普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

高等数学（经济类）学习辅导

配套第3版

蒋兴国　蔡苏淮　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套辅导

高等数学(经济类)学习辅导

配套第3版

蒋兴国　蔡苏淮　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学(经济类)》(第3版)(机械工业出版社)的教与学的参考书. 同时本书相对独立，即使读者没有见过本书的配套教材，也可以顺利使用本书.

本书给出配套教材中所有习题的详解.

根据基本教学要求，本书选择了典型例题和学习效果测试题，除了基本题、综合题外，还有一定数量的提高题，不少题目选自全国研究生入学考试题.

本书除对典型例题给出详解外，还对每章学习效果测试中的全部习题给了详解，包括填空题和单项选择题. 对部分例题和测试题或给出多解，或给出引申题、类比题. 编者根据多年的教学经验，在部分例题和测试题后给出注释.

本书的主要对象是大专院校的学生(既可平时学习用，也可考研前用)，同时本书也是教师的较为实用的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导：经济类：配套第3版/蒋兴国，蔡苏淮编著. —北京：机械工业出版社，2011.6

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

ISBN 978-7-111-35118-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①蒋…②蔡 Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第118014号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 版式设计：霍永明
责任校对：李秋荣 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2011年9月第1版第1次印刷
184mm×240mm·26.75印张·579千字
标准书号：ISBN 978-7-111-35118-4
定价：45.00元

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学(经济类)》(第 3 版)(机械工业出版社)的教与学的参考书.

本书的主要对象是大专院校的学生(本书既可以作为学习高等数学时的参考书，也可以作为准备考研的复习资料)，同时本书也是教师的较为实用的教学参考书.

书中给出配套教材中的所有定义和定理(序号与原教材序号一致)，便于学生复习，并对部分定理或公式，给出注释.

书中给出配套教材中的所有习题的详解. 仅用于学生做作业后核对和苦思之后仍未想出求解方法时的参考. 做作业时不加思索直接翻看解答对学习效果有很大的伤害。放弃思考的乐趣也是很大的损失.

全书根据基本教学要求，选择了典型例题和学习效果测试题，其中除了基本题、综合题外，还有一定数量的有难度的提高题. 书中不少例题和测试题选自全国研究生入学考试题.

全书除对典型例题给出详解外，还对每章学习效果测试中的全部习题给了详解，包括填空题. 对单项选择题中正确的项给了证明或推理，对错误的项，说明了道理或举了反例.

全书对部分例题、测试题或给出多解，或给出引申题、类比题.

编者根据多年的教学经验，对学生学习中常见的疑难问题给予了解答. 在部分例题和测试题后给出注释，指出学生常犯的错误，分析错误的根源.

特别提出，在编写的过程中，编者刻意使本书相对独立. 即使读者没有见过本书的配套教材，也可以顺利使用本书.

编写一本有特色的能得到读者认可的高等数学教与学的参考书，是编者努力的目标. 囿于水平，全书难免有讹漏粗疏之处，也难免有不尽如人意之处，恳请读者批评指正. 编者的电子邮箱：xingguo-jiang@ hotmail. com

shcai@ yzu. edu. cn

目　录

第 1 章　预 备 知 识

一、本章内容提要

定义 1-1　在观察某事物的过程中，若某个量的取值始终不变，则称该量为常量；而可取不同的值的量称为变量.

定义 1-2　设 x，y 是两个变量，D 是一个非空数集，对于变量 x 的每个值 $x_0\in D$，变量 y 按照某个对应法则总有唯一确定的数值 y_0 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，有时简记为 $f(x)$ 或 f，称 x 是自变量，y 是因变量，称 D 是函数的定义域.

当变量 x 取值 $x_0\in D$ 时，称 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，与之对应的变量 y 的值 y_0 被称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，并记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的各个值时，对应的函数值的全体组成的集合

$$Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

称为函数的值域. 平面直角坐标系中的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的图像.

函数的常用表示法有：

(1) 公式法(解析法)　用公式表示函数的方法称为公式法或解析法；

(2) 图像法　把函数的图像在坐标系中描绘出来，这种表示函数的方法称为图像法；

(3) 表格法　用表格来给出函数定义域与对应法则的方法称为表格法.

定义 1-3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于区间 $I\subseteq D$ 上的任意两点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 总有：

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调增加；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调减少.

