

數學美學思想史

The background of the book cover is a complex, abstract geometric design. It features a large, stylized compass rose in the upper right quadrant, with various geometric shapes and lines radiating from it. A ruler with numerical markings is visible in the lower left quadrant. The overall color palette is dominated by shades of green, blue, and white, with some darker, muted tones. The design is reminiscent of a technical drawing or a mathematical diagram.

徐炎章 · 吳開朗 · 唐 煌 · 周金才 著

曉園出版社

樣敬請指教
書並請採用

數學美學思想史

徐炎章 · 吳開朗 · 唐 煌 · 周金才 著

曉園出版社

國家圖書館出版品預行編目資料

數學美學思想史 / 徐炎章等著. ---初版. ---

臺北市:曉園, 1998[民 87]

面; 公分

參考書目:面

含索引

ISBN 957-12-0547-8(平裝)

1. 數學-哲學,原理 2. 美學

310.16

87011176



書 名 數學美學思想史

著 者 徐炎章. 吳開朗. 唐 煌. 周金才

發行人 黃旭政

發行所 曉園出版社有限公司

台北市羅斯福路三段 333 巷 20 號

電話 23676789(代表號) 傳真 23638833

郵撥帳號 10757344

門市部 台北市新生南路三段 96 號之 3

電話 23627375 傳真 23637012

印刷行 復大印刷廠

新聞局局版台業字第 1244 號

版 次 1998 年 10 月初版第一刷

版權所有・翻印必究

定 價 新台幣 350 元・港幣 100 元

ISBN 957-12-0547-8

Email: ufaf0130@ms5.hinet.net

內容提要

書中主要內容，是按照歷史發展的順序，介紹古今中外知名數學家對於數學美學思想的執著追求以及他們的數學審美觀。數學美學思想源遠流長，數學家們對於無限、悖論、公理、模型以及易圖和洛書等問題的研究由來已久，對此本書均設立專題進行分析與討論。至於在數學教育中如何培養青年學子的審美情趣以及在數學研究中為何發展直覺思惟能力，此乃是本書最後兩章的主要內容。

序

美學 (Aesthetik) 一詞，最早起源於德國哲學家鮑姆嘉通在 1735 年所寫的一篇拉丁語學位論文，但數學美學思想卻源遠流長，它幾乎是與數學一樣古老。數學美學思想最早顯現於古希臘數學家創建純粹數學的奠基工作之中，其後則是有一批知名數學家對於它由衷景仰，並且相繼對它進行深入研究與挖掘。英國著名數學家 G·H·哈代 (Hardy, 1877—1947) 曾經明確提出：“現在也許難以找到一個受過教育的人，對於數學美的魅力全然無動於衷。數學美可能很難定義，但它的確是一種真實的美，和任何其他的美一樣。”（《一個數學家的自白》）英國大數學家 B·羅素 (Russell, 1872—1970) 研究得更加深刻，他提出：“數學，如果正確地看待它，不但擁有真理，而且也具有至高的美。正像雕刻的美，是一種冷而嚴肅的美。這種美不是投合於我們天性的微弱方面，這種美沒有繪畫或音樂的那些華麗的裝飾，它可以純淨到崇高的地步，能夠達到嚴格的只有最偉大的藝術才能顯示的那種圓滿的境地。（《我的哲學的發展》）

數學美學思想貫穿於數學歷史發展的始終，憑借歷史發展的脈絡，本書概括地闡述了數學美學思想的發展與演變，探討了各個歷史時期世界知名數學家關於數學理論的美學標

準。自古希臘以來，數學家們對於無限、悖論、公理、模型這些重要理論的研究，步步深入，對於此類問題，本書均設立專章，全面討論它們的發展歷史與研究現狀。

早在16世紀英國數學家兼教育家比林斯利(Billingsley)就已經發現數學科學具有美化人性的功能，他曾經說過：“許多藝術都能夠美化人們的心靈，但卻沒有哪一門藝術能比數學更有效地修飾人們的心靈”

數學美學思想不僅能夠激發青年學生對於數學科學的愛好，也有利於增長他們的創造思惟能力。美國著名數學家兼教育家G·波利亞(Polya, 1887—1985)曾經深刻地寫道：“教師作為一個知識推銷員，他的責任就是使學生相信數學是有趣的……學生應當對所學習的材料感到興趣，並在學習活動中找到興趣，這是最佳的動機。”H·龐卡萊(Poincaré, 1854—1912)關於數學發明所需的條件，他曾一針見血地指出：“能夠作出數學發明的人，是俱有感受到數學中的秩序、和諧、對稱、整齊和神秘美等能力的人，而且只限於這種人。”關於數學美學思想對數學研究和數學教育的影響和作用，我們將其歸結為審美觀問題，這也就是本書最後兩章所研討的課題。

