数学竞赛题库

修订版

JINTIDIAN BAN

初中数学竞赛金版题典

开明数学工作室 组编

作为数学普及活动的各种数学赛事，大到IMO，小到地方性的赛事，曾经润泽了众多的师生。课外数学活动，在启发数学的学习兴趣和提高解决数学问题的能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。也正因如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到了广大师生和家长的长期欢迎和支持。

开明出版社

数学竞赛题库

修订版

JINTIDIAN BAN

初中数学竞赛

金版题典

开明数学工作室 组编

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛金版题典/开明数学工作室．—北京：
开明出版社，2009.6

ISBN 978-7-80205-102-7

Ⅰ．初…　Ⅱ．开…　Ⅲ．数学课-初中-习题　Ⅳ．
G634．505

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 011211 号

策　　划　焦向英
项目执行　王秋寰
责任编辑　王秋寰

初中数学竞赛金版题典

组编　开明数学工作室
出版　开明出版社（北京海淀区西三环北路 19 号）
印刷　廊坊人民印刷厂
发行　新华书店北京发行所
开本　787×1092 毫米　1/16 开
印张　13
字数　333 千
版次　2005 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 2 版　2010 年 3 月第 2 次印刷
印数　5001-8000
定价　18.50 元

前　言

《数学竞赛金版题典》（修订版）终于要与大家见面了。作为编者，在连续几个月的辛苦工作之后，我们有很多话想对读者朋友们说。

前人说过，数学是“思维的体操”，“聪明人的游戏”。毫无疑问，作为数学普及活动的各种数学竞赛（大到IMO，小到地区性赛事），曾经润泽了众多的师生。数学课外活动在启发数学学习兴趣和提高解决数学问题的能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。在题目的解答过程中，学生们不仅能培养独立解决问题的能力，更能磨练意志，提高逻辑思维能力。也正因为如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到了广大师生和家长的长期欢迎和支持，大家对数学竞赛题的认识和热衷度也与日俱增。

这套《数学竞赛金版题典》是我社数学工作室邀请一些竞赛的奖牌得主和熟悉数学教学的一线教师联手编写而成的。丛书结合各学龄段数学竞赛的实际开展状况和知识点的难度设置，分为小学、初中、高中三册，从一些经典的题目出发，用“★”的多少来表征题目难度的阶梯变化。在题解部分，我们不仅注意了解答思路的连贯性和表述语言的严谨性，而且还从多个角度、多个解法入手，开拓了学生的视野，增强了学生对方法的理解，体现了知识间的内在联系与知识体系的完整性。

该书出版后受到了学生、教师、家长以及数学爱好者们的广泛好评。很多读者纷纷来电来信对该书的出版提出了宝贵的意见和建议，或针对某些具体的题目展开了热切的讨论。为了适应数学教学及数学竞赛的发展要求，打造一套优质的竞赛精品题典，回馈广大读者对我们的厚爱，我们重组了编写队伍，对《数学竞赛金版题典》进行了修订。

这次修订，听取了读者的反馈意见，针对原书高难度题目的数量偏多、总题量偏多而不方便设计学习方案的问题，对题目进行了筛选和重组。在修订版中，低等难度、中等难度和高等难度的题量

之比大致为 3 ∶ 4 ∶ 1，从而尽可能地适应于各个水平读者的需求。在中等难度的竞赛题上，我们本着典型性、新颖性和广泛性的目的进行挑选，并在解答上深入浅出、讲解与总结并重，力求达到能让读者触类旁通；在高等难度的竞赛题上，不求大而全，而是精心选择了一批在思路上能给读者带来很大启发的题目和解法。另一方面，丛书的总题量也有了一定的缩减，根据知识点的设置，考查每个知识点的题目数量尽量保持在 10 道题左右，以方便教师、家长以及学生安排教学和练习时间。同时，我们还选编了近几年涌现出来的一批优秀竞赛题，以使丛书更贴近时代的脉搏，读者可以在接下来的阅读中逐渐感受编者们的点点心意……

《数学竞赛金版题典》是我们呈献给广大数学爱好者的礼物。我们衷心地希望这套修订版能为仍在数学竞赛中执着、顽强进取的你提供更多的指导和帮助，也希望读者朋友们能够一如继往地关心和支持我们，为本书提出更多更好的意见。

开明数学工作室

导读

分析

对题目的类型进行划归,并对题目的解答给出了方法提示和重、难点分析。

解答

给出了题目详细的解答步骤和过程，多种方法的比较和综合运用，突出了知识间的内在联系。

评注

对解题过程中应用的定理和难点总结说明和概括，并对一些一般性重要结论进行点拨。

目　　录

第一章　代　数

第二章　几　何

第三章 数 论

第四章 组合问题

附 录

第一章 代 数

01 有理数与实数

要了解数学这门科学，必须了解其严格的符号系统. 在数学里，文字的表述远不及符号方便，因此在本节开篇之前，我们先来认识几个简单且常用的符号.

