杜志建 主编

试题调研®

高分宝典系列　高考意见领袖　2012高考成功计划

高考决战压轴大题

高考命题专家指出：

高考试卷命制，容易题：中档题：难题=3：5：2。压轴大题就是高考中“区分考生，选拔人才”的“难题”。决战压轴大题，攻下高考难题，跨入名校也容易。

数学

—文科—

考“一本”，上“211”“985”大学，此书不可不看

CHISO 新疆青少年出版社

®

试题调研

高考意见领袖

高分宝典系列　2012高考成功计划

高考决战压轴大题

主　　编：杜志建

编 委 会：蒋玉军　李锡琴　宋克金　杨东方　金庆中　高呈宝

昝亚娟　蔡迎春　陈昌胜　张振广　刘　森　刘立栋

李新运　李　航　韩海格　赵献华　景志国

本册主编：宋克金　杨东方　金庆中

数学

— 文科 —

CHISO 新疆青少年出版社

图书在版编目(CIP)数据

试题调研．高考决战压轴大题．数学．文科 /杜志建主编．—乌鲁木齐：新疆青少年出版社,2011.6
ISBN 978－7－5371－9838－7

Ⅰ．①试… Ⅱ．①杜… Ⅲ．①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 109481 号

出 版 人:徐　江
策　　划:王启全
责任编辑:多艳萍
责任校对:刘　娜
封面设计:天星美工室

试题调研·高考决战压轴大题　数学(文科)
杜志建　主编

出　版:新疆青少年出版社
社　址:乌鲁木齐市北京北路 29 号　　邮政编码:830012
电　话:0991－7833936(编辑部),0371－68698015(邮购部)
网　址:http://www.qingshao.net

发　行:新疆青少年出版社营销中心　　电　话:0991－7833979　7833965
经　销:各地新华书店　　法律顾问:钟　麟 13201203567
印　刷:河南大美印刷有限公司

开　本:787mm×1092mm　1/16　　版　次:2011 年 7 月第 1 版
印　张:14　　印　次:2011 年 7 月第 1 次印刷
字　数:386 千字
书　号:ISBN 978－7－5371－9838－7
定　价:21.80 元

成功在我，成功在握

——《高分宝典》丛书序

在我还是孩童时，就梦想成功/那时的成功/是央求父母购买的一个个小玩具/在我求学时，就期待成功/那时的成功/是老师的期许/是优异成绩带给家人的喜悦/亲爱的读者，你现在的成功又是什么呢

是的，每个人都渴望成功。但是，很多时候，对成功我们总是求之而不得，这让人苦恼无比。譬如，现在的你，可能在为学业发愁，因为升学而倍感压力。

“怎么办？”你一次次焦虑地问自己，问自己何时可以成功。

其实，你不必如此。成功，虽然没有捷径，但是，真的有方法。

《高分宝典》系列丛书就是你实现大学梦想的法宝。该丛书包括《高考5年真题分类详解》《高考必备题型1000例》《高考突破难点100讲》《高考状元纠错笔记》和《高考决战压轴大题》。这5套图书功能各异，但合起来又构成一个有机整体。

《高考5年真题分类详解》对2007–2011年全国各省市高考真题进行命题研究和分类详细解析，告诉你高考命题的规律，让你知道每一个考点在高考中怎么考，以及如何复习备考。

《高考必备题型1000例》由权威名师总结出高考必考题型，每一题型以经典母题讲解通性通法，帮你实现“弄懂一道题，攻克一类题”的愿望。

《高考突破难点100讲》根据历年高三学生在学习过程中普遍存在的问题，总结提炼出100个难点，并聘请名师讲解，帮你化难为易，一一破解学习难题。让你从此“理解”不难，“运用”不难，“得分”也不难。

《高考状元纠错笔记》收集多位高考状元平时密不外传的错题本精华，让你分享他们的成功经验。该书汇集各个学科最具训练价值的易错试题，让你在平时充分暴露学习问题，高考才没问题。

《高考决战压轴大题》聚焦那些“拉开分差”的题目，讲解压轴大题的破题思路、答题技巧，展示满分答题过程。立志考过“一本”线，上“211”“985”大学的考生，此书不可不看。

在策划这5套图书时，我们受毛泽东点评《二十四史》的启发，独创“旁批”设计，在正文两旁，通过【规律】【技巧】【拓展】【闪记】……对正文进行发散性和补充性讲解，让你学会举一反三，真正提高分析问题和解决问题的能力。

从真题开始，锁定备考靶心；紧接着熟悉必考题型，掌握通性通法。
再突破难点，扫除得分障碍；还需纠正错误，减少无谓失分。
最后攻克压轴大题，圆梦象牙塔。

这就是为你打造的高考成功计划。按此计划前行，一步一个脚印，成功定在掌控之中。来年6月，希望你可以告诉我们：“是的，成功在我，成功在握！”

