SX

XINBIAN GAOZHONG SHUXUE
ZHONGNANDIAN SHOUCE

新编高中数学
重难点手册

供高一年级用

汪江松 主编

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

新编高中数学重难点手册

供高一年级用

汪江松　主编

汪江松　曹衍清　杨松林
赵　泓　袁　洁　李太珍　编著

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社
1998年・武汉

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

新编高中数学重难点手册(供高一年级用)—三版/汪江松主编.
—武汉:华中师范大学出版社,1998.10.

ISBN 7-5622-1880-3/G·899

Ⅰ.新… Ⅱ.汪… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G633.604

新编高中数学重难点手册

供高一年级用

© 汪江松 主编

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 邮编:430079 电话:027—87876240)
新华书店湖北发行所经销　　武汉市新华印刷厂印刷

责任编辑:刘元利 张小新　　封面设计:甘 英 罗明波
责任校对:罗少琳　　督 印:朱 虹

开本:850mm×1168mm 1/32　　印张:10.75 字数:328 千字
版次:1998 年 6 月第 3 版　　1998 年 10 月第 4 次印刷
印数:60 301—90 400　　定价:10.20 元

新编初中数学重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

新编初中物理重难点手册

供初二年级用
供初三年级用

新编初中化学重难点手册

供初三年级用

新编初中语文重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

新编初中英语重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

前言

本书自出版以来,深受读者的欢迎。他们认为本书对中学生在学习过程中明确各章节的学习目标,理解和攻克重点难点,掌握各类题型的解题方法和技能技巧,提高数学的思维能力和解决问题的能力,都有很大的帮助。

这次修订除保留原版的特色外,一是注意了与九年义务教育的数学教材相衔接;二是增辟了“释疑解难”这一专栏,以帮助读者对教材中难点的理解和突破;三是对例习题作了较大的补充和更换,并特意从全国历年的高考题及近年来各地的会考和预考题中筛选了不少有代表性和典型性的试题作为习题,使本书更体现其新颖性、针对性和可读性。

本书各章分别按“学习目标”、“重点、难点与关键”、“释疑解难”、“技能技巧”、“例题剖析”、“反馈练习”、“单元反馈练习”等框架进行编写。其中“技能技巧”、“例题剖析”围绕本章节的重难点进行展开,旨在通过对典型例题的解答和剖析,揭示思维过程,指明所具规律,以期启迪读者的思维,提高他们分析问题和解决问题的能力。

考虑到各种层次读者不同的需要,节末的“反馈练习”和章末的“单元反馈练习”分别配备有A组题和B组题。其中A组题主要立足于巩固“双基”,夯实基础。B组题则多选自历年高考题和各地预考题,或较简单的数学竞赛题,旨在开扩视野,训练思维,培养能力。

全书的选择题均有四个选择支,其中只有一个正确,行文中不再另作说明。

本书的这次修订由汪江松、曹衍清、杨松林、赵泓、袁洁、李太

珍完成，全书由汪江松先生策划和定稿。

限于水平和时间，不足和疏漏之处恳请读者和同行指正。

根据教育部发出《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》，现行普通高中数学教学内容调整范围如下，1999 年高考试题将以此次调整后的内容为准。

一、将以下教学内容改为不作考试要求的选学内容

1.《代数(上册)》第四章“4.6 简单的三角方程”。

2.《立体几何》第二章“2.6 球冠”中的“球冠的面积”。

3.《立体几何》第二章“2.12 球缺的体积”。

4.《平面解析几何》第三章“3.3 圆的渐开线”。

5.《平面解析几何》第三章“极坐标”第 3.5 节中的“三种圆锥曲线的统一的极坐标方程”和“3.7 等速螺线”。

二、限制、降低以下教学与考试要求

6. 在考查学生对函数性质的掌握和运用函数性质解决问题时，所涉及的幂函数 $f(x)=x^a$ 中的 a 限于在集合 $\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\}$ 中取值。

