普通高等教育“十二五”规划教材
21世纪大学数学精品教材

概率论与数理统计

李寿贵　余胜春　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
21世纪大学数学精品教材

概率论与数理统计

李寿贵　余胜春　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求(修订稿)》，在保持本课程传统教材优点的基础上，对教材内容、体系进行了适当的调整和优化.

全书共分为三大部分，第一部分包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第二部分包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析；第三部分为应用部分，包括Excel软件及SAS软件在概率统计中的使用方法. 例题和习题既具典型性，又具应用性. 各章末均附有该章重要概念的英文词汇和相关数学家的生平或轶事，书末附有各章习题的参考答案和各种统计数表，以供读者参考.

本书可作为高等学校理工类(非数学类专业)、经管类概率论与数理统计课程的教材，也可供教师、学生及工程技术人员参考，还可用作自学用书和考研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李寿贵，余胜春主编. 一北京：科学出版社，2011. 5
普通高等教育“十二五”规划教材. 21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-030904-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李…②余… Ⅲ. ①概率论一高等学校一教材②数理统计一高等学校一教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第074333号

责任编辑：李磊东 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011年5月第一次印刷 印张：17 3/4
印数：1—6 000 字数：345 000

定价：30. 80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育"十二五"规划教材
21世纪大学数学精品教材

《概率论与数理统计》
编　委　会

主　编　李寿贵　余胜春

副主编　赵喜林　刘云冰　李春丽　张　强

编　委　（按姓氏笔画为序）

丁咏梅　邢远秀　曲峰林　刘云冰

李寿贵　李春丽　李琳娜　张　青

张　强　张艳红　陈贵词　余长春

余胜春　赵喜林　咸艳霞　徐树立

蒋　君　熊　丹

前　言

概率论与数理统计是高等学校理工类和经管类各专业学生必修的一门重要的学科基础课程. 编者本着教育要面向世界、面向未来、面向现代化的宗旨，参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求（修订稿）》，从培养学生的创新意识、加强学生的数学素养、提高学生的科学计算及运用数学的能力等现代教育理念出发，针对学生客观情况，编写了本书.

经 10 余年教学实践、完善，在保持传统教材优点的基础上，本书对教材内容、体系进行了适当调整和优化，并参考了众多国内外的教材和资料. 教材力求结构严谨、层次清晰、题型丰富、内容精炼.

全书共分为三大部分，第一部分包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，讲授概率论基础知识，重要概念都是通过实际问题的直观要求引入的；第二部分包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析，着重介绍数理统计中常用的方法及其应用，突出对数据进行合理分析和处理的思想和方法；第三部分为应用部分，包括 Excel及 SAS 的使用方法，尽量做到联系工程实践，并注重概率统计知识在实际生活和经济领域中的运用，尽量将概念写得清晰易懂，既便于教师教学，也便于学生自学.

在例题和习题的取舍上，教材力争做到深入浅出，既具典型性，又具应用性. 还配置有应用软件 Excel 及 SAS 在概率统计中的使用方法，供读者在提高软件应用能力时选用. 在各章末均附有该章重要概念的英文词汇和相关概率统计学家的生平或轶事，书末附有各章习题的参考答案和各种统计数表，以供读者参考.

本书由李寿贵、余胜春主编，赵喜林、刘云冰、李春丽、张强任副主编，李寿贵教授提出编写思路. 其中，刘云冰编写了第 1 章；赵喜林、李春丽编写了第 2 章、第 4 章；李寿贵、余胜春编写了第 3 章、第 5 章、第 6 章及参读材料；张强编写了第 7～9 章；重要概念的英文词汇，相关数学家的生平或轶事，各章习题、参考答案以及各种统计附表由编委会全体成员共同整理、解答和编写. 参加编写辅助工作的有熊丹、陈贵词、咸艳霞、丁咏梅、徐树立、张青、蒋君、曲峰林、张艳红、邢远秀、余长春、李琳娜等，全书的统稿、定稿工作由李寿贵、余胜春完成.