我们用 $\mathbf{R}$ 代表实数的全体，符号"$\in$"表示某数在这个全体之中，用"$\notin$"或"$\overline{\in}$"表示某数不在这个全体之中，如：$x\in\mathbf{R}$ 表示 x 是实数. 此外，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数的全体，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数的全体，如：$2\in\mathbf{Z}$，$2\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}\notin\mathbf{Z}$.

正整数的全体我们用 $\mathbf{Z}_+$ 表示，负有理数用 $\mathbf{Q}_-$ 表示，其余类似. 读者可以自己举例熟悉.

在数轴上一段连续的长度用区间表示，如：区间$[0,1]$表示数轴上不小于 0 且不大于 1 的部分. 区间符号含义对照如下：

$x\in[a,b]$表示 $a\leqslant x\leqslant b$；

$x\in(a,b)$表示 $a<x<b$；

$x\in[a,b)$表示 $a\leqslant x<b$；

$x\in(a,b]$表示 $a<x\leqslant b$.

除了小学所学的 0、正整数和分数以外，我们第一次接触到负数的概念，并开始学会用"相对"的思考方法来看问题，负数并不是子虚乌有，它是一个和正数平行且相对的概念. 数轴和绝对值概念的引入，比较两个数的大小则有了一个统一的标准，也给有理数的四则运算规定了相应的方法.

实数则在有理数的范围上再次进行扩展，由此，我们才真正了解了数轴上所有数的概念. 在初中数学中，实数的概念最重要的应用就是二次根式，课本上对这部分知识的讲述已经足够详尽，不再赘述.

★[例 1] (1)请写出符合下列条件的数.

最小的正整数，最大的非正整数，绝对值最小的实数.

(2)$a,b\in\mathbf{Q}$，如果 a,b 满足下列条件，写出它们的关系.

①$a+b=0$；②$ab=0$；③$ab=1$；④$ab>0$；⑤$ab<0$.

【分析】 这个题属于最基本的概念题，答案也很明显.

【解答】 (1)1，0，0.

(2)①a,b 互为相反数；

②a,b 中至少有一个是 0；

③a,b 互为倒数；

④a,b 同号；

⑤a,b 异号.

【评注】 这道题的精华在于第(2)题提出了一种思想，即用简洁的符号语言来表达我们的意思，如：要说明"a,b 中至少有一个是 0"，就可以用一个简单的式子"$ab=0$"来表达，题目虽然简单，但是这种思想却需要我们去深入领会，一个式子甚至以后的一段符号语言到底等价于什么样的数学语言，数学能力的培养就是从逐渐领会这样的思想开始的. 因此千万不可忽视本题中所透露出的思想.

★[例 2] 若 x、y、z 为整数，且 $|x-y|^{2003}+|z-x|^{2003}=1$，则 $|z-x|+|x-y|+|y-z|$ 的值是多少？

【分析】应用绝对值解决数学问题需要把握的核心就是绝对值不小于 0，因此在思考问题时要时刻把握这条性质．

【解答】$|x-y|\geqslant 0$，$|x-y|^{2003}\geqslant 0$，同理，$|z-x|^{2003}\geqslant 0$，且二者都为整数，故一个为 0 另一个为 1，也就是说 x,y,z 中有两个相同，另一个和它们相差 1，故三者分别取差的绝对值相加应该有 2 个 1 和 1 个 0，即 $|z-x|+|x-y|+|y-z|$ 的值为 2．