7. 对三角函数中有关和差化积、积化和差的 8 个公式，不要求记忆。

8. 在有关“不等式”的教学要求中，用“两个(或三个)正数的算术平均数不小于其几何平均数”这一性质解决问题时，不扩展到四个(或四个以上)正数的情况。

9. 对立体几何中“异面直线上两点距离公式”，不要求记忆。

10. 在“圆锥曲线”的教学中，不要求解有关两个二次曲线交点坐标的问题(两圆的交点问题除外)。

汪 江 松

1998 年春于武昌

目　　录

代　　数

立体几何

代 数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

函数是贯穿整个高中数学知识的最基本的概念.本章从介绍集合的概念入手,引进映射的概念,用映射的观点给出函数的定义,进而研究幂函数的概念、图形与主要性质,并以幂函数为例,分析函数的单调性与奇偶性;再由一一映射与逆映射给出反函数的定义,指出互为反函数的两个函数图像间的关系;继而研究指数函数与对数函数的概念、图像和性质.此外还介绍了一元二次不等式、分数指数幂、对数和简单的指数方程和对数方程.全章知识点较多、内容丰富,且具有一定的抽象性.

"数形结合"是本章最基本的数学思想,如集合中的交、并、补运算可辅以韦恩图;借助二次函数的图像解一元二次不等式;用函数的图像来研究函数的性质;依两函数图像的交点求方程的近似解等."分类讨论"是本章另一基本的思想方法,如幂函数 $y=x^{\alpha}$,指数函数 $y=a^{x}$,对数函数 $y=\log_{a}x$ 的性质的研究,均需作分类讨论.

1.1 集 合

学习目标

理解集合的概念,掌握集合的特性及其表示方法;掌握元素与

集合、集合与集合之间的关系，会进行集合的有关运算；能正确地使用有关集合的术语和符号.

重点、难点与关键

重点：关于集合的基本概念及基本运算.

难点：关于集合中一些概念的涵义的正确理解.

关键：正确地理解有关集合的概念，掌握它们之间的联系与区别.

释疑解难

(1) 集合是数学中不加定义的原始的概念. 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性等特性.

(2) 空集 $\varnothing$ 与零元集 $\{0\}$ 的区别. $\varnothing$ 中没有任何元素，$\{0\}$ 中只有一个元素“0”，即 $0\in\{0\}$；空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，如 $\varnothing\subset\{0\}$，但 $0\notin\varnothing$.

(3) 集合 $\{(1,2)\}$ 与 $\{1,2\}$ 的区别. 从几何意义上来理解，集合 $\{1,2\}$ 的两个元素表示数轴上的两个点 1 与 2；而集合 $\{(1,2)\}$ 表示直角坐标平面上的一个点的坐标 $(1,2)$.

(4) 两个非空集合之间的关系：设 A、B 为两个非空集合，一般它们有如下五种关系.

①$A\subset B$；②$B\subset A$；③$A=B$；④$A\cap B\neq\varnothing$；⑤$A\cap B=\varnothing$.

用韦恩图表示这些关系如图 1-1 所示.

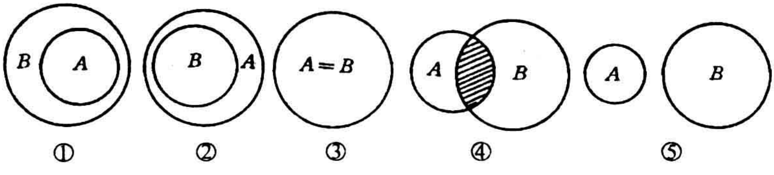


图 1-1

技能技巧

运用数形结合的思想，利用韦恩图来帮助分析和理解有关集

合之间的关系,进行有关集合问题的运算.

例题剖析

例 1 判断正误

(1) $\{3\} \in \{$奇数$\}$. (×)

(2) 若 $x \in \mathbf{N}$,则 $x \in \mathbf{Q}$. (√)

(3) 在实数范围内,若 $a \notin \mathbf{R}^+$,则 $a \in \mathbf{R}^-$. (0) (×)

(4) 空集是任何集合的真子集. (×)

(5) 设 $A \subseteq B$,若 $a \notin B$,则 $a \notin A$. (√)

解 (1) 错.符号“$\in$”、“$\notin$”是表示元素与集合之间的关系的,而不能用来表示集合之间的关系.

(2) 正确.因为 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$.