本书的编写与出版，要感谢李德宜、尹水仿两位教授，他们给予了大力支持，并

提出了很多宝贵的意见和建议，在此深表谢意.

由于编者水平有限，本书难免有不妥之处，希望专家、同仁及广大读者批评指正，以便今后不断完善.

编　者

2011 年 3 月

目　　录

第1章　随机事件和概率

自然界和人类社会中的各种现象，大体上可以分为两大类：确定性现象和随机现象．确定性现象指在一定条件下必然发生的现象．例如，“在标准大气压下，纯水加热到100 ℃ 沸腾”、“平面三角形的任意两边之和大于第三边”、“同性电荷互相排斥”…… 这些都是确定性现象．自然科学和社会科学的很多学科的任务，就在于研究必然现象出现的条件，并且预示它们出现时所产生的结果．还有一种现象，在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性．我们把这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为随机现象．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

§1　随机事件

我们把研究随机现象的试验或观察称为随机试验．随机现象的每一种状态或表现，随机试验的每一种结果称为随机事件，简称事件．在事件之间可以引进各种关系和运算．事件是概率论的基本概念，事件及其概率是这一章的研究对象，是以后各章的基础．

1.1　随机试验与样本空间

1. 随机现象

为了便于更加深刻理解和充分认识随机现象，有必要对随机现象所具有的特性做更进一步的阐述，随机现象结果的出现一定具有随机性，事先无法预知哪个结果会确切的出现，带有一种不确定性，但具有某种统计规律性．

(1) 随机性．现象的随机性，亦称“偶然性”，指随机现象的不确定性．例如，在相同条件下生产的成批产品的不合格品率，某交通干线上每天发生交通事故的次数，设备无故障工作的时间，商店每天的销售额，储蓄所每天的存款余额 …… 都具有不确定性、都是事先不能准确预测的．这些例子表明，在可以控制的条件相对稳定的情况下，由于影响这类现象的还有大量时隐时现的、瞬息易逝的、变化多端的、无法完全控制和预测的偶然因素在起作用，使现象具有随机性．类似的现象称为**随机现象**．随机现象有大量和个别之分．在相同的条件下可以（至少原则上可以）

重复出现的随机现象,称为**大量随机现象**;带有偶然性但原则上不能在相同条件下重复出现的随机现象,称为**个别随机现象**. 上面列举的都属于大量随机现象. 例如,拿破仑(B. Napoleon)死于1821年5月5日,以及一切带有偶然性特点的具体的历史事件,都是个别随机现象. 概率论主要研究大量随机现象,一般不研究个别随机现象.

注意,既然随机性是由大量无法完全控制的偶然因素引起的,那么随着科学的不断发展、技术手段的不断完善,人们可以将越来越多的因素控制起来,从而减少随机性的影响. 然而,容易理解,完全消除随机性的影响是不可能的.

(2) 统计规律性. 随机现象,既有随机性又有统计规律性. 统计规律性,指现象在多次重复出现时所表现出来的一种规律性. 随机现象在多次重复出现时,频率的稳定性或平均水平的稳定性,是统计规律性的典型表现. 例如,一名优秀的射手,一两次射击不足以反映其真正水平,而多次射击才能反映其真正水平;在分析天平上重复称量同一件物品,各次称量的结果会出现波动,但是多次称量结果的平均水平却稳定在该物品的质量附近 …… 概率论的任务,就是要透过随机现象的随机性揭示其统计规律性. 数理统计的任务是通过分析带随机性的统计数据,来推断所研究的事物或现象.

2. 随机试验与样本空间

为便于叙述,我们将对随机现象的观测称为随机试验,简称试验. 试验最基本的结果称为基本事件,所有基本事件的集合称为样本空间.