使函数具有单调性的区间称为函数的单调区间. 若函数在其定义域上是单调的，则称函数为单调函数.

定义 1-4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I\subseteq D$.

(1) 如果存在常数 C，使 $|f(x)|<C$，$(C>0)$，$\forall x\in I$，则称该函数在 I 上是有界的. 否则，称此函数在 I 上无界.（即若对于任意给定的正常数 M，存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>M$，则称此函数在 I 上无界)；

(2) 如果存在常数 C，使 $f(x)<C$，$\forall x\in I$，则称该函数在 I 上是有上界的.

(3) 如果存在常数 C，使 $C<f(x)$，$\forall x\in I$，则称该函数在 I 上是有下界的.

若函数在其定义域上有界，则称此函数为有界函数.

定义 1-5 设函数$f(x)$的定义域为D，且对于任意$x\in D$，总有$-x\in D$，

（1）若$\forall x\in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称此函数为偶函数；

（2）若$\forall x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称此函数为奇函数.

奇函数、偶函数的定义域是x轴上关于原点对称的点集.

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

定义 1-6 设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在常数$T>0$，使

$$f(x+T)=f(x),\forall x\in D,$$

则称$f(x)$为周期函数，称常数T为此函数的周期. 通常称满足上式的最小正数T_0(若存在的话)为此函数的最小正周期.

定义 1-7 设$y=f(x)$的定义域为D，值域为Z_f. 如果对于每个$y_0\in Z_f$，都有唯一的对应值$x_0\in D$，满足$y_0=f(x_0)$，则依此对应法则定义了一个以Z_f为定义域，y为自变量，x为因变量的函数，称为函数$y=f(x)$的反函数，记为$x=f^{-1}(y)$. 习惯上把反函数$x=f^{-1}(y)$中的字母x，y互换，写成$y=f^{-1}(x)$，那么$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

定义 1-8 设y是u的函数$y=f(u)$，$u\in U$，而u是x的函数$u=\varphi(x)$，$x\in D$且$\varphi(x)$的值域包含于$f(u)$的定义域中，则y通过u也是x的函数，称此函数是由$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

并称x为自变量，称u为中间变量.

基本初等函数包括：

（1）常数函数$y=c$；

（2）幂函数$y=x^\alpha$，α为实数，其定义域视指数的情况而定；

（3）指数函数$y=a^x$，$(a>0,\ a\neq1)$其定义域为一切实数；

（4）对数函数$y=\log_a x$，$(a>0,\ a\neq1)$，定义域为$(0,\ +\infty)$；

（5）三角函数：

正弦函数$y=\sin x$，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，

余弦函数$y=\cos x$，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，

正切函数$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，k为整数，

余切函数$y=\cot x$，$x\neq k\pi$，k为整数，

正割函数$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，余割函数$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

（6）反三角函数：

反正弦函数$y=\arcsin x$，$x\in[-1,\ 1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，

反余弦函数$y=\arccos x$，$x\in[-1,\ 1]$，$y\in[0,\ \pi]$

反正切函数 $y=\arctan x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in(0, \pi)$

此外，还有反正割函数、反余割函数.

关于反三角函数，由定义知，若 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，则 $\arcsin y=x$，

故有以下的**三角函数关于反三角函数的逆运算关系**

$$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

类似地，有以下关系：

$$\arccos(\cos x)=x,\ x\in[0, \pi];$$

$$\arctan(\tan x)=x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x)=x,\ x\in(0, \pi).$$

同样，不难看到还有以下一些关系：

反三角函数关于三角函数的逆运算关系：

$$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1,1];$$

$$\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1,1];$$

$$\tan(\arctan x)=x,\ x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x)=x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

当改变反三角函数变量符号时与原来函数的关系：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1];$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ x\in[-1,1];$$

$$\arctan(-x)=-\arctan x,\ x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

对于基本初等函数，应当熟悉其定义域、值域、基本性质和图形的基本特征.

定义 1-9 由基本初等函数经过**有限次**四则运算和**有限次**复合运算构成的并可**由一个式子**表示的函数，称为初等函数.

二、典型例题解析

例 1 下列函数 $f(x)$，$g(x)$ 相同的是(   ).