目录 Contents

第一部分　客观题

第二部分　解答题

第一部分

客观题

题型综述

从近几年的高考数学试题中可以看出，试题的难易程度一般形成于三个阶段，在每个阶段，试题的难度是逐步上升的，形成压轴题的趋势．具体情况是：选择题部分的最后一、两个题目；填空题的最后一道题目；解答题的最后一、两道题目．客观题的压轴题主要体现在函数与导数、解析几何、立体几何、数列等方面，整个命题过程主要侧重以下几个方面：

在函数部分，抽象函数性质的运用是函数的难点之一，抽象函数是指没有给出函数具体的解析式或图象，但给出了函数满足的一部分性质或运算法则．此类试题既能全面地考查考生对函数概念、性质的理解及代数运算、推理和论证能力，又能综合考查考生对数学语言的理解和接受能力，以及对一般和特殊关系的认识，因此备受命题者的青睐．函数的零点与方程的解能够将函数图象的交点问题与方程的解联系起来，深刻体现了数形结合思想的运用，因此也常常作为客观题后面起拔高性作用的题目．分段函数是将两个不同的函数结合起来，使题目的条件显得多而杂，从而考查考生缜密的逻辑思维能力以及从纷繁复杂的条件中抓住关键点的能力．导数的内容主要是考查导数的运算、几何意义及导数在求函数单调性、极值、最值等方面的应用．这些考点在各地的高考题目中都是多次出现．

对于这一部分的备考，由于客观题和解答题本质上的区别，就可以采用一些特殊的方法和技巧精简解答，如赋值法、排除法等，但是最重要的还是要从根本上掌握函数的基本内容，掌握抽象函数、分段函数这些特殊函数的性质和特征，能够用图象将函数的零点以及方程的解结合起来，提高运算速度，从而解答题目．

解析几何是高中数学的主要板块之一，高考中的客观题也非常重视对此部分内容的考查，主要体现在直线与圆的方程及位置关系、椭圆与双曲线的离心率、直线与抛物线的位置关系、双曲线的渐近线、圆锥曲线的定义等，对于相应的数形结合思想、函数与方程思想、分类与整合思想的考查，一般都伴有较为复杂的数式运算，对考生的运算能力有较高的要求．

立体几何是高中数学的又一主要板块，高考中的客观题也非常重视对几何体中的点、线、面的关系判定以及与球的组合体的体积、棱柱与棱锥的体积等，主要体现空间结构的认识能力，对考生的要求较高．在备考时，要抓住立体几何中，球、立方体以及三棱锥这几个最典型的模型．高考时，有关立体几何的客观题大部分都可以归纳到这几个模型上．

数列部分在客观题中主要是以求数列中的项以及综合应用等差数列、等比数列两类基本数列性质为主．对于此部分，重点掌握等差数列、等比数列的基本性质，能够将看似复杂的数列问题转化为这两类基本数列问题．

压轴一 函数与导数

题型 1 抽象函数的求值问题

典例调研

【典例 1】 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f(f(\frac{5}{2}))$ 的值是

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{5}{2}$

破题思路 求解 $f(f(\frac{5}{2}))$ 的数值，需要求出 $f(\frac{5}{2})$ 的数值，所以需要利用 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$ 进行特殊值求解，然后根据求得的数值进行观察、归纳.

满分解答 依题意，得 $0\cdot f(0+1)=(1+0)f(0)=0$，即 $f(0)=0$；$-\frac{1}{2}f(-\frac{1}{2}+1)=(-\frac{1}{2}+1)f(-\frac{1}{2})$，即 $-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(-\frac{1}{2})$.

又因为 $f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})$，因此有 $f(\frac{1}{2})=0$. 当 $x(1+x)\neq 0$ 时，$\frac{f(x+1)}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$，于是有 $\frac{f(\frac{5}{2})}{\frac{5}{2}}=\frac{f(\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}}=\frac{f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=0$，则 $f(\frac{5}{2})=0$. 因此 $f(f(\frac{5}{2}))=f(0)=0$，故选 A.

【答案】 A

大题小招

【典例 1】进行特殊值选取时，技巧就在于要求解的式子中是求具体的数值，这就需要通过“$xf(x+1)=(1+x)f(x)$”实现 $f(\frac{1}{2})$ 转化，为此就要令 $x=-\frac{1}{2}$.

解题通法

抽象函数问题由于没有具体的函数解析式，有些题目只能根据所给定的函数性质和一些特殊的函数值采取归纳类比的方法求出所要求的函数值，因此归纳、类比是解决抽象函数问题的一种重要方法.

【典例 2】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，满足 $f(x+1)=-f(x)$，且 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上是增函数，下列五个关于 $f(x)$ 的命题中：

①$f(x)$ 是周期函数；

②$f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称；

③$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数；

④$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数；

⑤$f(2)=f(0)$.

