李波　曾秋玲　贺晓军

高中数学一题多解

高一分册

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高一分册）

李波　曾秋玲　贺晓军

G634.605
L310

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高一分册）

李波　曾秋玲　贺晓军

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路308号　电话:8912634　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版

甘肃省委党校印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张:8.75

1998年10月第1版　1998年10月第1次印刷

字数:215千字　印数:1—10000册

ISBN7—311—01421-2/G·552　定价:11.00元

前　言

美国著名的数学教育家G·波利亚认为:“问题解决”是数学的核心。中学生们在获得知识的同时,更需要获得分析问题和解决问题的综合能力。

要解决问题就需要发现矛盾和差异,从差异中找到解决问题的思考路线及其关键所在。这也是科学研究思想方法的起步。

中学生朋友们在演算数学习题时,往往只注意到:这道题怎么解?而忽视了对思路的归纳总结和多角度的观察,本书的编著者试图以“一题多解”的方式为读者提供“多视角”的思考方法。对于每一道例题都提供了多种“思路”而不仅仅是“解法”,在每道例题及章节后面又提供了一些针对性极强的练习和习题。旨在通过“一题多解”的方式帮助读者开拓视野,启迪思维,并提供对这一能力的训练和培养,以期提高思维的深度和广度。本书的编著者均为重点中学数学高级教师,并多年担任数学奥林匹克教练工作,在中学数学教学工作中积累了丰富的实践经验。书中的每一种思路不仅仅针对例题,而是蕴含了某种数学方法与数学思想。

本书的编排是按现行中学数学教材的顺序进行

的，且每一章节例题的选择也是由易及难、由浅入深的，而其讲练结合的形式为读者在阅读理解的同时又增加了动手练习的机会，这不仅适用于广大中学生，同时也可以成为中学数学教师备课的参考书。

掌握解决问题的方法是数学思维的核心。因而“一题多解”的重要性并不在于其直接的“套用”，而是其数学思维训练的价值和潜在的对发展智力的影响。“一题多解”无形中密切了各数学分支之间的联系，加深了学生对重要的数学方法的再认识，既使他们丰富了解题经验又以题带面地复习了章节知识；并且在寻找最简捷、合理的解题方法，提高思维的灵活性和发展性乃至鉴别错解、激发学习兴趣等各个方面都富有积极的作用。其中一些宝贵的解题经验和精辟见解也具有推广和使用价值。

希望本书能成为中学师生的好朋友。不妥之处，敬请批评指正。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一部分　代数

第二部分　立体几何

集合

第一部分　代数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

代数

第一节　集　合

知识要点

1. 集合、子集、真子集、交集、并集、补集的概念。

2. 空集、全集的意义，集合中的元素的确定性、互异性和无序性。

3. 属于、包含、真包含、相等关系的意义及有关的术语和符号。

4. 列举法、描述法及韦恩图的使用。

例题示范

例1　设 $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，$A\cap\overline{B}=\{3,5,7\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x<10,x\in N$ 且 $x\neq 2\}$。求：$\overline{A\cup B}$、A、B。

思路一：题目中出现的 $\overline{A}\cup B$、$\overline{A\cup B}$ 使我们容易联想到

“德·摩根定律”(即反演律)。事实上由$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x<10,x\in N,x\neq 2\}$及$A\cap B=\{2\}$易知$I=(A\cap B)\cup(\overline{A\cap B})=\{x|x<10,x\in N\}$。当全集被确认后,我们以各个元素的归属为思维的起点,结合题目中的条件可做出如下判断:$\because A\cap B=\{2\}$ $\therefore 2\in A$且$2\in B$; $\because \overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$ $\therefore 4、6、8\in B$且$\notin A$; $\because A\cap\overline{B}=\{3,5,7\}$ $\therefore 3、5、7\in A$且$\notin B$,而若$1\in A$且$1\in A\cap B$与$1\in A\cap\overline{B}$必居其一,这与条件矛盾,故$1\notin A$,同理$1\notin B$。利用同样的思路知$9\notin A$且$9\notin B$。综上所述知:$A=\{2,3,5,7\}$、$B\{2,4,6,8\}$,$\overline{A\cup B}=\{1,9\}$。