A. $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=x$，$g(x)=\sin(\arcsin x)$

解 由函数的定义可知，只要定义域和对应法则确定，函数也就确定. 因此，两个函数只要定义域和对应法则分别相同，这两个函数就相同，否则两个函数就不相同. A，C， D选项中两个函数的定义域不同，B中两个函数定义域和对应法则分别相同，所以选B.

例2 研究函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+2x+5}$在其定义域内的有界性.

解 因为$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geqslant 4$，所以$0<\dfrac{1}{x^2+2x+5}\leqslant\dfrac{1}{4}$，而$|\sin x|\leqslant 1$

所以$\left|\dfrac{\sin x}{x^2+2x+5}\right|\leqslant\dfrac{1}{4}$，所以$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+2x+5}$有界.

注 容易证明：两个有界函数在其定义域的交集上的和、差、积仍是有界函数. 但两个有界函数的商(除数不为零)不一定是有界函数，例如$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$都是有界函数，但$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\tan x$在其定义域上却不是有界函数.

例3 研究函数$f(x)=x\sin x$的有界性.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 对于任意给定的正数M，存在整数n，使得$x_0=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$的绝对值大于$M$，当$x_0=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$时，$|x_0\sin x_0|=\left|2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}\right|>M$. 所以所给的函数无界.

例4 研究$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$的奇偶性.

解 此函数的定义域为$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以定义域关于原点对称. 并且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\frac{e^x(e^{-x}+1)}{e^x(e^{-x}-1)}=\frac{e^x+1}{1-e^x}=-f(x),\quad \forall x\in D_f$$

所以此函数为奇函数.

注1 奇函数或偶函数的定义域一定关于原点对称，所以，如果某函数的定义域不关于原点对称，则该函数就不是奇函数或偶函数；

注2 容易证明：两个奇函数(或偶函数)的和、差在其定义域内仍是奇函数(或偶函数)；两个奇函数(或偶函数)的乘积在其定义域内是偶函数；一个奇函数与一个偶函数的乘积或商在其定义域内是奇函数；若某函数$F(x)$的定义域关于原点对称，且可以由表示成以下形式$F(x)=f(x)+f(-x)$，即$F(x)$是自变量带相反符号的同名函数之和，则$F(x)$为偶函数；类似的，若某函数$F(x)$的定义域关于原点对称，且可以由表示成以下形式$F(x)=f(x)-f(-x)$，或$F(x)=f(-x)-f(x)$，即$F(x)$是自变量带相反符号的同名函数之差，则$F(x)$为奇函数；例如$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$为偶函数，而$g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$为奇函数.

注3 如果某函数$f(x)$的定义域关于原点对称，那么，它一定可以表示成一个偶函数和一个奇函数的和，这是因为$f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

例5 讨论$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$的奇偶性.

解 此函数的定义域关于原点对称.

$$f(-x)=\begin{cases}1+x, & -x\leqslant 0,\\ 1-x, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}=f(x),$$

所以$f(x)$为偶函数.

例6 设函数$f(x)=x(e^x+ae^{-x})(x\in \mathrm{R})$是偶函数，求实数$a$的值.

解 $f(-x)=-x(e^{-x}+ae^x)=f(x)=x(e^x+ae^{-x})$得$(a+1)e^{-x}=(a+1)e^x$

即$(a+1)(e^{-x}-e^x)=0$对任意非零实数都成立，所以$a+1=0$，故$a=-1$.

例7 求$f(x)=\sin^2 x$的周期及$g(x)=|\sin x|$的周期.

解 $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$，而$\cos 2x$的周期为$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，所以$f(x)$的周期为$\pi$.

$g(x)=|\sin x|$，$g(x)$的周期为π.

注1 一般地，若函数$f(x)$的周期为T，则显然$kf(x)+c$(其中k，c为常数，且$k\neq 0$)的周期也为T，且$f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

这是因为

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{|a|}\right)+b\right]=f\left[ax+a\frac{T}{|a|}+b\right]$$
$$=\begin{cases}f(ax+T+b)=f[(ax+b)+T]=f(ax+b), & a>0,\\ f(ax-T+b)=f[(ax+b)-T]=f[(ax+b)-T+T]=f(ax+b), & a<0.\end{cases}$$

注2 若函数$f(x)$的周期为T_1，函数$g(x)$的周期为T_2，且它们的周期组成的集合的交集非空，则：

可令$T=mT_1=nT_2$，其中m，n为两个待定的正整数，从而可以找到m，n使$T=mT_1$($=nT_2$)，为函数$F(x)=f(x)\pm g(x)$，$G(x)=f(x)g(x)$的周期.