(1) 随机试验. 例如,对某一目标进行射击,产品的抽样验收,观察某商店每天的销售额,观察某交通干线上每天交通事故的次数,在分析天平上称量一件物品 …… 都可以视为随机试验. 由于概率论主要研究大量随机现象,一般不研究个别随机现象,故通常假定随机试验可以重复进行;此外,虽然试验结果具有随机性,但是随机试验一切可能出现的结果应当是明确的,因为所研究的随机现象应当是可以观测的,否则就无法对其进行研究. 简言之,如果所进行的试验具有下述三个特点:

① 可以在相同的条件下重复地进行;

② 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们就称之为**随机试验**,记作 E.

(2) 样本空间. 对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记作 S. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**. 这样,随机试验由"试验条件"和"样本空间"两个要素决定. 显然,每次试验一定出现一个且只能出现一个基本结果. 表1.1所列的是随机试验及其样本点的例.

表 1.1　随机试验及其基本事件的例

序号	随机试验	样本点
1	掷一枚硬币	"1" 代表正面,"0" 代表反面
2	一枚硬币接连掷两次	(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)
3	掷一枚骰子[①]	$e_i = \{$掷出 i 个点$\}(i = 1,2,\cdots,6)$
4	掷 3 枚骰子	$e_{ijk} = (i,j,k)(i,j,k = 1,2,\cdots,6)$
5	抽验一件产品	$e_1 = \{$合格品$\}, e_2 = \{$不合格品$\}$
6	抽验的 n 件产品中不合格品件数 ν_n	$e_k = \{\nu_n = k\}(k = 0,1,\cdots,n)$
7	接连 n 次射击命中次数 ν_n	$e_k = \{\nu_n = k\}(k = 0,1,\cdots,n)$
8	接连射击首次命中所射击次数 τ_1	$e_k = \{\tau_1 = k\}(k = 1,2,\cdots)$
9	观察上海历年夏季暴雨次数 ν	$e_k = \{\nu = k\}(k = 0,1,2,\cdots)$
10	观察设备无故障工作时间 t	半直线$(0,\infty)$ 的任意点

① 骰子(shǎi zi),又称色子(shǎi zi),是一种游戏用具:用骨头或塑料等制成的小正立方体,其六个侧面上分别刻有 1,2,3,4,5,6 个点.有的方言也念作骰子(tóu zi).

注意,试验的条件不同,样本空间也不相同.例如,同是接连进行两次射击,若只观察命中的次数,则样本空间为 $S = \{0,1,2\}$;若要求观察每次射击是否命中,则样本空间为 $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

1.2　随机事件及其运算

1. 随机事件

在实际中,在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.例如,若规定某种设备无故障工作时间(小时)小于 1000 为次品,则在表 1.1 中随机试验 E_{10} 中我们关心设备无故障工作时间是否有 $t \geqslant 1000$.满足这一条件的样本点组成 S_{10} 的一个子集:$A = \{t \mid t \geqslant 1000\}$.称 A 为试验 E_{10} 的一个随机事件.显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,有 $t \geqslant 1000$.

我们把随机现象的每一种表现或随机试验的每一种可观测的结果,称为**事件**.随机试验的每个基本结果(即由样本点组成的单点集),称为**基本事件**,记作 e_i;每次试验中都一定出现的事件,称为**必然事件**,记作 S;任何一次试验中都不会出现的事件,称为**不可能事件**,记作 $\varnothing$;在每次试验中既可能出现,也可能不出现的事件称为**随机事件**,亦简称为事件.习惯上,用大写拉丁字母 $A,B,\cdots$ 表示事件.有时也用{……}或"……"表示事件,大括号或引号内用式子或文字表示事件的内容.例如,掷硬币"出现正面";掷色子"出现偶数点";抽样检验"抽到不合格品"……都是事件;若以 ν_{10} 表示 10 次射击命中次数,则$\{5 \leqslant \nu_{10} < 9\}$ 表示随机事件,$\{\nu_{10} \leqslant 10\}$ 表示必然事件,$\{\nu_{10} > 10\}$ 或$\{\nu_{10} < 0\}$ 表示不可能事件.