目 錄

第一章 數學美學思想的起源	1
第一節 什麼是美？	2
一、從詞源學中來尋覓美的含義	2
二、什麼是廣義的美？	3
三、古希臘人對於美的定義	3
四、我國美學界對於美的定義問題所進行的新探索	4
第二節 什麼是美學？	5
一、“Aesthetik”一詞的來源	5
二、“Aesthetics”一詞的含義	6
三、中國古代美學的淵源	6
四、近代應用美學的崛起	8
第三節 古希臘數學家已經從數學中認識到美、和諧、 簡單、明確以及秩序的存在	8
第四節 自然生態美與數學美	17
第五節 世界知名數學家論數學理論的美學標準	18
一、英國數學家羅素的美學標準	19
二、美國數學家布克豪夫的美學標準	20
三、英國數學家哈代的美學標準	20
四、美國數學家哈爾莫斯的美學標準	22
五、英國數學家阿蒂亞的美學標準	22
第六節 數學理論美學標準的基本要素	23
第七節 數學理論中真善美的辯證統一	30

第二章 數學在古希臘時代被人們珍視為一門藝術	33
第一節 畢達哥拉斯對於數學理論美學標準的研究	35
一、費爾瑪大定理的來龍去脈	38
二、費爾瑪小定理和似質數	43
三、一個不幸的費爾瑪猜想	44
四、音樂數學的起始	45
第二節 德謨克利特對於數學理論美學標準的研究	46
第三節 柏拉圖對於數學理論美學標準的研究	50
第四節 亞里斯多德對於數學理論美學標準的研究	52
第五節 歐幾里得對於數學理論美學標準的研究	55
第六節 神賜的比例——黃金分割	63
一、黃金數的定義及其美學價值	63
二、黃金數的推廣及其實際應用	67
第三章 中國古代數學的美學特徵及當時著名美學家兼 數學家對數學發展的貢獻	75
第一節 中國古代數學基本上屬於應用數學體系	76
第二節 中國古代數學的演算程序簡捷而巧妙	78
第三節 中國古代數學的推理具有鮮明的邏輯嚴謹性	81
第四節 易圖的數學結構	85
一、對於易圖的二進制解釋	88
二、對於易圖的組合論解釋	89
三、對於易圖的代數學解釋	90
四、對於易圖的幾何學解釋	90
五、對於易圖的矩陣論解釋	91
第五節 數學家稱“洛書”是三階幻方	92
一、構造幻方的羅伯法	96
二、構造幻方的行列交會法	97
第六節 《易傳》的簡單美	98

第七節 墨翟的美學觀點與墨氏幾何學.....	100
第八節 莊周的美學思想與他在數學上的無限觀	102
第四章 文藝復興以後一些著名數學家兼美學家對於 數學理論美學標準的研究	105
第一節 達·芬奇與帕喬里對於數學理論美學標準 的研究	106
第二節 笛卡爾對於數學理論美學標準的研究.....	108
一、笛卡爾創立解析幾何理論是爲了尋覓兩個對象 間恰到好處的協調	109
二、笛卡爾認爲數學家的任務是努力以美的形式去 描繪宇宙的發展規律	112
三、笛卡爾開創了科學研究藝術上的全新時代	114
第三節 萊布尼茲對於數學理論美學標準的研究	115
一、萊布尼茲提出了關於數學真理的“清晰明白” 的美學標準	116
二、萊布尼茲和牛頓異地同時發現了微積分正是和 諧美的體現，並且也反映出這種發現與其各自 美學標準的深刻聯繫	118
三、萊布尼茲認爲數學家選擇數學符號是爲了最大 限度地減少人們的思維勞動	121
四、數學符號是別具一格的“世界語”	122
第五章 數學家關於純粹數學美與應用數學美之爭辯	127
第一節 數學家談純粹數學之美	129
一、純粹數學在發展過程中總是和諧相關的.....	132
二、高等學校數學教育中的“老三高”和“新三 高”是純粹數學的支柱.....	140
三、純粹數學這棵大樹的枝桠總是向著奇異的方向 蔓延	151

四、離散數學的興起是現代純粹數學發展的另一特點	154
第二節 數學家談應用數學之美	157
一、信息論、控制論及其在數學教育中的應用	158
二、圖靈與圖靈機	159
第三節 著名物理學家談數學美	160
第六章 數學家的樂園 —— 無限	165
第一節 康托把無限理論發展到令人眩暈的高度	166
一、證明 $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$	166
二、證明 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$	167
三、證明 $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$	167
四、證明 $5 \times \aleph_0 = \aleph_0$	168
五、證明 $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$	168
六、證明有理數集的基數為 $\aleph_0$	169
七、證明任意一個線段上的點與整個一條直線上的點一一對應	171
八、證明無理數集的基數不等於 $\aleph_0$	172
九、證明康托定理	173
十、證明 $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$	174
十一、證明 $\aleph_0$ 大於任何一個有限基數	175
十二、證明 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$	175
十三、關於連續統假設的真偽	175
十四、證明 $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_5$	177
十五、證明 $\aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$	178
第二節 嘲諷和攻擊絲毫抹煞不了真理的光輝	179
第三節 無限終於“被關進了數學家的籠子”	180
第四節 潛無限論與實無限論之爭辯	181
第七章 數學大廈的裂縫 —— 悖論	183