例如$f(x)=\sin 3x$，$g(x)=\cos 4x$，$f(x)$的周期为$T_1=\dfrac{2\pi}{3}$，$g(x)$的周期为$T_2=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$. 令$T=mT_1=nT_2$，其中$m$，$n$为两个正整数，即$\dfrac{2\pi}{3}m=\dfrac{2\pi}{4}n$，从而$4m=3n$，所以可取$m=3$，$n=4$，因此$T=2\pi$为函数$F(x)=f(x)g(x)=\sin(3x)\cos(4x)$的周期.

又如，已知函数$f(x)$的周期为T，要求函数$F(x)=f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)$的周期$T_0$. 这里$T_1=T$，$T_2=\dfrac{T}{2}$，$T_3=\dfrac{T}{3}$，$T_4=\dfrac{T}{4}$，设$T_0=mT_1=nT_2=pT_3=qT_4$，其中$m$，$n$，$p$，$q$为正整数，则$T_0=mT=n\dfrac{T}{2}=p\dfrac{T}{3}=q\dfrac{T}{4}$，从而$m=n\dfrac{1}{2}=p\dfrac{1}{3}=q\dfrac{1}{4}$，所以可取$m=$

1，$n=2$，$p=3$，$q=4$，即可取 $T_0=T$.

因为只有正整数才谈最小公倍数，而函数的周期为 T 不一定是正整数，故以下结论是错的：若函数 $f(x)$ 的周期为 T_1，函数 $g(x)$ 的周期为 T_2，则 T_1，T_2 的最小公倍数 T 也是 $F(x)=f(x)\pm g(x)$，$G(x)=f(x)g(x)$ 的周期.

注 3 若某函数 $F(x)$ 是两个周期函数 $f(x)$，$g(x)$ 的和或乘积，那么函数 $F(x)$ 的周期也有可能比 $f(x)$，$g(x)$ 的周期都小.

例如 $F(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$|\sin x|$ 与 $|\cos x|$ 的周期都是 π，所以 π 是 $F(x)$ 的周期. 但它并不是 $F(x)$ 的最小正周期. 这是因为

$$F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=F(x),$$

所以，$\frac{\pi}{2}$ 也是 $F(x)$ 的周期.

注 4 两个周期函数的和不一定是周期函数.

例如：$f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

则 $f(x)$ 周期为 $2k\pi$，k 为正整数，$f(x)$ 的最小正周期为 2π. $g(x)$ 也是周期函数，任何一个正有理数都是 $g(x)$ 的周期. 但由于这两个周期函数的周期的集合的交集为空集，所以，$f(x)+g(x)$ 不是周期函数.

例 8 求函数 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数，并求反函数的定义域和值域.

解 因为对于任意 $x\in[-1,1]$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\pi\leqslant\pi+4\arcsin x\leqslant3\pi$，为使 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 有意义，须 $0\leqslant\pi+4\arcsin x$，即 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\arcsin x$，所以 x 取值应满足 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant1$，故函数 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的定义域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，值域为 $[0,\sqrt{3\pi}]$ 由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解出

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi)$$

所以反函数为 $y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi)$，定义域为 $[0,\sqrt{3\pi}]$，值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

例 9 $y=e^x-1$ 与 $y=\ln(x+1)$ 关于如下哪个直线或点对称：(　　)

A. 直线 $y=0$　　B. 直线 $x=0$　　C. 直线 $y=x$　　D. 原点 $(0,0)$

解 $y=e^x-1$ 是单调增函数，其反函数为 $y=\ln(x+1)$，所以它们的图形关于直线 $y=x$ 对称，故选择 C.

例 10 求 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 3^x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2+2, & 1\leqslant x\leqslant3\end{cases}$ 的定义域和反函数.