【评注】让我们来看看绝对值的基本性质在本题中的应用．根据绝对值不小于 0 的性质，可以发现“$|x-y|^{2003}+|z-x|^{2003}=1$”所包含的信息：即这个式子中的两个绝对值一个为 0 一个为 1．后面的解法运用了一点小技巧，一般的解法是设 $x=y$，$x-z=1$ 或者 -1，或者 $z=x$，$x-y=1$ 或者 -1，分情况讨论，但是这样是没有必要的．要学会从整体来看这个问题，无非就是三个数两个一样，还有一个比它们大 1 或者小 1，差的绝对值肯定是 1，这样问题也就迎刃而解了．

★★[例 3] 已知：$abc\neq 0$，且 $M=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$，当 a、b、c 取不同的值时，M 有几种不同的取值？

【分析】运用绝对值解题时，一方面可以像上一题那样利用绝对值的基本性质解题，同时也可以考虑将绝对值符号去掉后再进行解答．这里就需要运用分类讨论的思想了．所谓分类讨论思想，就是将原有的信息拆分成若干种便于讨论和解答的信息，使得解答更有条理也更方便．

【解答】由于 a,b,c 都不为 0，且 $\frac{|a|}{a}$ 的值只为 1 或者 -1，这就提示我们要根据字母的正、负进行分类讨论．

若 a,b,c 全正，则 $M=1+1+1+1=4$；

若 a,b,c 有 2 个正的 1 个负的，则 $abc<0$，$M=1+1+(-1)+(-1)=0$；

若 a,b,c 有 1 个正的 2 个负的，则 $abc>0$，$M=1+(-1)+(-1)+1=0$；

若 a,b,c 全负，则 $abc<0$，$M=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$．

综上所述，M 一共有 $4,0,-4$ 三种取值．

【评注】需要注意的是，本题所运用的分类讨论思想进一步深化，即整体分类思想．在解题时没有必要把 a,b,c 哪个是正的哪个是负的一一列出，因为在本题中 a,b,c 三者是互相等价的，所以只要根据这三个字母整体上的正负来进行讨论即可．有的人一听到分类讨论，就觉得一定要非常详细地把每种情况都列举出来，其实这是不必要的，如何分类应该根据题目的需要寻找适当的分类方法．

★[例 4] 对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，定义运算 $a\oplus b=a(2a+3b)$，试给出以下几个式子的结果：

(1)$3\oplus 5$；(2)$3\oplus 5\oplus 1$；(3)$(3\oplus 5)\times(2\oplus 4)$；(4)$3\oplus(-1)$；(5)$(a\oplus b)\times(a\oplus c)$．

【分析】这种题一般称为新定义运算．新定义运算，顾名思义就是用特定的符号表示不同于我们往常意义上的运算法则，可以是我们熟知的加、减、乘、除、乘方、开方的运算，也可以是我们根本没接触过的运算。解决这类题目，就要读清楚题目所给的信息，搞明白题目所给的“定义”到底是怎么一回事．

【解答】(1)$3\oplus 5=3\times(2\times 3+3\times 5)=63$；

(2)$3\oplus 5\oplus 1=63\times(2\times 63+3\times 1)=8127$；

(3)$(3\oplus 5)\times(2\oplus 4)=63\times 2\times(2\times 2+3\times 4)=2016$；

(4)$3\oplus(-1)=3\times(2\times 3+3\times(-1))=9$；

(5)$(a\oplus b)\times(a\oplus c)=a(2a+3b)\times a(2a+3c)=4a^4+6a^3b+6a^3c+9a^2bc$．

【评注】一般而言，在解答上述题目时，很

容易受思维定势的影响，即将题目中的符号理解为已有的加减乘除的那个符号.做这种题目的时候要时刻记着新符号的含义，千万不可混淆了符号.

★★[例 5] 对于实数 a、b，定义二元新运算 $a\#b=(ma+n)b$，其中 m 和 n 是给定的实数，已知 $3\#5=75$，$4\#6=114$，求 $7\#10$.

【分析】这道题目的核心就在于根据已有的式子求出新运算中 m 和 n 的值，然后得出解答.

【解答】将已知代入新运算的公式，得到：

$$\begin{cases}5\times(3m+n)=75;\\6\times(4m+n)=114.\end{cases}$$

解二元一次方程组得：$\begin{cases}m=4;\\n=3.\end{cases}$

从而 $a\#b=(4a+3)b$，

所以 $7\#10=(4\times7+3)\times10=310$.

【评注】对于这样的题目，要善于分清常数和变量.如果分清了什么是常数，什么是变量，就可以根据已知条件求解常数，然后解题.

