工程数学

概率论与数理统计习题解答

浙江大学数学系高等数学教研组编

一九八〇年二月

这是我组编写的《工程数学——概率论与数理统计》（由人民教育出版社出版，1979年3月第1版，1979年9月第1次印刷）一书的习题的解答。题解中错误不当之处，请读者批评指正。

浙江大学数学系高等数学教研组

1980年2月

目　　录

习　题　解　答

第一章　概率论的基本概念…………………………　1
第二章　随机变量及其分布…………………………　15
第三章　多维随机变量及其分布……………………　30
第四章　随机变量的数字特征………………………　41
第五章　大数定律和中心极限定理…………………　55
第六章　随机过程的基本知识………………………　59
第七章　平稳随机过程………………………………　62
第八章　线性系统对随机输入的响应………………　66
第九章　样本及其分布………………………………　72
第十章　参数估计……………………………………　74
第十一章　假设检验…………………………………　83
第十二章　方差分析和回归分析……………………　91

习　　题

第一章　习题…………………………………………　95
第二章　习题…………………………………………　99
第三章　习题…………………………………………105
第四章　习题…………………………………………108
第五章　习题…………………………………………113
第六章　习题…………………………………………114
第七章　习题…………………………………………115
第八章　习题…………………………………………118
第九章　习题…………………………………………119
第十章　习题…………………………………………120
第十一章　习题………………………………………124
第十二章　习题………………………………………130
附：教材勘误表………………………………………132

习 题 解 答

第一章　概率论的基本概念

5.解：因为$\overline{A}=S-A=\{1,5,6,\cdots,10\}$，$\overline{B}=\{1,2,6,7,\cdots,10\}$，$\overline{C}=\{1,2,3,4,8,9,10\}$，所以

(1) $\overline{A}B=\{5\}$　　　　(2) $\overline{A}\cup B=\{1,3,4,\cdots,9,10\}$

(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$

(4) $\overline{A\,\overline{BC}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\overline{A}=\{1,5,6,\cdots,10\}$

(5) $\overline{A(B\cup C)}=\overline{A\{3,4,5,6,7\}}=\overline{\{3,4\}}=\{1,2,5,6,\cdots,10\}$ 】

6.解：(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$

$$=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x<\frac{1}{4}\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

(2) $A\cup\overline{B}=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x<\frac{1}{4}\right\}\cup$

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A}$

$$=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant 2\right\}$$

(4) $\overline{A}B=B-A$

$$=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,1<x<\frac{3}{2}\right\}$$ 】

7.解：由$ABC\subset AB$，得$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)$，但$P(AB)=0$故$P(ABC)=0$，从而由加法公式得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{5}{8}$$ 】

8. 解：随机试验E是任选3人，记录其纪念章的号码。10人中任选3人共有$\binom{10}{3}=120$种选法，此即为样本点总数。

(1) "最小的号码为5"（这一事件记为A）则其余两号码必大于5，它们选自6～10这5个数，共有$\binom{5}{2}=10$种选法，此即为A中所包含的样本点数，故

$$P(A)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

(2) "最大的号码为5"（这一事件记为B）则其余两号码必小于5，它们选自1～4这4个数，共有$\binom{4}{2}=6$种选法，此即为B中所包含的样本点数，故

$$P(B)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$ 】

10. 解：随机试验E为自11个字母中随机地接连取出7个字母。将字母作可分辨处理，易知样本点总数为A_{11}^{7}，今以B表示事件"排列结果为ability"则B中含有4个样本点（b有两种取法，两个i前后次序对调各为一种取法），故

$$P(A)=4\Big/A_{11}^{7}=\frac{1}{415800}=0.0000024$$

本题也可用推广的概率乘法定理来计算，即以A_1，B_2，I_3，L_4，I_5，T_6，Y_7表示依次取得字母a，b，i，l，i，t，y各事件，则所求概率为：

$$\begin{aligned}P\{A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7) &= P(A_1)P(B_2|A_1)\times P(I_3|A_1B_2)\\ &\times P(L_4|A_1B_2I_3)\times P(I_5|A_1B_2I_3L_4)\\ &\times P(T_6|A_1B_2I_3L_4I_5)\times P(Y_7|A_1B_2I_3L_4I_5T_6)\\ &=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\cdot 4!}{11!}\end{aligned}$$ 】