解　分段函数$f(x)$的定义域是各个分段区间的并集，所以其定义域为

$$D_f=[-3,0)\cup[0,1)\cup[1,3]=[-3,3]$$

当$-3\leqslant x<0$时，$y=f(x)=3x+1$，此时$-8\leqslant y<1$，且有$x=\dfrac{y-1}{3}$;

当$0\leqslant x<1$时，$y=f(x)=3^x$，此时$1\leqslant y<3$，且有$x=\log_3 y$;

当$1\leqslant x\leqslant 3$时，$y=f(x)=x^2+2$，此时$3\leqslant y\leqslant 11$，且有$x=\sqrt{y-2}$.

所以所求反函数为

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}, & -8\leqslant x<1,\\ \log_3 x, & 1\leqslant x<3,\\ \sqrt{x-2}, & 3\leqslant x\leqslant 11.\end{cases}$$

例 11　设$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ -x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

求(1) $f(3x-1)$；(2) $f[g(x)]$.

解　(1) $f(3x-1)=\begin{cases}2-(3x-1), & 3x-1\leqslant 0,\\ (3x-1)+2, & 3x-1>0\end{cases}=\begin{cases}-3x+3, & x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ 3x+1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

(2) 因为$f[g(x)]=\begin{cases}2-g(x), & x\in\{x\mid g(x)\leqslant 0,\ x\in D_g\},\\ g(x)+2, & x\in\{x\mid g(x)>0,\ x\in D_g\}\end{cases}$其中$D_g$为函数$g(x)$的定义域. 所以下面先研究变量$x$在什么范围内取值，使得$g(x)\leqslant 0$或$g(x)>0$.

令$g(x)\leqslant 0$，有两种可能：$\begin{cases}x^2-1\leqslant 0,\\ x<0\end{cases}$或$\begin{cases}-x+1\leqslant 0,\\ x\geqslant 0\end{cases}$解这两个不等式组，分别得$-1\leqslant x<0$及$x\geqslant 1$;

令$g(x)>0$，有两种可能：$\begin{cases}x^2-1>0,\\ x<0\end{cases}$或$\begin{cases}-x+1>0,\\ x\geqslant 0\end{cases}$解这两个不等式组，分别得$x<-1$及$0\leqslant x<1$.

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}2-g(x), & g(x)\leqslant 0,\\ g(x)+2, & g(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(x^2-1), & -1\leqslant x<0,\\ 2-(-x+1), & x\geqslant 1,\\ (x^2-1)+2, & x<-1,\\ (-x+1)+2, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3-x^2, & -1\leqslant x<0,\\ x+1, & x\geqslant 1,\\ x^2+1, & x<-1,\\ -x+3, & 0\leqslant x<1\end{cases}=\begin{cases}x^2+1, & x<-1,\\ 3-x^2, & -1\leqslant x<0,\\ -x+3, & 0\leqslant x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

例 12 指出函数 $f(x)=\arctan^2\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解 此函数可以看成由以下几个简单函数复合而成：

$$y=u^2, u=\arctan v, v=\frac{2x}{1-x^2}.$$

注 一般地，将某函数看成由几个简单函数复合而成，其目的是通过对函数复合层次的分析，为对函数的各种性质(包括极限、导数、单调性、连续性、可导性，等等)的研究及计算提供方便. 所以，如果分解到某个层次，该层次函数形式对于研究上述性质来说已较为简单(例如多项式)，则可以不继续分解；或者，到了某层次，该层次函数形式不必或不便看成复合结构，这时，也可不继续分解. 此例中，没有将 $\dfrac{2x}{1-x^2}$ 再分解，是因为它可以看成是两个多项式相除得到的函数(称为有理函数)，不必要也不便再看成复合函数. 又如，对于函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，可以将它看成由 $y=\ln u$ 与 $u=x+\sqrt{1+x^2}$ 这两个函数复合而成，而对于函数 $u=x+\sqrt{1+x^2}$，它虽不是基本初等函数，但它可看成是由基本初等函数 x 与复合函数 $\sqrt{1+x^2}$ 相加得到，分解到此可以结束.

例 13 已知 $\cos\alpha=a$，$\cot\beta=b$，其中 α、$\beta\in(\pi, 2\pi)$，试利用反三角函数表示 α 和 β.

