普通高等院校机电工程类规划教材

模态分析与实验

张 力 主编
林建龙 项辉宇 编著

清华大学出版社

普通高等院校机电工程类规划教材

模态分析与实验

清华大学出版社
北京

前　　言

少学时的“模态分析与实验”是普通高等院校机械工程专业学生的重要课程，我们在为少学时“模态分析与实验”选教材时发现，现有的教材内容繁多，主要适合研究生，且注重试验模态分析，缺少理论基础，缺少先进实验内容、手段和软件的介绍。为适应高校教改的趋势，我们根据全面更新的模态分析与实验课程教学内容和课程体系，有针对性地编写适用于30学时左右的模态分析与实验课程教材，为高等院校少学时模态分析与实验课程的教学提供新的选择。

本书共6章，分别为绪论、模态分析理论基础、时间历程的测量、动态测试后处理、模态分析在工程中的应用、模态分析实验，主要介绍了解析模态分析、实验模态分析、数字信号处理、模态参数识别、模型验证、模态参数应用以及模型修正和预试验分析等内容。

本书语言精练，简化公式推导，强调概念和公式、定理的应用。同时本书也介绍模态分析专用软件程序，将应用例题结合新的工程应用实例，注重培养学生用本书知识解决工程实际问题的方法。书中含上机实践内容，加强学生理论联系实际的能力。同时书中还提供了习题和思考题，便于读者巩固所学内容，学以致用。

在本书的编著过程中，得到了冯涛、刘斌、卜晓媛、李泽超、刘良宝、纪晓刚的大力协助，在此向他们深表感谢。

本书获得“北京市属高等学校人才强教计划资助项目”资助（编号：PHR201106110）。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请指正。

编　者

2011年1月

目　　录

第1章 绪 论

1.1 振动概论

在机械工程领域，普遍存在着物体随时间变化的往复运动，例如机械钟摆的摆动、汽车和铁路机车车辆在行驶中的颠动、桥梁和建筑物的晃动等，上述所提到的物体在平衡位置附近作往复性或周期性的机械运动，称为机械振动。

机械振动有利也有弊。例如，机械振动会影响精密仪器的性能，降低加工精度和光洁度，加剧构件疲劳和磨损，缩短机器和结构物的使用寿命，甚至引起结构的破坏。较典型的例子有：飞机的颤振常使飞机失事，地震引起建筑物的严重损坏，桥梁在过大振动下的坍塌。这些都是物体发生机械振动有害的一面，然而，机械振动也有积极的一面。例如工业上常用的振动传输、振动筛选、振动沉桩、振动消除内应力以及按振动理论设计的测量传感器、地震仪等即是这方面的典型应用实例。因此，学习振动理论的目的就是掌握振动的基本理论和分析方法，用以确定和限制振动对工程结构和机电产品的性能、寿命及安全的有害影响；同时运用振动理论去创造和设计新型振动设备、仪表及自动化装置。

振动问题所涉及的内容可用系统、激励和响应来描述。研究的对象通常被称为系统，它可以是一个零件、一个部件、一台机器或者一个完整的工程结构；初始干扰、强迫力等外界激振力对于系统的作用位移统称为激励；系统在激励作用下产生的运动称为系统的响应。通常可将振动问题分为3类。

第一类：已知激励和系统特性，求系统响应。

这类问题称为振动系统动力响应分析，这是工程中最常见的研究问题，研究的任务是验算工程结构或产品等在工作时的动力响应是否满足预定的设计要求。在产品设计阶段，对具体设计方案进行动力响应验算，以确定该设计方案的可行性，为机械强度或刚度计算提供依据，这一过程称为振动设计。

第二类：已知激励和响应，求系统的特性参数。

这类问题称为振动系统识别。振动系统识别主要是指获得系统的物理参数和系统的固有特性，如质量、刚度和阻尼系数以及固有频率、主振型等。通过对系统进行振动实验，记录输入输出数据并作数据处理，反求出系统的有关物理参数和固有特性。振动系统识别以估计物理参数为任务的称为物理参数识别；以估计系统振动固有特性为任务的称为模态参数识别。系统识别也可以理解为在一定的激励条件下确定系统参数，使响应满足指定的条件。