正确命题的序号是________(请填写正确命题的序号).

破题思路　根据题设的三个条件:$f(x)$是偶函数;满足$f(x+1)=-f(x)$;$f(x)$在$[-1,0]$上是增函数,对照结论逐一判断即可.

满分解答　对①,由$f(x+1)=-f(x)$,得$f(x+2)=f((x+1)+1)=-f(x+1)=-(-f(x))=f(x)$,所以$f(x)$是一个周期为2的函数,故①正确;

对②,由$f(x)$的周期为2,可得$f(x-1)=f(x+1)$,由$f(x)$为偶函数,得$f(x-1)=f(1-x)$,所以$f(1-x)=f(1+x)$,即函数$f(x)$的图象关于$x=1$对称,故②正确;

对③,由$f(x)$在$[-1,0]$上是增函数,而且$f(x)$为偶函数,所以$f(x)$在$[0,1]$上是减函数,故③错误;

对④,由函数$f(x)$的周期为2,可得$f(x)$在$[1,2]$上是增函数,故④错误;

对⑤,由②,可得$f(2)=f(0)$,故⑤正确.

综合上述,正确的命题有①②⑤.

【答案】　①②⑤

【典例3】　定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$满足:$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$,当$x,y\in(-1,0)$时,有$f(x)>0$.若$P=f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{r^2+r-1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2009^2+2009-1}\right)$,$Q=f\left(\frac{1}{2}\right)$,$R=f(0)$,则$P$、$Q$、$R$的大小关系为

A. $R>P>Q$　B. $P>R>Q$　C. $R>Q>P$　D. 不能确定

破题思路　首先根据条件判断函数的奇偶性与周期性,确定R与Q的大小,然后利用裂项法将P的每一项分解成两项的差,使用累加法求出最终结果.

满分解答　$\because$函数$f(x)$满足:$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$,当$x,y\in(-1,0)$时,$f(x)>0$,$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上为单调递减的奇函数,且当$x\in(-1,0)$时,$f(x)>0$,当$x\in(0,1)$时,$f(x)<0$,

$\therefore R=f(0)=0,Q=f\left(\frac{1}{2}\right)<0<R.$

知识必备

在解决一些函数的奇偶性、单调性相结合的综合性问题时,常常涉及求函数的周期性,这就需要我们掌握一些有关周期性的结论:①如果$f(x+a)=f(x+b)(a\neq b)$,那么$f(x)$是周期函数,其中一个周期$T=|a-b|$;②如果$f(x+a)=-f(x+b)(a\neq b)$,那么$f(x)$是周期函数,其中一个周期$T=2|a-b|$;③如果$f(x+p)=\frac{1}{f(x)}$或$f(x+p)=-\frac{1}{f(x)}$,那么$f(x)$是周期函数,其中一个周期$T=2p$;④如果$f(x+p)=-f(x)$,那么$f(x)$是周期函数,其中一个周期$T=2p$.

活学巧用

【典例3】中的$Q=f\left(\frac{1}{2}\right)$与$R=f(0)$的值可以直接通过已知式子进行代入求值,而关键就是式子P的求解,这里P是一个多项的式子,不可能逐个代入,为此就需要通过已知式子的逆用,将一个式子转化为两个式子的差的形式,然后进行累加求和,这正是求解本题的技巧所在.

解题通法

一些抽象函数模型往往就是从具体的函数中抽象出来的，解题时再类比具体的函数中根据我们熟悉的具体函数问题的解决方法，就能找到解决抽象问题的方法.

$\because f(\frac{1}{r^2+r-1})=f(\frac{1}{r(r+1)-1})=f(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}}{1-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r+1}})=f(\frac{1}{r})-f(\frac{1}{r+1})$.

$\therefore P=f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})+\cdots+f(\frac{1}{r^2+r-1})+\cdots+[\frac{1}{2009^2+2009-1}]=[f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{3})]+[f(\frac{1}{3})-f(\frac{1}{4})]+\cdots+[f(\frac{1}{2009})-f(\frac{1}{2010})]=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2010})=Q-f(\frac{1}{2010})>Q.$

$\because P=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2010})<0<R.$

$\therefore R>P>Q.$

【答案】 A

大题闯关

1. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(2)=0$，当$x>0$时，有$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$恒成立，则不等式$x^2f(x)>0$的解集是

A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

2. 已知函数$f(x)$满足：$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)(x,y\in\mathbf{R})$，则$\sum\limits_{i=0}^{2\,010}f(i)=$

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知函数$f(x)$满足：$f(1)=a$，且$f(n+1)=\begin{cases}\frac{f(n)-1}{f(n)},f(n)>1,\\2f(n),f(n)\leqslant 1,\end{cases}$若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$总有$f(n+3)=f(n)$成立，则$a$在$(0,1]$内的可能值有