第一節 悖論乃是不把自相矛盾的真相擺在桌面上	184
一、訴訟師悖論	184
二、上帝全能悖論	185
三、唐·吉訶德悖論	185
第二節 悖論的古典義以及對若干古典悖論的分析	186
一、芝諾悖論	186
二、撒謊者悖論	187
三、伽利拉宜悖論	188
第三節 悖論的現代定義以及當前學術界流行的一些 與此相等價的悖論定義	189
第四節 悖論在數學基礎研究中所產生的深遠影響	190
一、羅素悖論	191
二、羅素——策墨略悖論	191
三、康托悖論	192
第五節 由悖論而引起的三次數學危機	193
一、希伯索斯悖論與數學發展史上的第一次危機	193
二、貝克萊悖論與數學發展史上的第二次危機	195
三、羅素悖論和數學發展史上的第三次危機	196
第六節 由悖論而導致的三大數學學派的激烈爭辯以 及他們各派所堅持的美學標準	198
一、邏輯主義學派認為數學美表現為一首邏輯概念的 詩篇	198
二、直覺主義學派認為數學美在於構造性程序清晰	200
三、形式主義學派認為數學美在於形式上的簡單與 相容	201
第七節 數學理論體系至今尚未實現最終的完美與和諧	204
第八節 悖論破釋在數學教學以及企業管理和社會生 活中的效應	205

一、悖論破釋在數學教學中的效應	205
二、悖論破釋在企業管理和社會生活中的效應	209
第八章 數學公理的美學標準	211
第一節 數學公理化方法的本質	212
第二節 建立數學理論系統的抽象思維方法	214
第三節 數學公理學的分類	216
一、數以千計的數學家參與試證第五公設最後都以 失敗而告終	217
二、巴許和皮阿諾的工作與希爾伯特的名著相比只 差一步之遙	218
第四節 希爾伯特論數學公理的美學標準	220
一、希爾伯特認為數學公理是關於基本概念的隱定義	220
二、希爾伯特第一次所構造的幾何空間是一個多孔 空間	223
三、歐氏幾何與非歐幾何在公理系統上僅僅是一字 之差	224
四、蘇聯數學家 H·B·葉非莫夫所提出的關於公理 系統的三個基本問題實際上就是數學公理的美 學標準	226
第五節 希爾伯特設計公理系統的妙訣是極力追求數 學的簡單美	229
一、什麼叫做公理系統的獨立性？	229
二、數學家追求公理系統的簡單美已具有悠久的歷史 ..	229
三、我國中學幾何的公理系統與希氏系統之比較	230
四、要從整體上來欣賞希氏系統的簡單美	233
五、證明幾個“不證自明”的命題	233
第六節 布爾巴基學派的結構主義是對數學公理化方 法的進一步發展	239

一、布爾巴基學派更加強調數學公理化方法的美學標準.....	241
二、布爾巴基學派所面臨的新困難正好體現出數學公理化方法的局侷限性.....	243
第七節 韋爾系統與索克評論.....	244
一、韋爾思想與韋爾系統.....	245
二、法國數學家索克對於中學幾何公理的評論	247
第八節 數學公理化方法的應用價值.....	248
第九章 數學模型的美學標準	251
第一節 建立數學模型時要廣泛應用數學抽象法	253
一、理想化抽象可以使數學家獲得足夠精確的結果	254
二、哥尼斯堡七橋問題是應用數學抽象法的典範	254
三、數學模型在中學解題理論教學中的應用.....	256
第二節 數學模型的分類	263
一、描述性數學模型的特徵及其分類.....	264
二、確定性數學模型的應用範圍較廣.....	265
第三節 描述性數學模型所體現的數學簡單美.....	266
第四節 利用解釋性數學模型來闡明數學公理系統的和諧美	268
一、龐卡萊模型	269
二、球面模型	272
第五節 利用解釋型數學模型來闡明數學公理系統的簡單美	275
一、證明皮阿諾自然數公理系統的獨立性	276
二、皮阿諾自然數公理系統的簡化形式以及與其相等價的新系統.....	279
三、證明希爾伯特歐氏幾何公理系統的獨立性	280
第六節 利用解釋性數學模型來研究公理系統的範疇性	282