第三类：已知振动系统和响应，求系统的激励。

这类问题称为振动环境预测。振动环境预测主要是测定系统的激扰特性问题，例如为了避免产品在公路或铁路运输中损坏，需要通过实地行车记录汽车或铁路车辆振动，以及确定产品的响应振动规律，以估计在运输过程中产品将承受的是怎样一种振动环境，运输过程对于产品是怎样的一种激励，在此基础上才能有根据地为产品设计可信而有效的减振包装，确保产品运输过程安全可靠。

实际振动问题往往比较复杂，可能同时包含振动系统识别、分析和预测方面的问题。

1.2 振动问题的分类

实际振动的物体系统往往是很复杂的，在理论分析中，根据研究的侧重点不同，可从不同的角度对振动进行分类。

1. 按对系统的激励类型分类

(1) 自由振动：受初始激励后，不再受外界激扰，系统所作的振动。

(2) 强迫振动：系统在外界激励下所作的振动。

(3) 自激振动：系统受到由其自身运动导致的激励作用而产生并维持的振动。例如铁路上火车车轮对由于踏面形状在运动过程中引起的蛇形运动属于自激振动。

(4) 参数振动：系统受到自身参数随时间变化而引起的振动。例如秋千受到激励以摆长随时间变化的形式出现，而摆长的变化由人体的下蹲及站直造成，因此秋千在初始小摆角下被越荡越高，形成参数振动。

2. 按系统的响应类型分类

根据响应存在时间的长短分为瞬态振动和稳态振动。瞬态振动只在较短的时间中发生；稳态振动可在充分长的时间中进行。根据系统响应是否具有周期性可分为以下几种。

(1) 简谐振动：响应为时间的正弦或余弦函数。

(2) 周期振动：响应为时间的周期函数，故可用谐波分析的方法展开为一系列简谐振动的叠加。

(3) 准周期振动：若干个周期不可通约的简谐振动组合而成的振动。

(4) 混沌振动：响应为时间的始终有限的非周期函数。

(5) 随机振动：响应不是时间的确定性函数，只能用概率统计的方法描述振动规律。

3. 按系统的性质分类

(1) 确定性系统和随机性系统：确定性系统的系统特征可用时间的确定性函数给出；随机性系统的系统特征不能用时间的确定性函数给出，只具有统计规律性。

(2) 离散系统和连续系统：离散系统是由有限个质量元件、弹簧和阻尼器构成的系统，具有有限个自由度，数学描述为常微分方程；实际工程结构的物理参数，例如板壳、梁、轴、杆等的质量及弹性一般是连续分布的，具有无穷多个自由度，数学描述为偏微分方程，保持这种特征抽象出的模型所代表的系统称为连续系统。

(3) 定常系统和参变系统：定常系统是系统特性不随时间改变的系统，数学描述为常系数微分方程；参变系统是系统特性随时间变换的系统，数学描述为变系数微分方程。

(4) 线性系统和非线性系统：线性系统是质量不变且弹性力和阻尼力与运动参数成线性关系的系统，数学描述为线性微分方程；非线性系统是不能简化为线性系统的系统，数学描述为非线性微分方程。

4. 按系统的自由度分类

(1) 单自由度系统振动：只用一个独立坐标就能确定系统运动的系统振动。

(2) 多自由度系统振动：需用多个独立坐标才能确定系统运动的系统振动。

(3) 弹性体振动：要用无限多个独立坐标才能确定系统运动的系统振动，也称为无限

自由度系统振动。

对于相同的振动问题，在不同条件下可以采用不同的振动模型。振动模型的建立及分析结论必须通过科学实验或生产实践的检验，只有那些符合或大体符合客观实际的振动模型和结论，才是正确或基本正确的。

1.3 周期振动的谐波分析

简谐振动是一种最简单的周期振动，实际振动问题中更多的是非简谐的周期振动，一般的周期振动可以通过傅里叶级数理论分解成简谐振动。

如果一个以 T 为周期的实值函数 $f_T(t)$，在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件，即 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点。

则在 $f_T(t)$ 的连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1-1}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\quad a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,3,\cdots$$

为方便起见，常将 $f_T(t)$ 的傅里叶级数改写成复数形式。将欧拉公式

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2},\quad \sin t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}$$

代入式(1-1)中，有

$$\begin{aligned}f_T(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t})-\frac{\mathrm{j}b_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t})\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right)\end{aligned}$$