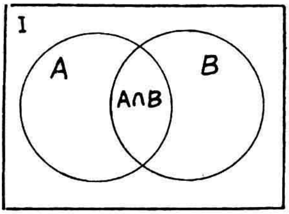

图 1—1

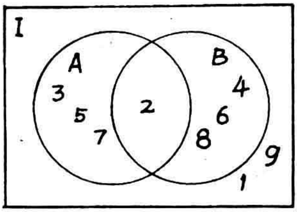

图 1—2

思路二:韦恩图为我们直观地了解集合与元素间的相互关系提供了一个有效的方法,也为本题的解答提供了更明快的方法,如图 1—1,只须明确图中不同的“领地”所代表的集合,再如图 1—2 将条件中的元素依次填入它该归属的区域,便可直观地得出解答。

$\cap$	B	$\overline{B}$
A	2	3,5,7
$\overline{A}$	4,6,8	1,9

图 1—3

思路三:由于题目所给出的条件和所求的内容涉及 A、B

两个集合及其交、并、补运算，因而可以考虑类似于课本中的习题那样，用列表的方式来解答。值得注意的是由于 $A\cup\overline{A}=I$，所以第一行以 A 与第二行的 $\overline{A}$ 的并便是全集。换句话说，表中包容了 I 中的全部元素，因此 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ 中的元素 1、9 只能填入表中 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 一栏。如图 1—3。

简评 补集的概念是建立在全集上的，因此弄清全集是由哪些元素构成非常必要。另外，反演律是转换交、并运算的重要工具，应引起足够的重视。利用韦恩图解决元素个数较少的集合问题是很方便也很直观的，但前提是你必须明确图中哪些区域表示哪个集合，你能从图 1—1 中找出 $\overline{A}\cap B$、$A\cap\overline{B}$ 所表示的区域吗？善于从已经完成的习题中，特别是教材中的习题中汲取“营养”—— 回顾和总结方法是做习题的一个重要环节和目的，但也是一个常常被练习者忽略的问题，思路三正是源于课本的思维，反之我们现在所“发现”的方法又可以运用在其他练习中。只是，这不应该仅仅停留在“套用”的水平上。

练习指导

1. 已知 $A\cap B=\{1,2\}$，$\overline{B}=\{3,4,7,8\}$，$\overline{A}=\{5,6,7,8\}$，求全集 I 与集合 A、B。

提示：① 由 $I=(A\cap B)\cup(\overline{A\cap B})=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cup\overline{B})$ 得出全集，再逐个判断各个元素的归属。

② 在韦恩图中标示各个元素。

③ 列表求解时，不一定要列出“$\cap$”，本题如图 1—4 上下两行为 A 和 $\overline{A}$，左右两列为 B 和 $\overline{B}$ 即可。

	B	$\overline{B}$
A	1,2	3,4
$\overline{A}$	5,6	7,8

图 1—4

	B	$\overline{B}$
A	$-2\leqslant x<5$	$x>8$
$\overline{A}$	$x<-2$	$5\leqslant x\leqslant 8$

图 1—5

2. 已知全集 $I=R, A\subset I, B\subset I, A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<5\}, \overline{B}\cap A=\{x\mid x>8\}, \overline{A}\cap\overline{B}=\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 8\}$，求 A、B。

提示：① 集合元素是无穷多个时同样可以列表求解，如图 1—5。

② 还可以考虑在数轴上表示集合的范围来求解，这和韦恩图可谓“异曲同工”。

例 2 设 a、b 是两个实数，且 $A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in Z\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 都是坐标平面 XOY 内的点集，讨论是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 与 $(a,b)\in C$ 同时成立？