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$y=f(x)$满足：$f(4-x)=f(x)$，$(x-2)f'(x)<0$，若$x_1<x_2$且$x_1+x_2>4$，则

A. $f(x_1)<f(x_2)$

B. $f(x_1)>f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$

D. $f(x_1)$与$f(x_2)$的大小不确定

5. 若定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x)$，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，则函数$y=f(x)-\log_3|x|$的零点个数是

A. 多于4个　　B. 4个

C. 3个　　D. 2个

6. 函数$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$内可导，若$f(x)=f(2-$

x)，且当$x\in(-\infty,1)$时，$(x-1)f'(x)<0$，设$a=f(0)$，$b=f(\frac{1}{2})$，$c=f(3)$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

7. 已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)=2xf'(1)+x^2$，则$f'(1)=$

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

8. 已知函数$f(x)$满足：$f(1)=\frac{1}{4}$，$4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$，则$f(2\,010)=$________.

9. 设$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(-1)=0$，当$x>0$时，$(x^2+1)f'(x)-2xf(x)<0$，则不等式$f(x)>0$的解集为________.

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的图象关于点$(-\frac{3}{4},0)$成中心对称，对任意实数x都有$f(x)=-\frac{1}{f(x+\frac{3}{2})}$，且$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则$f(0)+f(1)+\cdots+f(2\,010)=$________.

答案与解析

1. D　当$x>0$时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，即$(\frac{f(x)}{x})'<0$，令$y=\frac{f(x)}{x}$，则函数$y=\frac{f(x)}{x}$在区间$(0,+\infty)$上为减函数，又$f(x)$在定义域上是奇函数，则函数$y=\frac{f(x)}{x}$在定义域上是偶函数，且$\frac{f(2)}{2}=0$，则$\frac{f(x)}{x}>0$在区间$(0,+\infty)$上的解集是$(0,2)$. 函数$x^2f(x)=x^3\cdot\frac{f(x)}{x}$是定义域上的奇函数，则$x^2f(x)>0$的解集是$(-\infty,-2)\cup(0,2)$，故选D.

2. D　令$x=1$，$y=0$，则$2f(1)f(0)=f(1+0)+f(1-0)=2f(1)$，$\therefore f(0)=1$.

令$y=1$，得$f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，即$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，

由此得$f(x+2)=f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)-f(x)=-f(x-1)$，

以$x+1$代替x，得$f(x+3)=-f(x)$，由此可得$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，即函数$f(x)$是以6为周期的周期函数. 再根据$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，得$f(2)=f(1)-f(0)=-\frac{1}{2}$，$f(3)=f(2)-f(1)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$，$f(4)=f(3)-f(2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，$f(5)=f(4)-f(3)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$，$f(6)=f(5)-f(4)=1$. 即一个周期内的整点函数值是$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$-1$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，其和为0. 又由于$2\,010=6\times335$. 故$\sum\limits_{i=0}^{2\,010}f(i)=f(0)+\sum\limits_{i=1}^{2\,010}f(i)=1$.

3. B　$f(1)=a\in(0,1]$，$f(2)=2a\in(0,2]$，

当$2a>1$即$a>\frac{1}{2}$时，$f(3)=1-\frac{1}{f(2)}=1-\frac{1}{2a}<1$，

$\because f(n+3)=f(n)$，

$\therefore f(4)=2-\frac{1}{a}=f(1)=a$，$\therefore a=1$，

当$2a\leqslant1$，即$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，当$f(3)=4a>1$时，$f(4)=1-\frac{1}{4a}=f(1)=a$，$\therefore a=\frac{1}{2}$；当$f(3)=4a\leqslant1$时，$f(4)=8a=f(1)=a$，$a=0$（舍去），故$a$在$(0,1]$内的可能值有2个.

4. B $\because f(4-x)=f(x)$,$\therefore$ 函数$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称,由$(x-2)f'(x)<0$,可得函数$f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减.

$\therefore$ 当$x_2>x_1>2$时,$f(x_1)>f(x_2)$;

当$x_2>2>x_1$时,$\because x_1+x_2>4$,$\therefore x_2>4-x_1>2$,$\therefore f(4-x_1)=f(x_1)>f(x_2)$,

综上,$f(x_1)>f(x_2)$,故选B.

5. B 由题易知,函数$y=f(x)$的周期$T=2$,在同一直角坐标系中作出函数$y=f(x)$、$y=\log_3|x|$的图象(如图1－1－1所示),结合图象知,选B.

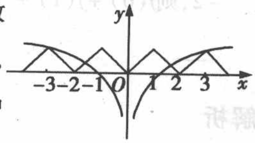


图1－1－1

6. C 依题意,得当$x<1$时,有$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数;又$f(3)=f(-1)$,且$-1<0<\frac{1}{2}<1$,因此有$f(-1)<f(0)<f(\frac{1}{2})$,即有$f(3)<f(0)<f(\frac{1}{2})$,$c<a<b$,选C.