令 $c_0=\frac{a_0}{2}$，$c_n=\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}$，$c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}$，则有

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{1-2}$$

其中，$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。称式(1-2)为傅里叶级数的复指数形式。

在式(1-1)中，若令 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$A_0=\frac{a_0}{2}$，则

$$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\omega t+\theta_n\right)$$

这里 A_n 反映了频率为 $n\omega$ 的谐波在 $f_T(t)$ 中所占的份额，称为振幅。

在复指数形式中，第 n 次谐波为

$$c_n e^{jn\omega t}+c_{-n}e^{-jn\omega t}$$

其中，$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$，$c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$，则

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

即 $A_n=2|c_n|$，$n=0,1,2,\cdots$。

它反映了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况，因此称 A_n 为周期函数 $f_T(t)$ 的振幅频谱。由于 $n=0,1,2,\cdots$，所以频谱 A_n 的图形不连续，称为离散频谱。

把一个周期函数展开成一个傅里叶级数，亦即展开成一系列简谐函数之和，称为谐波分析。谐波分析是函数分析中一种常用的方法，用于振动理论便可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加，这对于分析振动位移、速度和加速度的波形，以及分析周期激振力等都是很重要的。

［**例 1-1**］ 一周期为 T、振幅为 F_0 的矩形波，如图 1.1(a)所示。在一个周期内的函数表达式为

$$F=\begin{cases}F, & 0<t<\frac{T}{2}\\ -F_0, & \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

试展开为傅里叶级数。

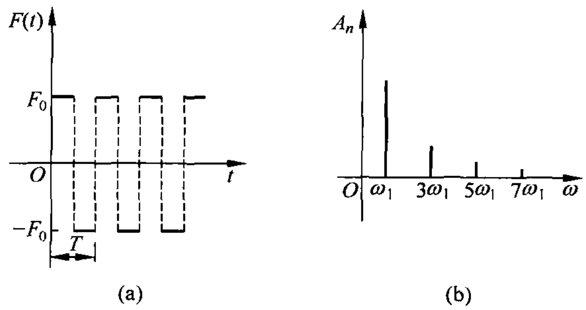

图 1.1 矩形波

(a) 时序图；(b) 频谱图

解：将 $F(t)$ 按式(1-1)展开为傅里叶级数，并用式(1-1)求各项常数。

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{T}{2}}^{T}F_0\,\mathrm{d}t\right]=0$$

由于函数 $F(t)$ 对 $t=\frac{T}{2}$ 是反对称的，而 $\cos n\omega_1 t$ 对 $t=\frac{T}{2}$ 却是对称的，两者乘积的积分必然

等于零，即 $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\frac{T}{2}}^{T}F_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]$$
$$=\frac{2F_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{4F_0}{n\pi},\quad n=1,3,5,\cdots$$

代入式(1-1)即得矩形波的傅里叶级数为

$$F(t)=\frac{4F_n}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$
$$=\frac{4F_0}{\pi}\left[\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\cdots\right]$$

上式只包含正弦项，并且只有奇次项各次谐波。

我们知道一个函数 $F(t)$，如满足 $F(t)=F(-t)$，称为 t 的偶函数；如满足 $F(t)=-F(-t)$，则称为 t 的奇函数。因为 $\cos n\omega_1 t$ 是 t 的偶函数，$\sin n\omega_1 t$ 是 t 的奇函数，所以如果 $F(t)$ 是偶函数，便不会有 $\sin n\omega_1 t$ 的各项，即 $b_n=0$，反之，如果 $F(t)$ 是奇函数，就不会有 $\cos n\omega_1 t$ 的各项，即 $a_n=0$。本题 $F(t)$ 为奇函数，所以展开后的傅里叶级数只有正弦项。

各次谐波的幅值为

$$A_1=\frac{4F_0}{\pi},\quad A_3=\frac{4F_0}{3\pi},\quad A_5=\frac{4F_0}{5\pi},\cdots$$

频谱图如图 1.1(b)所示。

1.4　非周期振动与积分变换

周期振动可以用傅里叶级数作谐波分析，而图 1.2 所示的非周期振动则可以通过傅氏变换作谐波分析，傅氏变换可以通过令傅里叶级数中的周期趋向无穷大而得到。

先在区间 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 上截取一段非周期振动，即令

$$x_T(t)=x(t),\quad -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\qquad(1\text{-}3)$$