在同一试验的事件 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 之间,可以引进类似于集合之间的关系和运算,并且有与集合的关系和运算完全类似的性质. 事件的关系主要有:包含、相等、对立、不相容;事件的运算主要有:和(并)、差、交、逆.

2. 事件的关系

事件有如下基本关系:包含,相等,不相容,对立.

(1) 包含关系. 称"事件 B 包含事件 A"记作 $A \subset B$,如果每当事件 A 出现时事件 B 也一定出现"(但是反之未必);这时,亦称"A 导致 B".

(2) 相等事件. 称"事件 A 等于事件 B"或"事件 A 与 B 等价",记作 $A = B$,如果在每次试验中事件 A 和 B 要么都出现、要么都不出现". 显然,$A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $A \supset B$.

注意,$A = B$ 并不意味着 A 与 B 是同一个事件. 例如,甲、乙两个足球队进行比赛,开赛前首先掷一枚硬币,事件 $A = \{$出现正面$\}$ 与 $B = \{$甲队先发球$\}$,这时虽然 $A = B$,然而 A 与 B 却是两个不同的事件.

(3) 不相容事件. 称事件 A 和 B 为不相容事件,如果在任何一次试验中事件 A 和 B 都不可能同时出现,否则称 A 和 B 为相容事件.

(4) 对立事件. 事件"A 不出现"称为事件 A 的对立事件或逆事件,记作 $\overline{A}$. 显然,A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件:$\overline{\overline{A}} = A$,于是 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件. 两个相互对立的事件 A 和 $\overline{A}$,在每次试验中必有一个出现,但不可能同时出现. 注意,两个相互对立的事件一定是不相容事件,但是两个不相容事件一般未必互为对立事件.

例如,设 ν 为 10 次射击命中次数,且命中不少于 6 次为及格,否则为不及格. 考虑事件 $A = \{\nu \geqslant 6\}$,$B = \{\nu < 6\}$,$C = \{\nu \geqslant 7\}$;$D_1 = \{$及格$\}$,$D_2 = \{$不及格$\}$,则事件 A 与 B 以及 D_1 与 D_2 两两互为对立事件,且 $A = D_1$,$B = D_2$;A 与 C 是相容事件,而且 $A \supset C$;B 与 C 是不相容事件,但不是对立事件.

3. 事件的运算

事件有如下基本运算:和,差,交,逆(或补).

(1) 和(并). "A 与 B 至少出现一个"作为一个事件,称为 A 与 B 的**和或并**,记作 $A \cup B$ 或 $A + B$,其中 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$;事件"可数个事件 A_1,$A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少出现一个"称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的**和**,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

(2) 差. "事件 A 出现且事件 B 不出现"作为一个随机事件,称为 A 与 B 的**差**或 A 减 B,记作 $A \backslash B$ 或 $A - B$,其中 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

(3) 交(积). "事件 A 和 B 同时出现"作为一个事件,称为事件 A 和 B 的**交**,记

作 $A \cap B$ 或 AB,其中 $AB = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$. 事件"可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时出现",称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**交**,记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

例如,以 ν 表示 10 次射击命中次数,设 $A = \{\nu \geqslant 6\}$, $B = \{\nu < 6\}$, $C = \{\nu \geqslant 7\}$, $D = \{5 \leqslant \nu \leqslant 8\}$,则

$$A \cup B = S, \quad A \cup C = A, \quad A \cup D = \{\nu \geqslant 5\}$$
$$A - B = A, \quad A - C = \{\nu = 6\}, \quad A - D = \{\nu > 8\}$$
$$AB = \varnothing, \quad AC = C, \quad BC = \varnothing, \quad AD = \{6 \leqslant \nu \leqslant 8\}, \quad BD = \{\nu = 5\}$$

(4) 逆(补). "A 的对立事件"称为 A 的**逆事件**或**补事件**,记作 $\overline{A}$. 显然满足

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A\overline{A} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

例如,射击"命中"和"未命中",掷色子"出现偶数点"和"出现奇数点",产品检验"出现合格品"和"出现不合格品"……都互为逆事件. 注意对立事件和不相容事件的区别.