★★[例 6] 对于实数 a、b，定义二元新运算 $a\&b=pa^2+qab+rb^2$，其中 p、q 和 r 是给定的实数.

已知 $1\&3=16$；$2\&9=121$；$7\&5=144$.求 $10\&10$.

【分析】本题的解题思路和上一题类似，p、q、r 是常数，可以根据已知条件求解.

【解答一】将已知代入新运算的公式，得到：

$$\begin{cases}p+3q+9r=16,\\4p+18q+81r=121,\\49p+35q+25r=144.\end{cases}$$

解三元一次方程组得：$\begin{cases}p=1,\\q=2,\\r=1.\end{cases}$

$a\&b=a^2+2ab+b^2$，

所以 $10\&10=100+200+100=400$.

【解答二】注意到本题中三个等式的右边均为左侧两个数的和的平方，而原题式子中的 p，q，r 是被三个等式唯一确定的，所以可以迅速得出 $10\&10=400$.

【评注】本题的核心思想和前面几题没有本质的差别，都是所谓的新定义运算，因此要根据已有的条件求出常数，然后解答.从上面几道关于新运算的题目可以看出，在数学的学习中对于新思想、新方法的接纳尤为重要，一不小心很有可能陷入固有思维的怪圈，所以提醒大家要注意对这种题目的理解.

★★[例 7] 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$.

【分析】这是一道很经典的题目，其中涉及到了代数变形的一个重要思想，即拆项.

【解答】观察发现：

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

……

$$\frac{1}{99\times100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}.$$

所以

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$=1-\frac{1}{100}$$

$$=\frac{99}{100}.$$

【评注】本题透露出一个基本结论：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.证明如下：$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$

$\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$. 当然，这样的式子也可以推广，看下面两个例子.

★★[例 8] 计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{99\times101}$.

【分析】观察，找规律.

【解答】$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})$,

$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$,

$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})$,

……

$\frac{1}{99\times101}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{99}-\frac{1}{101})$.

则$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{99\times101}$

$=\frac{1}{2}\times[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{101})]$

$=\frac{1}{2}\times\frac{100}{101}$

$=\frac{50}{101}$.

【评注】通过本题，又可以得出一个结论：$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$. 证明如下：$\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})=\frac{1}{k}\times\frac{(n+k)-n}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\times\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n(n+k)}$.

★★[例 9] 计算：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$.

【解答】$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})$,

$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})$,

$\frac{1}{3\times4\times5}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5})$,

……

$\frac{1}{8\times9\times10}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10})$.

则$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$

$=\frac{1}{2}\times[(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})+(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})+(\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{5\times6})+\cdots+(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10})]$

$=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{90})$

$=\frac{11}{45}$.

【评注】通过本题，可以得出一个结论：$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$. 证明如下：$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$.

★★★[例 10] 把 1,2,…,2000 这 2000 个自然数任意排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2000}$，使得 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{1999}-a_{2000}|$ 的和最大，则这个最大值是多少？

【分析】这个题略微有一些难度，肯定没有人会列出所有排列然后一个一个算，所以解题无非通过两个途径，一个是从简单情况入手分析一般规律，另一个是利用绝对值的概念整体考虑.

【解答】先考虑一般情况，将题目变成：把 1,2,…,n 这 n 个自然数任意排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$ 的和最大，则这个最大值是多少？

考虑 $n=3$ 的情况：$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$，最大值显然是 $|3-1|+|1-2|=3$；

考虑 $n=4$，$|3-1|+|1-4|+|4-2|=7$；

考虑 $n=5$，$|4-1|+|1-5|+|5-2|+|2-3|=11$.

根据特殊的情况，发现两个规律，一个是大小要相间排列，一个是大数和小数尽量要多次使用，只有大数减小数，绝对值才能尽量大.

再从整体考虑，1999 个绝对值的和要最大，考虑到每个绝对值相当于拿大数减小数，1999 个绝对值就产生了 1999 个大数作为被减数和 1999 个小数作为减数，而且其中有 1998 个数要使用两次，很容易的一个构想就是让大数尽量使用两次当被减数，而让小数尽量使用两次当减数，那么 1999 个大数就可以这么排：2000，2000，1999，1999，…，1002，1002，1001. 同样，1999 个小数就应该排成：1，1，2，2，…，999，999，1000，而且其中正好有 1998 个数使用过两次. 那么绝对值之和就是大数之和减去小数之和：

(2000＋2000＋1999＋1999＋…＋1002＋1002＋1001)－(1＋1＋2＋2＋…＋999＋999＋1000)＝1999999.