非周期振动 $x(t)$ 可以看成周期 $T\to\infty$ 时 $x_T(t)$ 的极限，即

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}x_T(t)\qquad(1\text{-}4)$$

将 $x_T(t)$ 按周期性要求拓展到区间 $(-\infty,+\infty)$，$x_T(t)$ 就成为周期函数了。$x_T(t)$ 可以展开为

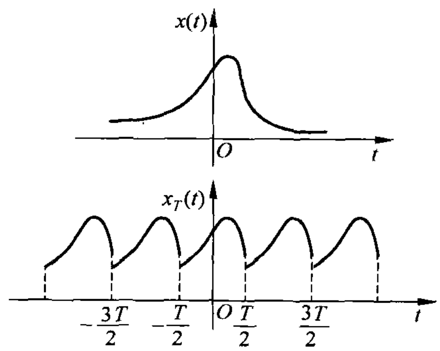

图 1.2　非周期信号的傅式变换

$$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{X}_n e^{jn\omega_1 t}\qquad(1\text{-}5)$$

其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$，$\overline{X}_n$ 为

$$\overline{X}_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\omega_1 t}\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

令

$$\begin{cases}\Delta\omega=\omega_1\\ \omega_n=n\omega_1\\ X_n=X_n(\omega_n)=T\overline{X}_n=\dfrac{2\pi}{\Delta\omega}\overline{X}_n\end{cases} \tag{1-7}$$

则式(1-5)可以写成

$$x_T(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n(\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\Delta\omega \tag{1-8}$$

其中

$$X_n=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n t}\mathrm{d}t \tag{1-9}$$

当 $T\to\infty$时，ω_n 成为连续变量，$\Delta\omega$ 成为微分 $\mathrm{d}\omega$。这样，式(1-8)与式(1-9)成为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-10}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

式(1-10)称为傅里叶积分，只要式(1-11)的 $X(\omega)$存在，就可以用傅里叶积分表示非周期振动 $x(t)$。而欲保证 $X(\omega)$存在，$x(t)$必须在区间$(-\infty,+\infty)$上满足狄利克雷条件，并且绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$$

相当多的非周期振动是满足上述条件的。式(1-10)与式(1-11)又被称为傅里叶变换对，其中 $X(\omega)$称为 $x(t)$的傅里叶变换，记为

$$X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]$$

而 $x(t)$称为 $X(\omega)$的傅里叶逆变换，记为

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)]$$

还可以写成更为对称的形式

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$

比较式(1-10)的傅里叶积分与式(1-2)的复数傅里叶级数，可知一个非周期振动仍然能够表示成无穷简谐振动的叠加，但这些简谐振动的频率在范围$(-\infty,+\infty)$内不再是离散分布，而是连续分布，$X(\omega)\mathrm{d}\omega$ 可以视为频率在区间$(\omega,\omega+\mathrm{d}\omega)$内的简谐振动 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$对非周期振动 $x(t)$的贡献。

$X(\omega)$是 ω 的复数函数，用图像表示$|X(\omega)|$与 ω 和 $\arg X(\omega)$与 ω 的函数关系，即得到非周期振动 $x(t)$的振幅频谱图及相位频谱图，因此 $X(\omega)$又称为 $x(t)$的频谱函数。从这个意义上说，对一个非周期振动 $x(t)$求傅里叶变换 $X(\omega)$，即表示对 $x(t)$作频谱分析。

下面就傅氏变换作如下说明。

1.4.1　傅氏变换的定义

对于任何一个非周期函数 $f(t)$，作周期为 T 的函数 $f_T(t)$，使得它在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$之内与 $f(t)$相等，而在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$之外按周期 T 向左向右延拓到整个实轴上，则当 T 越大时，$f_T(t)$与 $f(t)$相等范围也越大，当 $T\to\infty$时，周期函数 $f_T(t)$便可转化为 $f(t)$，即

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t) = f(t)$$

由式(1-2)有

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) = \lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$$

当 n 取一切正整数时，$\omega_n=n\omega$ 所对应的点分布在整个数轴上，将相邻两点间距离记为 $\Delta\omega_n$，即 $\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega=\frac{2\pi}{T}$，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega_n}}^{\frac{\pi}{\Delta\omega_n}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\right]\Delta\omega_n$$