11.解：随机试验E为观察电话号码末四位数字，它与电话号码原来的位数无关。即不妨认为样本空间S包含0000～9999这10^4个样本点，其中事件A：“后面四个数全不相同”，它包含A_{10}^4个样本点，故所求概率为

$$P(A)=A_{10}^4\Big/10^4=0.504$$ ▌

12.解：随机试验E为从26个字母中任取2个进行排列，它共有A_{26}^2种排列法，此即为样本点总数，故所求概率为

$$p=55\Big/A_{26}^2=11/130$$ ▌

13.解法1：随机试验E为从5双(10只)不同的鞋子中任取4只，它共有$10\cdot9\cdot8\cdot7$种取法，此即为样本点总数。设以A表示事件“4只鞋子中至少有2只配对”则$P(A)=1-P(\overline{A})$，其中逆事件$\overline{A}$为“4只鞋子没有2只能配对”。现在来求$\overline{A}$中的样本点的个数。4只鞋子是一只一只取出的，第一只可以任意取，有10种取法，第二只只能取剩下的且除去和已取的第一只配对的另一只后的8只鞋子中任取一只，它有8种取法。同理第三只、第四只鞋子各有6、4种取法，所以$\overline{A}$中样本点的总数为$10\cdot8\cdot6\cdot4$，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{13}{21}$$

解法2：沿用解法1中的记号。$\overline{A}$中的样本点数即为自5双不同鞋子中任取4双，每双任取一只的不同取法的种数，它共有$\binom{5}{4}\cdot2^4$种取法，其中2^4来自每双取一只可有两种(左、右脚)取法。因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\binom{5}{4}\cdot 2^4\Big/\binom{10}{4}$$

$$=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

解法3：沿用解法1中的记号。设$\overline{A}$中的点为：所取的4只鞋子中左脚有k只（$k=1,2,3,4$），则另$4-k$只右脚只能在其余的$5-k$双鞋子中去取。故$\overline{A}$中的样本点数为

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}=80$$

所以 $$P(A)=1-P(\overline{A})=1-80\Big/\binom{10}{4}=\frac{13}{21}$$

解法4：沿用解法1中的记号。又设A_1为事件“取出的4只鞋子中恰有二只配成一双”，A_2为事件“取出的4只鞋子恰配成2双”，即有

$$A=A_1\cup A_2,\ 且 A_1A_2=\varnothing$$

A_1中的样本点数即为自5双不同鞋子中任取1双，同时在另外4双鞋子中任取不能配对的2只鞋子的不同取法的种数，它共有$\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]$种取法。即有

$$P(A_1)=\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]\Big/\binom{10}{4}$$

而A_2中的样本点数，即为自5双不同鞋子中任取2双的不同取法的种数，它共有$\binom{5}{2}$种取法。即有

$$P(A_2)=\binom{5}{2}\Big/\binom{10}{4}$$

所以 $$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{13}{21}$$ 】

14.解：（1）以A表示事件“至少有一人生日是10月1

日”，则$\overline{A}$是“没有一人生日是10月1日”。

样本点总数为365^{500}，$\overline{A}$含样本点364^{500}个，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(364/365)^{500}=0.746$$