可以给出这样的一个排列：

1001，1，2000，2，1999，3，1998，…，999，1002，1000.

★★★[例 11] 已知在等式$\dfrac{ax+b}{cx+d}=s$中，a,b,c,d 都是有理数，x 是无理数，求：

(1)当 a,b,c,d 满足什么条件时，s 是有理数；

(2)当 a,b,c,d 满足什么条件时，s 是无理数.

【分析】 注意到分子和分母本质上是相同的，都是一个有理数和一个无理数的乘积与另一个有理数的和，所以可以单独考虑分子进行分析. 考虑 $ax+b$，当 x 是无理数时，如果 $a\neq0$，则整体为无理数，根据这个条件入手来解题.

【解答】 (1)当 $a=0$ 时，只有 $c=0,d\neq0$ 时，$s=\dfrac{b}{d}$才是有理数，否则 $s=\dfrac{b}{cx+d}$为无理数.

当 $a\neq0$ 时，必然有 $c\neq0$，此时 $s=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$，其中$\dfrac{a}{c}$是有理数，$(cx+d)$是无理数，$\left(b-\dfrac{ad}{c}\right)$是有理数.

可见要使 s 为有理数，只有 $b-\dfrac{ad}{c}=0$，即 $bc=ad$.

综上所述，当 $a=c=0$ 且 $d\neq0$ 或 $a\neq0$ 且 $ac=bd$ 时，s 是有理数.

(2)当 $c=0,d\neq0$ 且 $a\neq0$ 时，s 是无理数.

当 $c\neq0$ 时，$s=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$，其中$\dfrac{a}{c}$ 是有理数，$(cx+d)$是无理数，$\left(b-\dfrac{ad}{c}\right)$是有理数.

所以当 $b-\dfrac{ad}{c}\neq0$，即 $bc\neq ad$，s 为无理数.

综上所述，当 $c=0,a\neq0,d\neq0$ 或 $c\neq0,ac\neq bd$ 时，s 是无理数.

【评注】 本题主要抓住了$(ax+b)$这一代数式的特性，同时采用了分类讨论的思想.

小 结

本节是代数部分的开篇，因此我们在选择题目时尽量选择了一些不需要高深的思想方法和复杂的变形技巧的题目，而着重于凸现一些在代数变形中常用的基本方法，例如：裂项相消求和、分类讨论、整体法，等等. 同时，在这一节中还设计了部分有理数和实数的题目. 当然，有理数和实数的知识远不只是这里所介绍的部分题目，有理数我们在数论部分会有更详细的叙述，实数当我们谈到根式时会有进一步的介绍. 而这部分姑且作为读者的启蒙吧，希望读者能从中得出一些体会，能逐渐领会出题目中透露的思想方法，这样才能为以后的学习打下坚实的基础.

02 整 式

本节连同以下三节主要介绍了代数恒等式的变形．在这几节里，涉及到综合思考的问题并不多，主要是根据基本的知识进行运算技巧方面的训练．整式、分式、无理式等都属于代数式，在代数里，不可避免地要遇到许多代数式的变形，这是代数里最重要的计算技巧．希望读者能够在这几节里细细体会，开拓思路，只有把基础掌握好了，才能在以后自由发挥．

本节的基础知识归纳如下：

$a+b=b+a$（加法交换律）；

$(a+b)+c=a+(b+c)$（加法结合律）；

$ab=ba$（乘法交换律）；

$(ab)c=a(bc)$（乘法结合律）；

$(a+b)c=ac+bc$（乘法分配律）；

$a^m\times a^n=a^{m+n}$；

$(ab)^m=a^mb^m$；

$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}(a\neq0)$；

$a^0=1(a\neq0)$．

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$（平方差公式）；

$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$（完全平方公式）；

$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$（立方公式）；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$（立方和、差公式）；

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$．

上面各个公式的证明请读者独立完成，作为接触本节所做的热身训练．

★[例 1] 若 x、y 为实数，且 $y<\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{2}$，化简：$|2y-1|-\sqrt{y^2-2y+1}$．

【分析】 本题考查的核心内容就是根式的意义和化简以及绝对值．

【解答】 由根式的意义可知：$x\geqslant2$ 且 $x\leqslant2$，所以 $x=2$，从而 $y<0+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$．