思路一：解答数学题的一个重要前提是审题，弄清题目中数学语言叙述的条件，本题要求讨论的是 a、b 的存在与否，有两个约束条件：一是使 $A\cap B\neq\varnothing$，二是点 $(a,b)\in C$。先考察满足第一个条件 A 交 B 非空的 a、b 应具有何种约束形式，若存在 a、b 使 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}n=m\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$ 有整数解，代入消元可得

$b=3n^2-na+15$ ①

再考察满足后一个条件：$(a,b)\in C$ 意即存在 a、b 使

$a^2+b^2\leqslant 144$ ②

能够同时满足①、②的有序实数组 (a,b) 即为所求，联立①、②得 $a^2+(3n^2-na+15)^2\leqslant 144$，整理后得：

$(n^2+1)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$ ③

这是一个关于 a 的一元二次不等式，利用二次函数的图象知识可知：$\because n^2+1>0$ 且 $\Delta_a=-36(n^2-3)^2<0$，故上式左端 >0，这与实际推得的③矛盾，$\therefore$ 满足条件的实数 a、b 是不存在的。

思路二：在思路一中得出 $na+b-(3n^2+15)=0$ （*）

$3n^2-na+15-b=0$

$36n^2-12an+180-12b=0$

$6n$ $(6n-a)^2-a^2+180-12b$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

后，可对关于 n 的二次三项式乘以 12 再配方：

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant (6n-a)^2 \\
&= a^2 + 12b - 180 \\
&= a^2 + b^2 - b^2 + 12b - 180 \\
&= a^2 + b^2 - 144 - (b-6)^2 \\
&\leqslant -(b-6)^2 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

得：$\begin{cases} b - 6 = 0 \\ 6n - a = 0 \\ a^2 + 12b - 180 = 0 \end{cases}$

从而 $\begin{cases} b = 6 \\ a^2 = 108 \\ n = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

此中 $n = \pm\sqrt{3}$ 不是整数，这一矛盾说明，满足条件的 a、b 不存在。

在思路二得出（ * ）之后，如果你知道一些有关基本不等式的知识的话，那么还可以得到以下解法。

思路三：
$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant (6n-a)^2 \\
&= a^2 + 12b - 180 \\
&= a^2 + (6\sqrt{2})(\sqrt{2}b) - 180 \\
&\leqslant a^2 + \frac{1}{2}(72 + 2b^2) - 180 \\
&= (a^2 + b^2) - 144 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

得：$6\sqrt{2} = \sqrt{2}b$，且 $6n - a = 0$，且 $a^2 + 12b - 180 = 0$. 以下同思路二。

思路四：在思路二得出（ * ）后，有：

$$
\begin{aligned}
0 &= na + b - (3n^2 + 15) \\
&\leqslant \sqrt{n^2+1} \cdot \sqrt{a^2+b^2} - (3n^2 + 15) \\
&\leqslant 12\sqrt{n^2+1} - 3n^2 - 15
\end{aligned}
$$

$$=-3(\sqrt{n^2+1}-2)^2\leqslant 0$$

得　$n=\pm\sqrt{3}$ 不是整数，故满足条件的 a、b 不存在。

这里的 $na+b=\sqrt{(na+b)^2}=\sqrt{n^2a^2+2abn+b^2}\leqslant\sqrt{n^2a^2+a^2+n^2b^2+b^2}=\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$，仍使用了基本不等式。

思路五：首先对于 B 有 $y_B=3[(1+m^2)+4]\geqslant 12\sqrt{1+m^2}$，等号当且仅当 $1+m^2=4$ 即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时成立，由 m 为整数知上述不等式不能取等号，则

$$y_B>12\sqrt{1+m^2}\qquad ④$$

如 $(a,b)\in C$，即存在整数 n，使得关于 a、b 的方程组

$$\begin{cases}na+b=y & (L)\\ a^2+b^2=144 & (C)\end{cases}$$

总有实数解，其充分必要条件是圆 (C) 的中心到直线 (L) 的距离不大于圆的半径，即 $12\geqslant d=\dfrac{|y|}{\sqrt{1+n^2}}$