7. B $f'(x)=2f'(1)+2x$,令$x=1$,得$f'(1)=-2$,选B.

8. $\frac{1}{2}$ 依题意,得$4f(1)f(0)=f(1)+f(1)$,$f(0)=2f(1)=\frac{1}{2}$;$f(n+1)+f(n-1)=4f(n)f(1)=f(n)$,所以$f(n+1)=f(n)-f(n-1)$,记$a_n=f(n)$(其中$n\in\mathbf{N}^*$),则有$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$,$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n=-a_{n-1}$,$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=-a_n$,$a_{n+6}=-a_{n+3}=a_n$,故数列$\{a_n\}$的项以6为周期重复出现的.注意到$2\,010=6\times 335$,因此有$a_{2\,010}=a_6=f(0)=\frac{1}{2}$,即$f(2\,010)=\frac{1}{2}$.

9. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 令$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$,则$g'(x)=\frac{(x^2+1)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}$.又$\because$ 当$x>0$时,$(x^2+1)f'(x)-2xf(x)<0$,$\therefore g'(x)<0$,$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.又$\because$(函数值都为正时)一个增函数与一个减函数的乘积为减函数,$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.又$\because f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,$f(-1)=0$,$\therefore f(1)=0$.当$x>0$时,$f(x)>0=f(1)\Rightarrow x<1$;当$x<0$时,$f(x)>0=f(-1)\Rightarrow x<-1$.综上可得,不等式$f(x)>0$的解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

10. -2 由函数关于点$(-\frac{3}{4},0)$对称,可知$f(x)+f(-\frac{3}{2}-x)=0$,所以$f(1)+f(-\frac{5}{2})=0$,又$f(x)=-\frac{1}{f(x+\frac{3}{2})}$,所以$f(-\frac{5}{2})=-\frac{1}{f(-1)}=-1$,所以$f(1)=1$,因为$f(x)=-\frac{1}{f(x+\frac{3}{2})}$,所以$f(x-3)=-\frac{1}{f(x-\frac{3}{2})}=f(x)$,即$f(x)$是以3为周期的函数,故$f(3)=f(0)=-2$,$f(2)=f(-1)=1$,所以$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,010)=f(0)+670\times[f(1)+f(2)+f(3)]=f(0)=-2$.

题型2　函数的图象

典例调研

【典例4】　(2011·安徽卷)函数 $f(x)=ax^m(1-x)^n$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象如图1-1-2所示,则 m,n 的值可能是

A. $m=1,n=1$

B. $m=1,n=2$

C. $m=2,n=1$

D. $m=3,n=1$

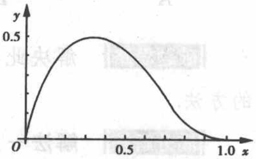


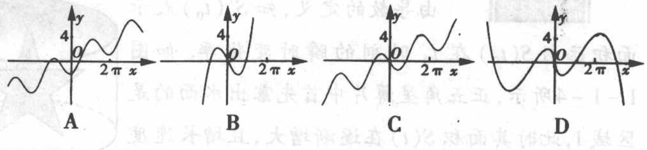
图1-1-2

破题思路　本题主要考查函数图象、利用导数求函数最值等知识,属于难题. 解题时根据四个选项中的 m,n 先确定函数解析式,再利用导数求出最值点即可用排除法找到答案.

满分解答　当 $m=1,n=1$ 时,$f(x)=ax(1-x)$ 图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,所以A不可能;当 $m=1,n=2$ 时,$f(x)=ax(1-x)^2=a(x^3-2x^2+x)$,$f'(x)=a(3x-1)(x-1)$,所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{1}{3})=\frac{4a}{27}$ 且 $\frac{1}{3}<0.5$,由图可知B可能;当 $m=2,n=1$ 时,$f(x)=ax^2(1-x)=-a(x^3-x^2)$,$f'(x)=-ax(3x-2)$,所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{2}{3})=\frac{4a}{27}$,$\frac{2}{3}>0.5$,所以C不可能;当 $m=3,n=1$ 时,$f(x)=ax^3(1-x)=-a(x^4-x^3)$,$f'(x)=-ax^2(4x-3)$,所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{3}{4})=\frac{27a}{256}$,$\frac{3}{4}>0.5$,所以D不可能.

【答案】　B

【典例5】　(2011·山东卷)函数 $y=\frac{x}{2}-2\sin x$ 的图象大致是



破题思路　本题考查函数图象的形式,考查导数的基础知识,考查分析问题解决问题的能力,考查特殊与一般的思想方法和意识.