这是一个和式极限，在下面定理的条件下，可以用傅里叶积分公式（简称傅氏积分公式）来表示。

1.4.2　傅氏积分定理

如果定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(t)$满足下列条件：

(1) $f(t)$在任一有限区间上满足狄利克雷条件；

(2) $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积$\left(\text{即}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\ \text{收敛}\right)$，则有傅氏积分公式收敛，且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} f(t), & \text{当 } t \text{ 是 } f(t) \text{ 的连续点时} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & \text{当 } t \text{ 是 } f(t) \text{ 的间断点时}\end{cases} \tag{1-12}$$

若令

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-13}$$

则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-14}$$

由上面两式可以看出，$f(t)$与 $F(\omega)$可以通过类似的积分运算相互表达。式(1-13)称为 $f(t)$的傅氏变换，函数 $F(\omega)$称为 $f(t)$的傅氏变换的象函数，记为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$；式(1-14)称为 $F(\omega)$的傅氏逆变换，$f(t)$称为 $F(\omega)$的原函数，记为 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$。可见，象函数 $F(\omega)$与象原函数 $f(t)$构成了一对傅氏变换对。

在频谱分析中，$F(\omega)$又称为 $f(t)$的频谱函数，而频谱函数的模$|F(\omega)|$称为 $f(t)$的振幅频谱。由于 ω 是连续变化的，所以称为连续频谱。

［**例 1-2**］　求矩形脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\delta\\ 0, & |t|>\delta\end{cases},\quad \delta>0$$

的傅氏变换，并验证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

解：由式(1-13)有

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\delta}^{\delta}=2\,\frac{\sin\delta\omega}{\omega}$$

再由式(1-14)可得 $f(t)$ 的傅氏积分表达式为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\delta\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\delta\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\delta\omega}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\delta\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\begin{cases}1, & |t|<\delta\\ 1/2, & |t|=\delta\\ 0, & |t|>\delta\end{cases}\end{aligned}$$

上式令 $t=0$ 可得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

［**例 1-3**］　求指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0,\quad \beta>0\end{cases}$$

的傅氏变换，并作出 $f(t)$ 的频谱图。

解：由式(1-13)

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

所以 $|F(t)|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}$，其图形如图 1.3 所示。

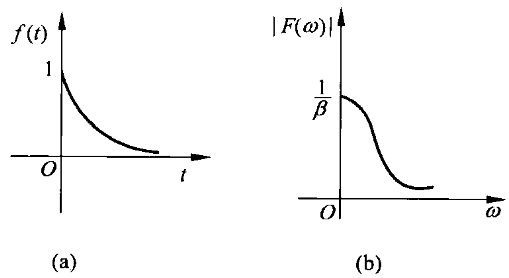

图 1.3　指数衰减函数 $f(t)$

(a) 时序图；(b) 频谱图

1.5 δ 函数及其应用

在工程实际问题中，许多物理现象具有一种脉冲特征，它们不是在某一段时间间隔内出现，而是在某一瞬间或某一点才出现。

工程技术中常用一个长度为 1 的有向线段表示 δ 函数，如图 1.4 所示的线段长度表示 $\delta(t)$ 的积分值，称为 δ 函数的强度。

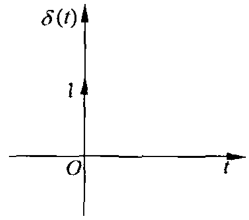

图 1.4 δ 函数

1. δ 函数的定义

如果对于任意一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的函数 $f(t)$，恒有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$，则称 $\delta(t)$ 为 δ 函数，如图 1.4 所示。

从此定义知，任何一个连续函数 $f(t)$ 都对应一个确定的数 $f(0)$ 或 $f(t_0)$，这一运算性质使 δ 函数在近代物理和工程技术中有着广泛的应用。有时，人们将 δ 函数直观地理解为 $\delta(t)=\lim\delta_\varepsilon(t)$（弱极限），其中 $\delta_\varepsilon(t)$ 为单个方脉冲函数且

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\varepsilon>0\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases}$$

δ 函数具有下列性质：

性质 1 对任意的有连续导数的函数 $f(t)$，都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0)$$

性质 2 δ 函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$。

性质 3 设 $u(t)$ 为单位阶跃函数，即

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则有

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}t=u(t),\quad u'(t)=\delta(t)$$