原式 $=(1-2y)-\sqrt{(y-1)^2}=(1-2y)-|y-1|=(1-2y)-(1-y)=-y$．

【评注】 本式中 y 是常量，因此只需化简到结果为 $-y$ 即可．

★[例 2] 当 $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ 时，求下列各式的值：(1) $x-\dfrac{1}{x}$；(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$．

【分析】 观察 x 的值，发现和一元二次方程的解的形式相似，考虑将 x 变形为某个等式．

【解答】 (1) $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$，所以 $2x-3=\sqrt{13}$，

两边平方可得：$4x^2-12x-4=0$，

即 $x^2-3x-1=0$，

两边除以 x 得：$x-3-\dfrac{1}{x}=0$，

即 $x-\dfrac{1}{x}=3$．

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2-2x\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+2=(x-\dfrac{1}{x})^2+2=9+2=11$．

【评注】 本题需要学习的是最基本的等式变形思想．但是这样的思想从何而来，归根结底还是对题目敏锐的嗅觉．观察到 x 的形式，尽量将其化为整式，才能得到解答．

★★[例 3] 已知 $a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=3$，求 $a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}$．

【分析】很多初学者看到本题的第一印象就是列一个三元的方程组然后求解，但是本题同时也给了我们一个提示，即从规律性中我们是否可以猜想 $a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}$ 的结果也是 3？

【解答一】令 $a=1+\alpha,b=1+\beta,c=1+\gamma$，则有：

$$\begin{cases}(1+\alpha)+(1+\beta)+(1+\gamma)=3,\\(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2+(1+\gamma)^2=3,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.\end{cases}$$

所以，$\alpha=\beta=\gamma=0$，即有 $a=b=c=1$，

故 $a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}=3$.

【解答二】$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)+3$

$=3-6+3=0$，

所以 $a=b=c=1$，

从而 $a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}=3$.

【评注】解答一是解决这类问题的通用方法，先把题中所给条件化成一个相对简单的形式，然后逐步化简，体现的是变形的基本功；解答二则是在我们猜想之后，巧妙地证明了 $a=b=c=1$ 的结论."猜想然后证明"这种思想在以后的解题中还会有很多应用.无论哪种方法，其核心都在于等式的变形，这也是整式这一节中相当重要的思想.

★[例 4] 已知 a,b,c,d 满足 $a+b=c+d$，$a^3+b^3=c^3+d^3$，证明：$a^{2003}+b^{2003}=c^{2003}+d^{2003}$.

【分析】这道题和上面一道题很像，读者可以应用上面题目介绍的方法来做一做，这里我们仍然作一个猜想，就是 $a=c,b=d$ 或者 $a=-b,c=-d$.有时候在解题中，揣测题目的答案然后证明也是一种很重要的解题技巧.

【解答】由已知并分解因式可得：

$(a+b)[(a+b)^2-3ab]=(c+d)[(c+d)^2-3cd]$.

①若 $a+b\neq0$，则得：$ab=cd$，于是

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$，

故 $a-b=c-d$ 或者 $a-b=d-c$，又 $a+b=c+d$，

有 $a=c,b=d$ 或者 $a=d,b=c$，这时都有 $a^{2003}+b^{2003}=c^{2003}+d^{2003}$.

②若 $a+b=0$，则 $c+d=0$，有 $a=-b,c=-d$，

所以 $a^{2003}+b^{2003}=0=c^{2003}+d^{2003}$.

★★[例 5] 已知 a,b,c,d 是正数，且满足 $a+b+c+d=4$.用 M 表示 $a+b+c,b+c+d,c+d+a,d+a+b$中的最大者，求 M 的最小值.

【分析】严格地说，这个题属于不等式的范畴.解这类求一组数中最大数的最小值的问题，其实就是要先确定要求的数在一个范围里，然后证明这个范围内的最小值是可以取到的.

【解答】由于 M 表示 $a+b+c,b+c+d,c+d+a,d+a+b$中的最大者，故有

$M\geqslant a+b+c$，

$M\geqslant b+c+d$，

$M\geqslant c+d+a$，

$M\geqslant d+a+b$.

四式相加可得：

$4M\geqslant3(a+b+c+d)$，

即 $M\geqslant\frac{3}{4}(a+b+c+d)=3$.