满分解答　$y'=\frac{1}{2}-2\cos x$,令 $y'=0$,得 $\cos x=\frac{1}{4}$,根据三角函数的知识知这个方程有无穷多解,即函数 $y=\frac{x}{2}-2\sin x$ 有无穷多个极值点,函数 $y=\frac{x}{2}-2\sin x$ 是奇函数,图象关于坐标原点对称,故

高分攻略

以选择题出现的函数图象问题,宜采用排除法,排除的依据主要有函数的"定义域"、"单调性"、"奇偶性"、"函数图象的变换"、"特殊值"等.

知识必备

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象是以直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴的抛物线,其开口方向由 a 的符号确定,顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

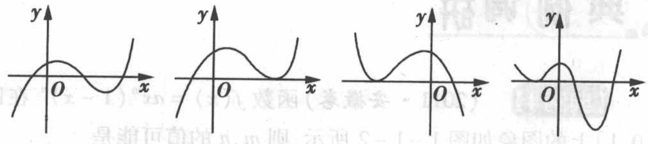
活学巧用

由正弦函数 $y=\sin x$ 的性质可知,$|\sin x|\leqslant1$,故 $\frac{x}{2}-2\leqslant\frac{x}{2}-2\sin x\leqslant\frac{x}{2}+2$,故函数的图象应该位于两条直线 $y=\frac{x}{2}-2$ 与 $y=\frac{x}{2}+2$ 之间.

只能是选项 C 的图象.

【答案】 C

【典例 6】 (2010 · 山东卷)函数 $y=2^x-x^2$ 的图象大致是



破题思路 解决此类题目可以根据一些特殊点进行逐个排除的方法.

满分解答 **解法一** 因为当 $x=2$ 或 4 时, $2^x-x^2=0$, 所以排除 B、C; 当 $x=-2$ 时, $2^x-x^2=\frac{1}{4}-4<0$, 故排除 D, 选 A.

解法二 由题意, 知 2、4 是函数的零点, 所以排除 B、C; 当 $x\to-\infty$ 时, 根据指数函数与幂函数图象的变换趋势, 知 $y<0$, 故选 A.

【答案】 A

【典例 7】 (2010 · 江西卷)如图 1-1-3, 一个正五角星薄片(其对称轴与水面垂直)匀速地升出水面, 记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)$ ($S(0)=0$), 则导函数 $y=S'(t)$ 的图象大致为

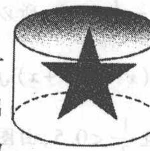
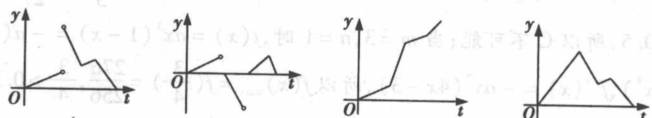


图 1-1-3



破题思路 本题主要抓住五角星几个角的特殊位置进行判断即可.

满分解答 由导数的定义, 知 $S'(t_0)$ 表示面积函数 $S(t_0)$ 在 t_0 时刻的瞬时变化率. 如图 1-1-4 所示, 正五角星薄片中首先露出水面的是区域 I, 此时其面积 $S(t)$ 在逐渐增大, 且增长速度越来越快, 故其瞬时变化率 $S'(t)$ 也应逐渐增大; 当露出的是区域 II 时, 此时的 $S(t)$ 应突然增大, 然后增长速度减慢, 但仍为增函数, 故其瞬时变化率 $S'(t)$ 也随之突然变大, 再逐渐变小, 但 $S'(t)>0$ (故可排除 B); 当五角星薄片全部露出水面后, $S(t)$ 的值不再变化, 故其导数值 $S'(t)$ 最终应等于 0, 符合上述特征的只有选项 A.

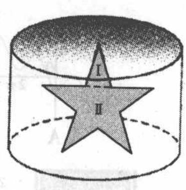


图 1-1-4

【答案】 A

大题小招

特殊值是解决这类问题的一个行之有效的方法, 解决【典例 6】需要利用平时知识的积累, 当 $x=2$ 或 4 时, $2^x-x^2=0$, 这是一个我们经常会用到的超越方程, 它恰巧正是此题的一个突破口, 从图象上很容易地排除 B、C.

大题小招

特殊位置判断法是解决【典例 7】的又一种方法, 第一个技巧是利用开始和结束两个特殊位置, 面积的改变量为 0, 导数为 0, 排除 C; 第二个技巧是面积一直在增加, 导数大于 0, 排除 B; 第三个技巧也是最关键的, 就是关于 A 与 D 的取舍, 这里可以考虑分段函数的表示法与图象的关系.

知识必备

在利用导数研究函数的单调性时, 我们往往应用以下的充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 若 $f'(x)>0$ (<0), 则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为增函数(减函数). 若函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则单调区间可扩大到闭区间 $[a,b]$ 上.