(5) 完全事件组. 如果有限或可数个事件 $\{H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots\}$ 满足:① 它们两两不相容,即 $H_i H_j = \varnothing (i \neq j)$;② 它们之和 $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n \cup \cdots = S$ 是必然事件,则它们构成一个**完全事件组**(也称为样本空间 S 的一个**划分**).

例如,一批产品分为三个等级,以 $H_i (i = 1,2,3)$ 表示事件"随意抽取一件恰好抽到 i 等品",则 H_1, H_2, H_3 构成完全事件组.

对于任意事件 $A, B, C, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,它们的运算具有如下性质:

(1) 交换律　　$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$

(2) 结合律　　$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

(3) 分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC, \quad A(B - C) = AB - AC$

$$A(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = AA_1 \cup \cdots \cup AA_n \cup \cdots$$

(4) 对偶律(德摩根律)　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

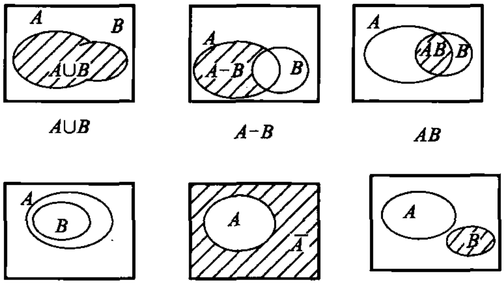
$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots} = \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_n \cdots$$
$$\overline{A_1 \cdots A_n \cdots} = \overline{A}_1 \cup \cdots \overline{A}_n \cup \cdots$$

事件运算的性质,都不难证明,并且借助于文氏图(图 1-1,图中矩形表示样本空间 S)也容易理解. 在进行事件的运算时要善于运用这些性质,利用文氏图有助于直观上理解.

例 1　下面是随机试验 E 及其样本空间 S 的例.

(1) 设 E 表示接连对同一目标射击直到恰好两次命中为止,并观察射击的次数,则

$$S = \{2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$



A∪B　　A−B　　AB

A⊃B　　$\overline{A}$　　AB=∅

图 1-1　文氏图

(2) 设 E 表示接连进行 3 次射击,并观察各次命中目标的情况,则

$$S=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

(3) 设 E 表示观察一台自动机床两次故障之间的时间间隔,则 $S=(0,\infty)$.

(4) 设 E 表示自集合 $\{0,1,2,3\}$ 的先后两次非还原抽样(非还原有次序),则

$$S=\begin{Bmatrix}(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(1,0),\\(2,0),(2,1),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2)\end{Bmatrix}$$

(5) 设 E 表示按还原无次序抽样(只记录出现的元素不计它们出现的次序)从 $\{a,b,c,d\}$ 中随机地取出三个元素,则

$$S=\begin{Bmatrix}(aaa),(aab),(aac),(aad),(abb),\\(abc),(abd),(acc),(acd),(add),\\(bbb),(bbc),(bbd),(bcc),(bcd),\\(bdd),(ccc),(ccd),(cdd),(ddd)\end{Bmatrix}$$

(6) 设 E 表示从 $S_0=\{a,b,c,d,e\}$ 中随机地取出三个元素(非还原无次序),则

$$S=\begin{Bmatrix}(abc),(abd),(abe),(acd),(ace),\\(ade),(bcd),(bce),(bde),(cde)\end{Bmatrix}$$