即：　$|y_A|\leqslant 12\sqrt{1+n^2}\qquad ⑤$

若 $A\cap B\neq\varnothing$，必存在 $m=n=x$，使④、⑤中的 y 同时成立，但 $12\sqrt{1+x^2}\geqslant y_A=y_B>12\sqrt{1+x^2}$，这一矛盾说明同时满足条件的 a、b 不存在。

这一思路涉及不等式、解析几何的部分知识，读者可以在学过以上内容后再来回顾上述思路。另外上述思路的一个重要步骤是得出⑤，下面再介绍几个求⑤的方法。

思路六：由不等式 $a_1b_1+a_2b_2\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

得：$|y|=|na+b|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{1+n^2}\leqslant 12\sqrt{1+n^2}$

思路七：要使直线 $(L)\cap(C)\neq\varnothing$，当且仅当圆 (C) 至少且有一点在直线上，取圆上这一点 $(12\cos\theta,12\sin\theta)$ 代入直线

(L)

$$|y| = |n(12\cos\theta) + 12\sin\theta|$$
$$= 12\sqrt{1+n^2}\,|\sin(\varphi+\theta)|$$
$$\leqslant 12\sqrt{1+n^2},$$

当然这一思路又涉及了三角知识。

思路八：把(L)化为$b = y - na$代入(C)或$a^2+b^2\leqslant 144$得关于a的方程：$(1+n^2)a^2 - 2nya + (y^2-144) = 0$或不等式$(1+n^2)a^2 - 2nya + (y^2-144)\leqslant 0$总有实数解，其判别式非负：$\Delta = 4[144(1+n^2) - y^2] \geqslant 0$ 得 $|y| \leqslant 12\sqrt{1+n^2}$。

当然，纯粹的解析几何知识的利用，亦可形成下述思路。

思路九　在方程组$\begin{cases} y = ax + b \\ y = 3x^2 + 15 \end{cases}$中消去$y$得：

$3x^2 - ax + 15 - b = 0$

$\because A \cap B \neq \varnothing$

$\therefore$ 必须有 $\Delta = a^2 - 12(15-b) \geqslant 0$，即 $b \geqslant 15 - \dfrac{a^2}{12}$。

在aOb直角平面上，方程$b = 15 - \dfrac{a^2}{12}$的图象为一条抛物线，则不等式$b \geqslant 15 - \dfrac{a^2}{12}$新确定的点$(a,b)$是位于上述抛物线上及其外部所在区域上。再考察圆$a^2+b^2=144$与上述抛物线的关系。当$-1\leqslant a\leqslant 12$时，$15-\dfrac{a^2}{12}\geqslant 15-12>0$，且$(15-\dfrac{a^2}{12})^2 - (144-a^2) = (a^2/12-9)^2 \geqslant 0$　$\therefore 15-\dfrac{a^2}{12}\geqslant\sqrt{144-a^2}$，此表明圆$a^2+b^2=144$在抛物线$b = 15-\dfrac{a^2}{12}$的内部，并且仅当$a^2/12=9$，即$a=\pm 6\sqrt{3}$时，圆与抛物线相切，故点$(a,b)$要同时满足题中两个条件，只有以上两切点

$(-6\sqrt{3},6)$、$(6\sqrt{3},6)$，代入 $3x^2-ax+15-b=0$ 得 $x=\pm\sqrt{3}\notin Z$，故实数 a、b 不存在。

简评　思路一是典型的交集法，题目中两个约束条件分别确定了两个点集——满足 $A\cap B\neq\varnothing$ 的点集与满足 $(a,b)\in C$ 的点集，取其交集即为所求，值的注意的是，本题并非求 $A\cap B\cap C$ 或判断 A、B 的交集是否为 C 的子集。

有许多数学问题，它的解是由几个条件决定的，每一个条件都可以确定出某种元素的一个集合，它们的交集的元素就是我们所要求的解。利用求交集的思想来解题的思路叫交集法。

思路三至思路九涉及了一些尚未学到的知识，仅供参考。

练习指导

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=7,x\in N,y\in N\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=3,x\in N,y\in N\}$，求 $A\cap B$.