大题闯关

1. 如图 1 - 1 - 5 所示，有一直角墙角，两边的长度足够长，在 P 处有一棵树与两墙的距离分别是 a m $(0<a<12)$、4 m，不考虑树的粗细. 现在想用 16 m 长的篱笆，借助墙角围成一个矩形的花圃 $ABCD$. 设此矩形花圃的面积为 $S\ \mathrm{m}^2$，S 的最大值为 $f(a)$，若将这棵树围在花圃内，则函数 $u=f(a)$ 的图象大致是

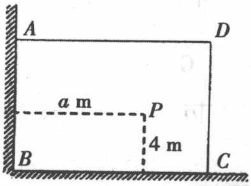
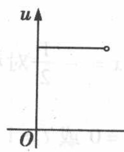
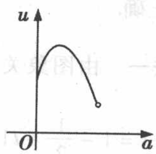


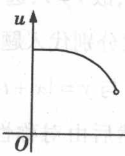
图 1 - 1 - 5



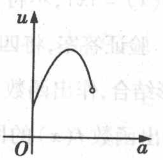
A



B



C



D

2. 如图 1 - 1 - 6 所示，已知线段 $AB=\sqrt{2}$，当点 A 在以原点 O 为圆心的单位圆上运动时，点 B 在 x 轴上滑动. 设 $\angle AOB=\theta$，记 $x(\theta)$ 为点 B 的横坐标关于 θ 的函数，则 $x(\theta)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的图象大致是

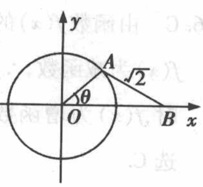
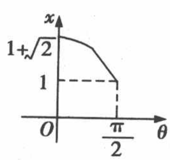
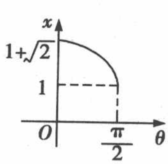


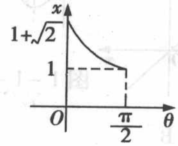
图 1 - 1 - 6



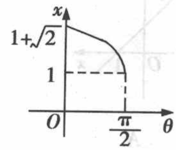
A



B

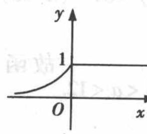


C

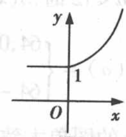


D

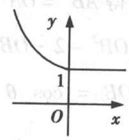
3. 定义运算 $a\oplus b=\begin{cases}a, a\leqslant b,\\ b, a>b,\end{cases}$ 则函数 $y=1\oplus 2^x$ 的图象只可能是



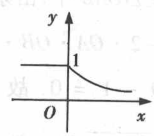
A



B

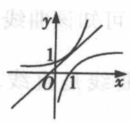


C

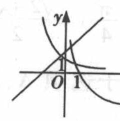


D

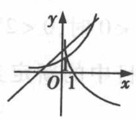
4. 在同一坐标系中画出函数 $y=\log_a x$，$y=a^x$，$y=x+a$ 的图象，可能正确的是



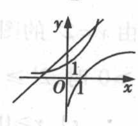
A



B



C



D

5. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的最小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

6. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象如图 1 - 1 - 7 所示，

则其导函数 $f'(x)$ 的图象的大致形状是

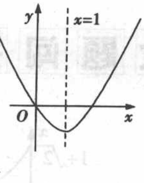
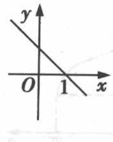
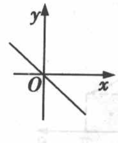


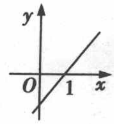
图 1－1－7



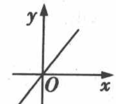
A



B



C



D

答案与解析

1. C　设矩形花圃的长为 x m$(a\leqslant x<12)$，则此矩形花圃的面积 $S(x)=x(16-x)=64-(x-8)^2$，①当 $0<a\leqslant 8$ 时，$S(x)_{\max}=S(8)=64$；②当$8<a<12$时，$S(x)_{\max}=S(a)=64-(a-8)^2$，故 $u=f(a)=\begin{cases}64,0<a\leqslant 8,\\64-(a-8)^2,8<a<12.\end{cases}$ 故函数 $u=f(a)$ 的图象大致是 C.

2. B　在$\triangle OAB$ 中，由余弦定理，可得 $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\theta$，即得 $OB^2-2\cdot OB\cdot\cos\theta-1=0$，故 $x(\theta)=OB=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1}$，该函数在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，其最大值为 $x(0)=1+\sqrt{2}$，最小值为 $x(\frac{\pi}{2})=1$，又 $x(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}>\frac{\sqrt{2}+2}{2}$，可知该曲线上凸，又由于选项 A、D 中有段曲线是直线，故应选 B.