例 2　对于任意三个事件 E_1,E_2,E_3,设 $A_i=\{E_1,E_2,E_3$ 至少出现 i 个$\}$,$B_j=\{E_1,E_2,E_3$ 恰好出现 j 个$\}$,$C_k=\{E_1,E_2,E_3$ 最多出现 k 个$\}$$(0\leqslant i,j,k\leqslant 3)$. 那么

$$A_0=S,\quad A_1=E_1\cup E_2\cup E_3$$

$$A_2=E_1E_2\cup E_1E_3\cup E_2E_3,\quad A_3=E_1E_2E_3$$

$$B_0=\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3,\quad B_1=E_1\overline{E}_2\overline{E}_3\cup\overline{E}_1E_2\overline{E}_3\cup\overline{E}_1\overline{E}_2E_3$$

$$B_2=E_1E_2\overline{E}_3\cup E_1\overline{E}_2E_3\cup\overline{E}_1E_2E_3,\quad B_3=E_1E_2E_3$$

$$C_0=\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3,\quad C_1=B_0\cup B_1,\quad C_2=B_0\cup B_1\cup B_2$$

$$C_3=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3=S$$

例 3　如图 1-2 所示，设电路 MN 中装有 a 和 b 两个继电器. 以 A 和 B 分别表示 a 和 b 为通路，以 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别表示 a 和 b 断路. 利用电路 MN 的“通”与“断”两种状态，证明事件的对偶律.

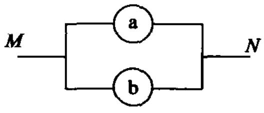


图 1-2

解　引进事件 $C=\{MN$ 为通路$\}$，则 $\overline{C}=\{MN$ 为断路$\}$. 显然

$$C=A\cup B,\quad \overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}$$

因此 $\overline{C}=\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$. 在 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 分别将 A 换成 $\overline{A}$，将 B 换成 $\overline{B}$，得 $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=AB$，于是 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 4　甲、乙两个篮球队进行比赛，假设有三种可能的结局：甲胜、乙胜和平局. 设事件 $A=\{$甲胜乙负$\}$，则 $\overline{A}=(\quad)$.

(A) $B_1=\{$甲负而乙胜$\}$　　(B) $B_2=\{$甲和乙平局$\}$

(C) $B_3=\{$甲胜或平局$\}$　　(D) $B_4=\{$乙胜或平局$\}$

解　把“甲、乙两个篮球队比赛”视为随机试验 E，则试验 E 的样本空间为

$$S=\{e_1,e_2,e_3\}$$

其中 $e_1=\{$甲胜$\}$，$e_2=\{$乙胜$\}$，$e_3=\{$平局$\}$. 所给 4 个选项对应的事件可以分别表示为

$$B_1=\{e_2\},\quad B_2=\{e_3\},\quad B_3=\{e_1,e_3\},\quad B_4=\{e_2,e_3\}$$

而事件 $A=\{$甲胜乙负$\}=\{e_1\}$，因此 $\overline{A}=\{e_2,e_3\}=B_4$，即 $\overline{A}$ 表示“$\{$乙胜或平局$\}$”. 于是(D) 是唯一正确选项.

例 5　对于任意两个事件 A 和 B，证明下列关系式等价：

(1) $A\subset B$；(2) $\overline{A}\supset\overline{B}$；(3) $A\overline{B}=\varnothing$；(4) $A\cup B=B$.

证　(1)⇒(2). 设 $A\subset B$，即若 A 出现，则 B 也随之出现；从而，若 B 不出现，则 A 也不出现，即 $\overline{A}\supset\overline{B}$.

(2)⇒(3). 由 $\overline{A}\supset\overline{B}$，可见 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$，从而 $A\overline{B}=A\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$.

(3)⇒(4). 设 $A\overline{B}=\varnothing$，则由 $A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，$B=SB=(A\cup\overline{A})B=AB\cup\overline{A}B$，不难推出 $A\cup B=A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B=\varnothing\cup(A\cup\overline{A})B=SB=B$.

(4)⇒(1). 设 $A\cup B=B$，则由 $A\subset A\cup B=B$，可见 $A\subset B$.

于是，事件 A 和 B 的 4 个关系式等价得证.

§2　概率及其常见模型

在几何学中线段的长短、平面图形或立体的大小，物理学中物质的多少、质点运动的快慢等，都可以用数值来度量，长度、面积、体积、质量、速度 …… 就是相应