bigcup B=(A-B) \bigcup (B-A) \bigcup (AB)$, 且 $A-B, B-A, AB$ 两两互不相容, 故由公式 (1.2) 及 (1.3) 得

$$\begin{aligned}
P(A \bigcup B) &= P(A-B)+P(B-A)+P(AB) \\
&= P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB) \\
&= P(A)+P(B)-P(AB).
\end{aligned}$$

公式 (1.5) 还能推广到多个事件的情况. 例如, 设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ &\quad - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \end{aligned} \tag{1.6}$$

一般地, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意 n 个事件, 记

$$\begin{aligned} s_1 &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n), \\ s_2 &= P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + \cdots + P(A_{n-1}A_n), \\ &\cdots\cdots \\ s_k &= P(A_1 \cdots A_k) + \cdots + P(A_{n-k+1} \cdots A_n), \\ &\cdots\cdots \\ s_n &= P(A_1A_2 \cdots A_n), \end{aligned}$$

其中 $s_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 是个和式, 每一项是 k 个事件交的概率. 这 k 个事件是从 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中选取的, 因事件交适合交换律, 可以不论次序, 故 s_k 的和式中有 C_n^k 项. 则可得如下结论:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = s_1 - s_2 + s_3 - \cdots + (-1)^{n+1} s_n. \tag{1.7}$$

例 1.12 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.7, P(A-B) = 0.3$, 求 $P(\overline{AB})$.

解 由减法公式 (1.3) 有

$$P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.7 - 0.3 = 0.4,$$

所以

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

习题 1.2

1.2.1 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$. 问:(1) 在什么条件下,$P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少? (2) 在什么条件下,$P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

1.2.2 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \dfrac{1}{16}$, 求事件 A, B, C 全不发生的概率.