(3) 错.$0 \notin \mathbf{R}^+$,但 $0 \notin \mathbf{R}^-$.

(4) 错.当“任何集合”为空集时就不正确.

(5) 正确.假设 $a \in A$ 则 $a \in B$,与题设 $a \notin B$ 矛盾,故 $a \notin A$.

剖析 解答本题的关键是理解概念的涵义,注意概念之间的联系与区别.

例 2 已知数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$,数集 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$,则它们之间的关系是( ).

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$ (C) $X = Y$ (D) $X \neq Y$

解 $\because$ $Y = \{(2k' \pm 1)\pi, k' \in \mathbf{Z}\}$,

若 $y \in Y$,则 $y \in X$,$\therefore$ $Y \subseteq X$.

取 $x \in X$,若 $n = 2k-1$ $(k \in \mathbf{Z})$,则 $x = (4k-1)\pi$,即 $x \in Y$;若 $n = 2k$ $(k \in \mathbf{Z})$,则 $x = (4k+1)\pi$,即 $x \in Y$.

即由 $x \in X$ 有 $x \in Y$, $\therefore X \subseteq Y$. 故 $X = Y$.选(C).

剖析 判定集合间的关系,其基本方法是归结为判定元素与集合之间的关系.

注意两个集合相等的判定方法.

例 3 设 $A = \{x \mid x^2 - ax + 15 = 0\}$,$B = \{x \mid x^2 - 5x + b = 0\}$,又 $A \cap B = \{3\}$,求 a, b 及 $A \cup B$.

分析 A、B 分别表示两个一元二次方程的解集. 由 $A\cap B=\{3\}$知,两个方程有公共根 3,依韦达定理不难确定 a、b.

解 由 $3\in A$ 知,$x_2=\dfrac{15}{3}=5$, $\therefore\ a=3+5=8$, $\therefore\ A=\{3,5\}$.
由 $3\in B$ 知,$x_3=5-3=2$, $\therefore b=3\times2=6$, $\therefore B=\{2,3\}$.
$\therefore\quad A\cup B=\{2,3,5\}$.

剖析 注意理解集合所表示的实际涵义,常有利于打开解题的思路.

例 4 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, A、B 为 I 的子集,且 $\overline{A}\cap B=\{1,9\}$, $A\cap B=\{2\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,6,8\}$,求 A 和 $\overline{B}$.

解法 1 (逐个判定)

$2\in A$, $2\in B$; 1、$9\notin A$, 1、$9\in B$;

4、6、$8\notin A$ 且 4、6、$8\notin B$;

余下判定 3,5,7.

$\because\ 3\notin\overline{A}\cap B$, $3\notin A\cap B$, $3\notin\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\therefore\ 3\in A$. 同理 $5\in A$, $7\in A$.

故 $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,9\}$, $\overline{B}=\{3,4,5,6,7,8\}$.

解法 2 如图 1-2,利用韦恩图知:

全集 I 被分成 $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ 四个子集. 将题设的三个子集填入图中后,余下的 3,5,7 三数只能填入 $A\cap\overline{B}$ 之中,此时不难知道:

$A=\{2,3,5,7\}$, $\overline{B}=\{3,4,5,6,7,8\}$.

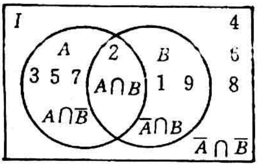


图 1-2

剖析 解法 1 是根据题设条件,将全集中的元素逐个定位,定位时应注意验证是否会导致矛盾,否则应一一验证. 解法 2 利用韦恩图分块,整体定位,这种方法较为简便、直观.

反馈练习 1.1

A 组

1. 判断题(对的打"√",错的打"×")

(1) {质数}中的所有元素都是奇数； (✗)

(2) $\{a \mid a^0=1\}=\mathbf{R}$； (✗)

(3) $\{2^0, \sin 0^\circ\}=\{0,1\}$； (✓)

(4) $a\in A \Longleftrightarrow a\in A\cup B$； (✗)

•(5) $B=C \Longleftrightarrow A\cup B=A\cup C$； (✗)

•(6) $\{x \mid x^3-x=0, x\in \mathbf{Z}\}\subset\{x \mid |x|<2, x\in \mathbf{Z}\}$. (✗)

2．填空题

(1) 已知$\{x \mid ax^2+bx+c=0,\ x\in \mathbf{R}\}=\varnothing$，则 a、b、c 满足的条件是$b^2-4ac<0$.