2. δ 函数的傅氏变换

由傅氏变换的定义，容易求出

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$

$$\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=1$$

可见 $\delta(t)$ 与 1，$2\pi\delta(\omega)$ 与 1 均构成一个傅氏变换对，所以

$$\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\delta(t)$$

$$\mathscr{F}[1]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

容易验证，$\delta(t-t_0)$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 也构成一个傅氏变换对。要注意的是，以上积分已经不再是

傅氏变换定义中的积分，故称上述函数的傅氏变化为广义傅氏变换。利用这一概念，可以给出一些绝对可积的常见函数的傅氏变换。

1.6 模态分析的定义和分类

模态分析是振动理论的一个重要分支，是研究结构动力特征的一种近代方法，是系统识别方法在工程振动领域中的应用。一般地，以振动理论为基础，以模态参数为目标的分析方法称为模态分析，也就是说模态分析是研究系统物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系，并通过一定手段确定这些系统模型的理论及应用的一门学科。

根据研究模态分析的手段和方法不同，模态分析可分为理论模态分析和实验模态分析。理论模态分析是以线性振动理论为基础，研究激励、系统、响应三者的关系；实验模态分析是理论模态分析的逆过程，通过实验测得激励和响应的时间历程，运用数字信号处理技术求得频响函数或脉冲响应函数，得到系统的非参数模型，然后运用参数识别方法求得系统模态参数并进一步确定系统的物理参数。因此，实验模态分析是综合运用线性振动理论、动态测试技术、数字信号处理和参数识别等方法，进行系统识别的过程。

随着计算机技术和各种计算方法的发展，模态分析的应用领域越来越广阔，模态分析技术已经在航空、造船、机械、建筑、交通运输、海洋钻井平台和兵器装备等工程领域得到广泛应用。模态分析的应用大致可分为以下四类。

1. 模态分析在结构性能评价中的应用

根据模态分析的结果，即模态频率、模态振型、模态阻尼等模态参数，对被测结构进行直接的动态性能评估。对一般结构，要求各阶模态频率远离工作频率，具体地说是要求工作频率不落在某阶模态的半功率带宽内；对结构振动贡献较大的振型，应使其不影响结构正常工作为宜。这是模态分析的直接应用，已成为工程界的基本方法。

2. 模态分析在结构动态设计中的应用

以模态分析为基础的结构动态设计，是近年来振动工程界开展最为广泛的研究领域之一，有限元方法和试验模态分析方法为结构动态设计提供了两条最为有效的途径，科技工作者在此基础上提出了荷载识别、灵敏度分析、物理参数修改、物理参数识别、再分析、结构优化设计方法，分别从不同方面解决了结构动态设计中的部分问题。

3. 模态分析在结构损伤诊断和状态监测中的应用

利用模态分析得到的模态参数等结果进行损伤判别，日益成为一种有效而实用的故障诊断和安全检验方法。损伤诊断包括机械的故障诊断和土木结构损伤诊断。例如根据模态频率的变化判断机械结构裂纹的出现与否；根据模态分析判断裂纹的位置；根据模态频率的变化判断水泥桩中是否存在裂纹和空隙；根据位移模态、曲率模态、应变模态、模态柔度、模态应变能等指标可以诊断结构损伤位置及程度等。

4. 模态分析在声音控制中的应用

声音控制包括利用振动和抑制振动两个方面。抑制诸如机车车辆、汽车、内燃机、工程机械等结构振动的辐射噪声是目前重要的研究领域之一，模态分析理论为分析噪声产生的原因及相应的治理措施提供了有效的方法。

目前模态分析技术已经成为一门重要的工程技术，科技工作者将模态分析的应用扩大

到更广的范围。本书力求深入浅出系统地介绍模态分析理论，主要围绕模态分析理论基础、信号处理基本理论、模态分析实验和工程应用等方面展开论述，并列举了许多应用实例，突出了模态分析理论的系统性和实用性。

习题和思考题

1. 振动问题通常分为几类？其振动特性是什么？
2. 谐波分析方法的基本理论依据是什么？
3. 离散频谱的含义是什么？
4. 连续频谱的含义是什么？
5. δ 函数的定义与物理含义是什么？
6. 理论模态分析和实验模态分析的特点是什么？