(2) 设每人生日在哪一个月里是等可能的。以A表示事件“至少有二人的生日在同一个月”则$\overline{A}$为“没有二人的生日在同一个月”。

样本点总数为12^4，$\overline{A}$含样本点A_{12}^4个，故

$$P(A)=1-A_{12}^4\Big/12^4=0.427$$ ▌

15.解：随机试验E为在6把钥匙中任取两把。以A表示事件“取出的两把是能打开门的钥匙”。

样本点总数为$\binom{6}{2}$，而A仅含1个样本点，故

$$P(A)=1\Big/\binom{6}{2}=\frac{1}{15}$$ ▌

16.解：随机试验为将3只球任意放到4只盒子中去。易知共有4^3种放置法，即样本点的总数为4^3。

以$B_i(i=1,2,3)$表示事件“杯中球的最大个数为i”。

B_1意味着每杯最多放一只球，共有A_4^3种放置法，故

$$P(B_1)=A_4^3\Big/4^3=\frac{3}{8}$$

B_3意味着3只球放在同一只杯子中，共有$\binom{4}{1}$种放置法，故

$$P(B_3)=\binom{4}{1}\Big/4^3=\frac{1}{16}$$

易知，$S=B_1\cup B_2\cup B_3$，且$B_iB_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\neq j)$

由概率的有限可加性，得

$$P(B_2)=1-P(B_1)-P(B_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$ 】

17.解：随机试验E为通过测试检出所有次品。10只晶体管中的4只次品管最多经10次测试即可完全检出。4只次品管出现的方式共有$\binom{10}{4}$种，此即为样本点的总数。

(1) 第4只次品管在第5次测试时检出则前4次检出了3只次品管，4只次品管出现的方式有$\binom{4}{3}$种，故

$$P\{\text{在第5次测试发现第4只次品管}\}=\binom{4}{3}\Big/\binom{10}{4}=\frac{2}{105}$$

(2) 同(1)有：

$$P\{\text{在第10次测试发现第4只次品管}\}=\binom{9}{3}\Big/\binom{10}{4}=\frac{2}{5}$$ 】

18.解：随机试验E为任意取9桶油漆交与定货人。共有$\binom{17}{9}$种交货方式，共中符合定货要求的有$\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}$种，故所求概率为

$$p=\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}\Big/\binom{17}{9}=\frac{252}{2431}$$ 】

19.解：

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)=0.28/0.4=0.7$$

同理　$P(B|A)=0.7$

由加法公式即知：$P(A\cup B)=0.52$ 】

20.解：随机试验E为在10只管子中取两次，每次任取一只，作不放回抽样。以A表示事件“发现第一只是好的”，以B表示事件“另一只也是好的”。样本空间共有10个样本点，当A发生以后，减缩的样本空间有10－1个样本点，而B中包含6－1个样本点，故有

$$P(B|A)=\frac{6-1}{10-1}=\frac{5}{9}$$ ▮

21.解：随机试验E为在10只管子中取两次，每次任取一只，作不放回抽样。以$A_i(i=1,2)$表示事件“第 i 次取出的是正品”因为是不放回抽样，故

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$

(2) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$

(3) $P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$

$=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)+P(\overline{A_1})\,P(A_2|\overline{A_1})$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$

(4) $P(\overline{A_2})=P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$=\frac{8}{45}+\frac{1}{45}=\frac{1}{5}$ ▮

22.解：设以$A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示事件“第 i 个人取得的是红球”。易知$P(A_1)=\frac{1}{10}$，又因 $A_2\subset\overline{A_1}$，故有 $A_2=\overline{A_1}A_2$。由概率的乘法公式可得

$$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

类似地有

$P(A_{10})=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_9}A_{10})$

$=P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2}|\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_9}|\overline{A_1}\cdots\overline{A_8})P(A_{10}|\overline{A_1}\cdots\overline{A_9})$

$=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{10}$ ▮

23.解：随机试验E是先由甲袋随机取一只球，将它放入

乙袋（试验 E_1），然后从乙袋随机取一只球(试验 E_2)合成的。

设以 H 表示事件"从甲袋取得的是白球"，以 A 表示事件从"从乙袋取得的是白球"。即有

$$A = A(H\cup\overline{H}) = AH\cup A\overline{H},\quad (AH)(A\overline{H}) = \varnothing$$

于是 $$P(A) = P(AH) + P(A\overline{H}) = P(H)P(A|H) + P(\overline{H})P(A|\overline{H})$$