提示：本题可作为使用交集法的一般练习。由题意 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$。此中满足 B 中约束条件的仅 $(5,2)$。

2. 已知集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$，求实数 a 的值和 $A\cup B$。

提示：由题意 $a^3-2a^2-a+7=5$，解之得 $a=1$ 或 -1 或 2，但这仅仅满足了 A 中要求。将 a 的三个值分别代入 B 中可知仅 $a=2$ 时符合，此时 $A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$。

自测练习

1. 设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,6\}$。那么集合 $\{2,7,8\}$ 可以表示成(　　)

(A)$M \cup N$　　(B)$\overline{M \cup N}$

(C)$M \cap N$　　(D)$\overline{M \cap N}$

2. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leqslant 0\}$ 与 $B = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leqslant 0, a \in R\}$ 满足 $B \subseteq A$，求 a 的取值范围。

3. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid \dfrac{y-3}{x-2} = a + 1\}$，$B = \{(x, y) \mid (a^2 - 1)x + (a - 1)y = 15\}$，问当 a 取什么实数时，$A \cap B = \varnothing$？

第二节　映射与函数

3　12

$3 \le 2a \le 6$

$6 \le 4a \le 12$

知识要点

1. 映射的定义，函数的近代定义，象和原象的概念。

$-4 \le -a-b \le -2$

2. 区间的有关术语与符号。

3. 函数的图象、定义域、对应法则、值域及表达式的有关概念。

$4a+2b$

$2 \le a+b \le 4$

例题示范

$1 \le a-b \le 2$

例 1　设 $f(x) = ax^2 + bx$，且 $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$，$2 \leqslant f(1) \leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围。

思路一：先弄清 $f(-1) = a - b$，$f(1) = a + b$，$f(-2) = 4a - 2b$ 是很自然的，由于不能简单地对不等式范围进行加、减运算，故只能寻找 $f(-2)$ 用 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 的表达形式（即线性关系式）。在不甚明确的时候，可以采用待定系数法：令 $f(-2) = Af(-1) + Bf(1)$，代入可得 $4a - 2b = A(a - b) + B(a + b)$

$$4a - 2b = (A + B)a + (-A + B)b$$

比较此等式两端 a、b 的系数可得

$$\begin{cases} A + B = 4 & ① \\ -A + B = -2 & ② \end{cases}$$

① + ② 得 $2B = 2, B = 1$，代入 ① 得 $A = 3$。

$\therefore f(-2) = 3f(-1) + f(1)$

而 $3 \leqslant 3f(-1) \leqslant 6, 2 \leqslant f(1) \leqslant 4$

故 $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$

思路二：寻找 $f(-2)$ 与 $f(1)$、$f(-1)$ 三者之间的线性关系式，也可以考虑较为纯粹的代入替换：由于 $a - b = f(-1)$，$a + b = f(1)$，$4a - 2b = f(-2)$，思维的焦点可以倾向于 a、b 与 $f(1)$、$f(-1)$ 之间的关系。

事实上由方程组 $\begin{cases} a - b = f(-1) & ① \\ a + b = f(1) & ② \end{cases}$

① + ② 得 $2a = f(-1) + f(1)$

$\therefore a = \frac{1}{2}[f(-1) + f(1)]$ ③

② − ① 得 $2b = f(1) - f(-1)$

$\therefore b = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]$ ④

将 ③、④ 代入得：

$$f(-2) = 4 \cdot \frac{f(-1) + f(1)}{2} - 2 \cdot \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

则有 $f(-2) = 3f(-1) + f(1)$，以下同思路一。

思路三：上述关系式还可以从方程模式出发展开思维。对方程组 $\begin{cases} a - b - f(-1) = 0 \\ a + b - f(1) = 0 \\ 4a - 2b - f(-2) = 0 \end{cases}$

可视为 a、b、x 的齐次线性方程组，且 $x = 1$，故有非零解，则系数行列式的值为零(此知识详见高二代数行列式一章)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com