(2) 集合 $A=\{x \mid (x+1)(x-2)(x-5)=0\}$的所有子集是$\{1,2,5\}$ $\{2\}$ $\varnothing$

(3) 对于集合 A 的任意一个元素 x，都有 $x\in B$，则 A、B 之间的关系是$A\subseteq B$

(4) $A=\{$圆内接四边形$\}$，$B=\{$梯形$\}$，则 $A\cap B=$\{等腰梯形\}

(5) 设 S、T 为两个非空集合，若 $M=S\cap T$，则 $S\cup M=$ S ；

(6) 设 $I=\{x \mid x\in \mathbf{N}$ 且 $x\leqslant 10\}$，$A=\{x \mid x\in I, x$ 为质数$\}$，$B=\{x \mid x\in I, x$ 为奇数$\}$，则 $\overline{A\cup B}=$\{[illegible]\}；$\overline{A}\cup B=$\{1\}；$\overline{A}\cap\overline{B}=$\{4,6,8,10\}.

3．选择题

(1) 下列各命题正确的是(B)；

(A) 方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\ y-3=0\end{cases}$的解集是$\{x=-1, y=2\}$

(B) 已知 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x \mid x\leqslant A\}$，则 $A\in B$

(C) 集合$\{x \mid x^2+2=0\ x\in \mathbf{R}\}$是有限集合

(D) {正偶数}∩{质数}$=\varnothing$

(2) 全集为 I，若集合 $P\subset$集合 Q，则下列关系正确的是(B)；(湖北省会考试题)

(A) $\overline{P}\subset\overline{Q}$ (B) $\overline{P}\supset\overline{Q}$ (C) $P\cup Q=P$ (D) $P\cap Q=Q$

(3) 已知集合 A 中有 2 个元素，集合 B 中有 5 个元素，$A\cup B$ 的元素个数为 p，则 p 有(B)；

(A) $2\leqslant p\leqslant 7$ (B) $5\leqslant p\leqslant 7$ (C) $2\leqslant p\leqslant 5$ (D) $3\leqslant p\leqslant 5$

(4) 集合 $\varnothing$ 与$\{0\}$的关系是(D)；

(A) $\{0\}=\varnothing$ (B) $\varnothing\in\{0\}$ (C) $\{0\}\subset\varnothing$ (D) $\varnothing\subset\{0\}$

(5) 设全集 $I=\{x \mid x\in \mathbf{N}$, 且 $x\leqslant 6\}$，$P=\{1,2,4\}$，$Q=\{4,6\}$，则 $P\cap\overline{Q}$ 是(D)；(湖南省会考试题)

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{2,4\}$ (C) $\{1,5\}$ (D) $\{1,2\}$

(6) 若 $A \subseteq B, A \subseteq C, B=\{0,1,2\}, C=\{0,2,4\}$，则满足上述条件的集合 A 的个数为（ A ）.

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

4．用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x \mid x=|x|, x \in \mathbf{Z}\}$； [0.1.2.3.4. ···]

(2) $B=\{(x,y) \mid |x|<2,\ 2x-y=0,\ x \in \mathbf{Z}\}$. {(-1,-2) (0.0) (1.2)}

5．用描述法表示下列集合：

(1) 不超过 30 的非负偶数的集合； {x | x=2n. 且 0≤x≤15, x∈Z}

(2) 在直角坐标系中，不在坐标轴上的点的坐标的集合 {(x,y) | xy≠0. x.y∈Z}

6．设 $x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}$，$y=3+\sqrt{2}\pi$. 集合 $M=\{m \mid m=a+b\sqrt{2}, a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$，试判断 x, y 与集合 M 的关系.

7．已知非单元素集合 $M=\{a, a+d, a+2d\}, N=\{a, aq, aq^2\}$，其中 $a \neq 0$，若 $M=N$，求 q 的值.