而 $$P(H) = \frac{n}{m+n},\quad P(\overline{H}) = \frac{m}{m+n}$$

$$P(A|H) = \frac{N+1}{M+N+1},\quad P(A|\overline{H}) = \frac{N}{M+N+1}$$

得 $$P(A) = \frac{n(N+1)+mN}{(m+n)(M+N+1)}$$ ▌

24. 解法 1：设以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件"第 i 次接通"，以 A 表示事件"不超过 3 次接通"，则有

$$A = A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

易知 A_1，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是互不相容的。故有

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

而 $$P(A_1) = \frac{1}{10},\quad P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

故有 $$P(A) = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

当已知最后一位数字是奇数时，所求概率为

$$p=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

解法2：沿用解法1的记号。易知

$P(A)=1-P\{$拨号3次都接不通$\}$

$$=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=1-\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3}{10}$$

当已知最后一位数是奇数时，所求概率为

$$p=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$$ ▌

25.解法1：设以$A_i(i=1, 2, 3)$表示事件“透镜在第i次落下时打破”以A表示事件“透镜落下三次打破”。按题意：$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，而$A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$是互不相容的，故有

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

而已知$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}$，即有

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=[1-P(A_1)][1-P(A_2|\overline{A}_1)]P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{10})\frac{9}{10}$$

故 $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}+\frac{63}{200}=\frac{193}{200}$

解法 2：沿用解法 1 的记号。因为$\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，故有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=1-(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{193}{200}$$ 】

26.解：将部件自 1 至10编号，试验E为各部件装 3 只铆钉。设以$A_i(i=1,2,\cdots,10)$表示事件“第 i 号部件强度太弱”，若 3 只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上去，则A_i发生。由于从50只铆钉中任取 3 只装在第 i 号部件上共有$\binom{50}{3}$种取法，而强度太弱的铆钉仅有 3 只，它们都装在第 i 号部件上只有$\binom{3}{3}=1$种取法，故

$$P(A_i)=1\Big/\binom{50}{3},\quad i=1,2,\cdots,10$$

又因各A_i都是互不相容的，因此，10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p=P\left\{\bigcup_{i=1}^{10}A_i\right\}=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)$$
$$=10\times1\Big/\binom{50}{3}=\frac{1}{1960}$$ 】

27.解：设以$H_i(i=0,1,2,3)$表示事件“随机地取出 3 件乐器，其中有 i 件音色不纯”，H_0,H_1,H_2,H_3是S的一个分划。以A表示事件“这批乐器被接收”。已知一件音色纯的乐器，经测试，被认为合格的概率为0.99；而一件不纯的乐器，经测试，被认为合格的概率为0.05。并且 3 件乐器的测试是相互独立的，故

$$P(A|H_0)=(0.99)^3,\quad P(A|H_1)=(0.99)^2\times0.05,$$
$$P(A|H_2)=0.99(0.05)^2,\quad P(A|H_3)=(0.05)^3$$

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$，$P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3}$

$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3}$，$P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A|H_i)$

$=0.8574+0.0055+0.0000+0.0000=0.8629$ 】

28.解：设以$H_i(i=1,2,3)$表示事件"取到的一只产品是由机器B_i生产的"，以A表示事件"取到的一只是次品"，则有

$P(H_1)=0.25$，　$P(H_2)=0.35$，　$P(H_3)=0.40$

$P(A|H_1)=0.05$，$P(A|H_2)=0.04$，$P(A|H_3)=0.02$

故 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|H_i)P(H_i)=0.0345$

再由贝叶斯公式得

$P(H_1|A)=P(H_1)P(A|H_1)/P(A)=\frac{25}{69}$

这就是这一次品是由机器B_1生产的概率，同法可得它由机器B_2，B_3生产的概率分别为$\frac{28}{69}$及$\frac{16}{69}$。 】

29.解：设以C表示事件"传送出去的是信息A"，以D表示事件"接收到的是信息A"，由题意有

$P(C)=\frac{2}{3}$，　$P(\overline{C})=\frac{1}{3}$，$P(D|C)=0.98$，

$P(D|\overline{C})=0.01$

根据贝叶斯公式，得所求的概率为

$$P(C|D)=\frac{P(C)P(D|C)}{P(C)P(D|C)+P(\overline{C})P(D|\overline{C})}=\frac{196}{197}$$ 】