3. A　由 $y=2^x$ 的图象，知当 $x<0$ 时，$0<2^x<1$；当 $x\geqslant 0$ 时，$2^x\geqslant 1$. 结合题目中的新定义，知 $1\oplus 2^x=\begin{cases}1,x\geqslant 0,\\2^x,x<0,\end{cases}$ 故选 A.

4. D　当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$，$y=a^x$ 均为减函数，且 $y=x+a$ 在 y 轴上的截距 $a\in(0,1)$，当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$，$y=a^x$ 均为增函数，且 $y=x+a$在 y 轴上的截距 $a>1$，综合上述关系，知 D 可能正确.

5. D　**解法一**　由图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$对称，得$|-\frac{1}{2}|=|-\frac{1}{2}+t|$，解得 $t=0$ 或 $t=1$，当 $t=0$时，$f(x)=|x|$，不符合题意，故 $t=1$，选 D.

解法二　验证答案，将四个答案分别代入题中，通过数形结合，作出函数 $y=|x|$与 $y=|x+t|$的图象，得出函数$f(x)$的图象，然后由对称性排除 A，B，C，故选 D.

6. C　由函数$f(x)$的图象知：当 $x\in(-\infty,1]$时，$f(x)$为减函数，$\therefore f'(x)\leqslant 0$；当 $x\in[1,+\infty)$时，$f(x)$为增函数，$\therefore f'(x)\geqslant 0$. 结合选项知选 C.

题型 3　函数的零点及方程的解

典例调研

【典例 8】　(2011·浙江卷)设 a,b,c 为实数,$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$,$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x|f(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{x|g(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $|S|$,$|T|$ 分别为集合 S,T 的元素个数,则下列结论不可能的是

A. $|S|=1$ 且 $|T|=0$　　B. $|S|=1$ 且 $|T|=1$

C. $|S|=2$ 且 $|T|=2$　　D. $|S|=2$ 且 $|T|=3$

【破题思路】　本小题主要考查函数、零点、方程等内容,解题时要结合一次函数、二次函数、参数可能出现的情况进行分类讨论,采用排除法解题事半功倍.

【满分解答】　若 $a=b=c=0$,则 $f(x)=x^3=0$,$x=0$,$|S|=1$,$g(x)=1$,$g(x)=0$ 无解,因此 $|T|=0$,即 A 项有可能;若 $a=1$ 且 $b^2-4c<0$,则 $|S|=1$ 且 $|T|=1$ 成立,即 $f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 都仅有一个解 $x=-1$,即 B 项也是有可能的;若 $a=1$ 且 $b^2-4c=0$($b=2\sqrt{2}$,$c=2$),则 $|S|=2$ 且 $|T|=2$ 成立,即都仅有两个解 $x=-1$ 和 $x=-\sqrt{2}$,即 C 项也是有可能的;对于 D 项,若 $|T|=3$,则 $\Delta=b^2-4c>0$,从而导致 $f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$ 也有 3 解,因此 $|S|=2$ 且 $|T|=3$ 不可能成立.

【答案】　D

【典例 9】　(2011·山东卷)已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上最小正周期为 2 的周期函数,且当 $0\leqslant x<2$ 时,$f(x)=x^3-x$,则函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[0,6]$ 上与 x 轴的交点的个数为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【破题思路】　本题考查函数的性质,考查函数的零点,考查基本的运算能力,考查数形结合思想.

【满分解答】　由 $f(x)=0$,$x\in[0,2)$ 可得 $x=0$ 或 $x=1$,即在一个周期内,函数的图象与 x 轴有两个交点,在区间 $[0,6)$ 上共有 6 个交点,当 $x=6$ 时,也是符合要求的交点,故共有 7 个不同的交点.

【答案】　B

【典例 10】　(2010·全国卷Ⅰ)直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点,则 a 的取值范围是 ________.

【破题思路】　使用数形结合法,画出图象,可帮助分析问题.

【满分解答】　**解法一**　如图 1-1-8 所示,在同一直角坐标系内画出直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$,观图可知 a 的取值必须满足 $\begin{cases}a>1,\\ \dfrac{4a-1}{4}<1,\end{cases}$ 解得 $1<a<\dfrac{5}{4}$.

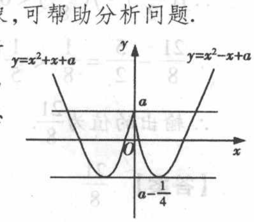


图 1-1-8

高分攻略

为解决方程 $f(x)=g(x)$ 的有关解的个数或求参数的取值范围等问题,我们将方程的根与函数的零点的关系进一步拓广为:方程 $f(x)=g(x)$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有交点. 由此知,求方程 $f(x)=g(x)$ 的实数根就是确定函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象交点的横坐标,而方程 $f(x)=g(x)$ 的实数根的个数可根据两函数图象的交点个数来判断.

知识必备

函数的零点的存在性定理:如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线,并且 $f(a)\cdot f(b)<0$,那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$,这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.