8．已知 $(1,2) \in A \cap B$，其中 $A=\{(x,y) \mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y) \mid x^2-ay-b=0\}$，试求 a、b 的值.

B　组

1．选择题

(1) 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，则 $\bar{A} \cup \bar{B}=$（ C ）；（全国高考试题）

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{0,1,4\}$　　(D) $\{0,1,2,3,4\}$

(2) 已知全集 $I=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{N}\}, B=\{x \mid x=4n, n \in \mathbf{N}\}$，则 C（ ）；（全国高考试题）

(A) $I=A \cup B$　(B) $I=\bar{A} \cup B$　(C) $I=A \cup \bar{B}$　(D) $I=\bar{A} \cup \bar{B}$

(3) 设 $A \cap B=\varnothing, M=\{x \mid x \subseteq A\}, N=\{x \mid x \subseteq B\}$，则一定成立的是（ B ）；

(A) $M \cap N=\varnothing$　　(B) $M \cap N=\{\varnothing\}$

(C) $M \cap N=A \cap B$　　(D) $M \cap N \subset A \cap B$

(4) 对任意两个集合 A 和 B，下列命题中正确的是（ ）；D

(A) $(A \cap B) \subset B$　　(B) $(A \cup B) \supset \varnothing$

(C) $(A \cap B)=A$　　(D) $(A \cup B) \supseteq B$

(5) 集合 $P=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，$Q=\left\{y \,\middle|\, y=\dfrac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，则有 C（ ）.（第八届"希望杯"试题）

(A) $P=Q$　　(B) $P \supset Q$　　(C) $P \subset Q$　　(D) $P \cap Q=\varnothing$

2. 填空题

(1) 已知集合 $A=\{x|x\neq -1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\neq 2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cup B$ 写成区间形式为______；(第六届"希望杯"试题)

(2) 设 $M=\{x|x^2+px-3=0\}$，$N=\{x|x^3-qx^2+rx=0\}$，$S=\{p,q,r\}$，且 $M\cap N=\{-3\}$，$M\cup N=\{-2,-3,0,1\}$，则 $S=$______；(第六届"希望杯"试题)

(3) 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为______；(上海市高考试题)

(4) 在直角坐标系中，坐标轴上点的集合可表示为______；

(5) 设集合 $A=\{x|1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x-a>0\}$，当 $A\subset B$ 时，实数 a 的取值范围是______.

3. 已知 $A=\{x|x^2-px+q=0\}$，$B=\{x|x^2-kx+15=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{2,3,5\}$，求 p,q,k.

4. 已知 $A\cap\{-1,0,1\}=\{0,1\}$，且 $A\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$，求满足上述条件的集合 A 的个数.

5. 若关于 x 的方程 $(x+1)^2=2a+1$ 和 $(x+2)^2=2ax$ 中至少有一个方程具有两个不等实根，求实数 a 的集合.（第七届"希望杯"试题）

6. 设全集为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，求集合 $\overline{M}\cup\overline{N}$.（全国高考试题）

7. 已知 $P=\{x|x=m^2+1,m\in\mathbf{N}\}$，$Q=\{y|y=n^2-4n+5,n\in\mathbf{N}\}$，试证明 $P\subset Q$.

1.2 一元二次不等式

学习目标

掌握含绝对值的不等式 $|ax+b|<c$，$|ax+b|>c$ $(c>0)$ 和一元二次不等式的解法；理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系和联系.

重点、难点与关键

重点：一元二次不等式的解法.

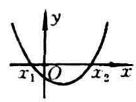
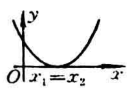
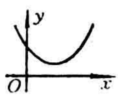
难点：二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系.

关键：借助二次函数的图像来理解三者之间的关系和解一元二次不等式.

释疑解难

二次项系数为正数时，二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系如表 1-1：

表 1-1

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的根	有相异两实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_1<x_2$	有相等二实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$的一切实数	**R**
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

技能技巧

(1) 解绝对值不等式应根据绝对值的几何意义，先脱去绝对值的符号，将其转化为一般的不等式(组)来解. 如

$|ax+b|<c$ $(c>0)$转化为 $-c<ax+b<c$；

$|ax+b|>c$ $(c>0)$转化为 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$.

(2) 对一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$