当 $a=b=c=d=1$ 时，M 有最小值 3.

【评注】在做这类题时，首先要明晰解题思路，即用一个不等式将所求的值和已知条件联系起来.充分挖掘题目所给的条件可以看到四个不等式，发现如果将它们全部相加，右边恰好可以求值.有了这样的思路，问题就迎刃而解了.

★★[例 6] 已知 $x+y+z=xyz$，证明：$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

【分析】恒等式证明最基本的思路是"由繁到简"(即由等式形式较繁的一边向另一边推导).

【解答】将左边展开，利用条件 $x+y+z=xyz$，将等式左边化简成右边. 注意在化简过程中尽量将一些形式上一样的式子放在一起处理.

因为 $x+y+z=xyz$，所以

左边 $=x(1-z^2-y^2+y^2z^2)+y(1-z^2-x^2+x^2z^2)+z(1-y^2-x^2+x^2y^2)$

$=(x+y+z)-xz^2-xy^2+xy^2z^2-yz^2-yx^2+yx^2z^2-zy^2-zx^2+zx^2y^2$

$=xyz-xy(y+x)-xz(x+z)-yz(y+z)+xyz(xy+yz+zx)$

$=xyz-xy(xyz-z)-xz(xyz-y)-yz(xyz-x)+xyz(xy+yz+zx)$

$=xyz+xyz+xyz+xyz$

$=4xyz=$ 右边.

证毕.

【评注】对复杂式子的化简本身就是一个探索的过程，在这个过程中不能因为式子复杂或者暂时看不出解题的思路就放弃解题. 相反，应该多从题目所给的已知条件入手. 例如：由 $x+y+z=xyz$ 就可以得出 $x=xyz-y-z$ 这样的式子. 同时还要注意等价的思想，这个我们以后会慢慢涉及到.

★★[例 7] 已知 $1989x^2=1991y^2=1993z^2$，$x>0$，$y>0$，$z>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证：$\sqrt{1989x+1991y+1993z}=\sqrt{1989}+\sqrt{1991}+\sqrt{1993}$.

【分析】等式的化简除了将复杂的一边化得简单，还有一种方法就是将两边同时都化成另外一个形式，本题采用的就是这样的方法.

【解答】令 $1989x^2=1991y^2=1993z^2=k$ $(k>0)$，则

$1989x=\frac{k}{x}$，$1991y=\frac{k}{y}$，$1993z=\frac{k}{z}$.

因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，所以

$\sqrt{1989x+1991y+1993z}$

$=\sqrt{k(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}=\sqrt{k}$.

又因为 $1989=\frac{k}{x^2}$，$1991=\frac{k}{y^2}$，$1993=\frac{k}{z^2}$，

所以 $\sqrt{1989}+\sqrt{1991}+\sqrt{1993}=\frac{\sqrt{k}}{x}+\frac{\sqrt{k}}{y}+\frac{\sqrt{k}}{z}=\sqrt{k}$，则 $\sqrt{1989x+1991y+1993z}=\sqrt{1989}+\sqrt{1991}+\sqrt{1993}$.

证毕.

【评注】这个题目如果硬算是有可能算出来的，当然过程不会简单. 采取“相向趋进”的方法（即将等式两边同时转化为同一形式），从过程来看简单明了，而且思路很清晰，但是这种方法并不是随便找到一个中介就可以使用的，一般可以先转化一边，看能化简成什么形式，然后再化简另外一边，这个方法比上题的方法又要难一些了. 希望读者能多体会.

★★[例 8] 已知 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，且 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，求证：$a=b=c=d$.

【分析】本题的证明需要逐步进行，可以考虑通过 $(a-b)^2=0$ 的形式来证明 $a=b$.

【解答】由已知得：$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$，

即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd=0$.

所以 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$，

故 $a^2-b^2=c^2-d^2=ab-cd=0$.

所以 $(a+b)(a-b)=(c+d)(c-d)=0$，

又 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，所以 $a+b\neq0$，$c+d\neq0$，因此 $a=b$，$c=d$.

又 $ab-cd=a^2-c^2=(a+c)(a-c)=0$，

所以 $a=c$，故 $a=b=c=d$ 成立.

证毕.

【评注】本题的技巧在于将题目已给的式子化成几个平方相加为 0 的形式，这样就可以迅速得到变量间的关系.

★[例 9] 证明：$(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3=3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$.