一、關於韋爾歐氏幾何公理系統的範疇性	283
二、關於黎氏幾何公理系統的範疇性	284
第十章 數學教育的審美觀	287
第一節 在數學教育的全過程中都要重視審美教育	288
第二節 充分利用與發揮數學教育表達形式的形式美	290
第三節 深入挖掘數學教育內容所固有的美	293
一、對於數學教育內容的表達要側重於數學思維方 法的分析和誘導	293
二、美國控制論專家維納提出學校教育要灌輸新穎 美好的東西	294
三、荷蘭數學家弗賴登塔爾提出學習數學即是學習 數學化	295
四、英國數學家兼教育家比林斯利提出數學能夠美 化人們的心靈	296
五、歐幾里德提出在幾何學中是沒有王者所走的康 莊大道的	297
六、在數學教育中要重視對稱變換在解題中的應用	299
七、在數學教育中要注意對數學題巧施變形	302
八、在數學教學中要注意優化解題步驟	304
九、在數學教育中要注意奇異常數在解題中的妙用	308
第十一章 數學研究的審美觀	313
第一節 數學發明即是選擇與識別	315
一、選擇的主要標準就是對於美的渴望	316
二、選擇的標準之一是追求簡單美	318
三、選擇的另一標準是尋求奇異美	320
第二節 數學研究中的直覺思維與無意識活動	321
一、法國數學家龐卡萊論直覺思維	322
二、法國數學家笛卡爾論直覺思維	324

三、直覺思惟的分類	325
四、法國數學家龐卡萊論無意識活動.....	327
五、夢境也是一種無意識活動	328
六、如何發掘與利用無意識活動	329
附 錄	333
I 參考文獻.....	333
II 注 釋.....	334
III 希臘字母表	357
IV 質數表	358
V 外國數學家人名索引	358
VI 數學美術學	365

第一章

數學美學思想的起源

現在也許難以找到一個受過教育的人，對於數學美的魅力全然無動於衷。數學美可能很難定義，但它的確是一種真實的美，和任何其他的美一樣。

——英國數學家 G·H·哈代

英國著名數學家 G·H·哈代 (Hardy, 1877—1947) 曾經說過：“現在也許難以找到一個受過教育的人，對於數學美的魅力全然無動於衷。”那麼，數學美的魅力究竟在哪裡呢？這是一個令人神往但又使人感到迷惑的問題。

在數學理論研究工作者、數學教育工作者以及從事數學專業學習的青年學生中，的確有不少人都曾被數學美的迷人魅力所誘惑，以致流連忘返。但也有一些人尚未揭開數學美的面紗，以致把學習數學視為畏途。

在數學中之所以會存在著一種真實的美，這不僅是因為在古代數學家中有不少人同時又是著名的美學家，而且是因為美的信息，普遍蘊涵於數學的概念與方法之中。美學 (Aesthetik) 一詞，最早來源於德國哲學家鮑姆嘉通在 1735 年所寫的一篇拉丁語學位論文，但美學思想卻源遠流長，幾乎是與數學一樣古老。數學美最早顯現於古希臘數學家創建純粹數學的奠基工作之中，其後則是有一批知名數學家對於數學美由衷景仰，並且相繼對其

性質、結構與功能等問題進行了深入地挖掘。本書試圖從探索數學美的迷人魅力入手，來深入研究數學的發展變化與美學的關係，並預測數學未來的圖景。

關於美學意識在數學理論中的體現，在歷史上很早就有一些學者進行過探討。畢達哥拉斯學派最早發現“黃金數”，並且認為支配整個自然界和人類社會的，最終都可歸結為數的比例與和諧。和諧美的光芒照亮了整個希臘藝術，以後兩千餘年的西方美學幾乎可以說都是對和諧的闡釋，並且和諧還為數學理論的發展提供了必要的動力。

第一節 什麼是美？

在本節裡，我們將著重討論如下四個問題：

一、從詞源學中來尋覓美的含義

“美”這個詞的含義究竟是什麼呢？先從詞源學中去尋覓美的約定與含義。

對於“美”，《辭海》的解釋是：“指味、色、聲的好，如味美，美觀，良辰美景。”《韋伯斯特大詞典》的解釋是：“美是人或事物中給感官以愉悅的提高心靈或精神的某種特質，或這些特質的集合”。無論哪種民族語言，美這個詞的確切語義都很接近。意大利語 bello，西班牙語 bello，葡萄牙語 belo，法語 beau，英語 beauty，源於拉丁語 bellus，意指“好”、“愉快”、“可愛”。德語 schön，瑞典語 skön，丹麥語 skøn，芬蘭語 kannis，愛沙尼亞語 kanunis，源於哥特語 skauns，意指“漂亮”、“儀表優雅”。梵文 kalyāna 表示“美”、“有益健康”。古希臘語 Χσλσς，