30.解：设以A表示事件“发出信号为‘·’”，则$\overline{A}$是事件“发出信号为‘—’”，以B表示事件“收到信号为‘不清’”，即有

$$P(A)=0.6,\qquad P(\overline{A})=0.4$$

$$P(B|A)=0.2,\quad P(B|\overline{A})=0.1$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.16$$

所以$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=0.75$

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=0.25$$

故推测原发信号为‘·’。 】

31.解：因4只球中有2只涂有白色，故$P(A)=\frac{1}{2}$，同理，$P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$。又4只球中有一只涂有白、红、蓝三色，故 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$，且$P(ABC)=\frac{1}{4}$，因此，$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$，$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$，$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$。但$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$ 】

32.解：因A、B相互独立，故$P(AB)=P(A)P(B)$，从而由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$$0.6=0.4+P(B)-0.4P(B)$$

即 $$P(B)=(0.6-0.4)/(1-0.4)=\frac{1}{3}$$ 】

33.证：由A、B的独立性，即 $P(AB)=P(A)P(B)$ 及 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$，得

$$P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$$
$$=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$$

移项得

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$$

故A，$\overline{B}$也相互独立。

将A与B的位置互相对调，即得$\overline{A}$，B也相互独立。既然$\overline{A}$，B相互独立，由已证得的结果$\overline{A}$，$\overline{B}$也相互独立。】

34.证：若A，B相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1}$$

若A，B互不相容，则

$$P(AB)=0 \tag{2}$$

由假设$P(A)P(B)>0$，故(1)，(2)不能同时成立，亦即A，B相互独立与A，B互不相容不能同时成立。】

35.解：设n只开关并联，以A_i表示事件"在C发生时，第i只开关闭合"，则由已知条件诸A_i相互独立，且$P(A_i)=0.96$，从而知当$n=2$时系统的可靠性为

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$$
$$=1-[1-0.96]^2=0.9984$$

又若使系统可靠性至少为0.9999，则必须

$$0.9999\leqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i})$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=1-(0.04)^n$$

即 $$n\geqslant\frac{\lg(1-0.9999)}{\lg 0.04}=2.86$$

故至少需要用3只开关才能使系统的可靠性至少为0.9999 】

36.解：设以$A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$表示事件"第i只继电

器闭合”B表示事件“L至R是通路”，即有

$$B=A_1A_2\cup A_4A_5\cup A_1A_3A_5\cup A_2A_3A_4$$

已知$P(A_i)=p(i=1,2,\cdots,5)$，故由(3.6)式和诸A_i相互独立，得

$$\begin{aligned}P(B)=&P(A_1A_2)+P(A_4A_5)+P(A_1A_3A_5)+P(A_2A_3A_4)\\&-P(A_1A_2A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&-P(A_1A_3A_4A_5)-P(A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&-P(A_1A_2A_3A_4A_5)=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5\end{aligned}$$ 】

38.解：设以$A_i(i=1,2,3)$表示事件“第i人能译出密码”，以B表示事件“密码译出”，则$\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，故由诸$A_i$相互独立得

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_1\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}\end{aligned}$$ 】

39.解：设以$H_i(i=0,1,2,3)$表示“飞机被击中i次”，H_0，H_1，H_2，H_3是S的一个分划。以A表示事件“飞机被击落”，则

$$\begin{aligned}P(H_1)=&0.4(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)0.5(1-0.7)\\&+(1-0.4)(1-0.5)0.7=0.36\\P(H_2)=&0.4\times0.5(1-0.7)+0.4(1-0.5)\times0.7\\&+(1-0.4)\times0.5\times0.7=0.41\\P(H_3)=&0.4\times0.5\times0.7=0.14\end{aligned}$$

由题意$P(A|H_0)=0$，$P(A|H_1)=0.2$，$P(A|H_2)=0.6$，$P(A|H_3)=1$，由全概率公式得