分析 由于余弦函数 $y=\cos x$ 及余切函数 $y=\cot x$ 分别限定在区间 $[0, \pi]$ 及 $(0, \pi)$ 考虑其反函数，而本题中 α、$\beta\in(\pi, 2\pi)$，所以，先将它们转化，使与 α 及 β 有关的式子的数值分别落在区间 $[0, \pi]$ 及 $(0, \pi)$，再利用反函数表示它们.

解 由于 α、$\beta\in(\pi, 2\pi)$，故有 $0<\alpha-\pi<\pi$，$0<\beta-\pi<\pi$，而

$$\cos(\alpha-\pi)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-a,$$
$$\cot(\beta-\pi)=-\cot(\pi-\beta)=\cot\beta=b,$$

所以，有

$$\alpha-\pi=\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\quad \beta-\pi=\operatorname{arccot} b,$$

由此得

$$\alpha=2\pi-\arccos a,\quad \beta=\pi+\operatorname{arccot} b.$$

例 14 设 $z=2x+y-1+f(x-y)$，且已知当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $f(\sin x)$.

解 由条件当 $y=0$ 时，$z=x^2$ 知，$x^2=2x-1+f(x)$，所以 $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$. 所以 $f(\sin x)=(\sin x-1)^2$.

例 15 在极坐标系中，已知圆 $r=2\cos\theta$ 与直线 $3r\cos\theta+4r\sin\theta+a=0$ 相切，求实数

a 的值.

解 将极坐标方程化为直角坐标方程，得圆的方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，直线的方程为 $3x+4y+a=0$. 由题意知，圆心到直线的距离为 1，故有

$$\frac{|3\times 1+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

解得 $a=-8$ 或 $a=2$. 即实数 a 的值为 -8 或 2.

例 16 某商品若定价 5 元可卖出 1000 件，若每件价格降低 0.01 元，可多卖出 10 件，假定需求量 Q 是价格 p 的线性函数，试求此函数表达式及收益函数的表达式.

解 由题意，设需求函数表达式为 $Q=a+bp$，其中 a，b 为待定常数. 由题设知

$$\begin{cases}1000=a+5b,\\1010=a+4.99b.\end{cases}$$

解之得 $a=6000$，$b=-1000$，
所以 $Q=6000-1000p$，
收益函数为 $R=pQ=p(6000-1000p)=6000p-1000p^2$.

例 17 某厂生产某种产品，年产量为 x(百台)，总成本为 C(万元)，其中固定成本为 2 万元，每生产 100 台成本增加 1 万元. 市场上每年可销售此种产品 400 台，其销售总收入 $R(x)$ 是 x 的函数 $R(x)=\begin{cases}4x-\dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 8, & x>4,\end{cases}$ 求利润函数.

解 总成本等于固定成本与可变成本之和，所以，由题意知，成本函数 $C(x)=2+x$

所以，利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+3x-2, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 6-x & x>4.\end{cases}$

三、本章学习效果测试练习

1. 单项选择题：

(1) 以下函数对中两个函数相同的是(　　).

A. $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$　　B. $y=\ln(x^2)$ 与 $y=2\ln x$

C. $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$ 与 $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$　　D. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 与 $y=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

(2) 以下函数对中两个函数不相同的是(　　).

A. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$　　B. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

C. $y=f(x)$ 与 $u=f(v)$　　D. $y=\sqrt{2}\cos x$ 与 $y=\sqrt{1+\cos 2x}$.

(3) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g(f(x))$ 为(　　).

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(4) 下列函数：

$y=\tan x+1$，$y=x\sin x$，$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 中，偶函数的个数是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 0

(5) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$在其定义域内是(　　).

A. 奇函数且无界　B. 偶函数且有界　C. 单调函数且无界　D. 奇函数、单调且有界

(6) 下列函数中，在区间(0，1)内有界的是(　　).

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=e^{-\frac{1}{x}}$　　C. $y=e^{\frac{1}{x}}$　　D. $y=\ln x$

(7) 下列几个数中，函数 $f(x)=\sin 3x+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 的周期是(　　).

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. 4π　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}$

(8) 函数 $y=\arccos x$ 的定义域和值域分别是(　　).

A. $(-1，1)$，$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$　　B. $(-\infty，+\infty)$，$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

C. $[-1，1]$，$[0，\pi]$　　D. $[-1，1]$，$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$ 则(　　).

A. $f(-x)=\begin{cases}-x-1, & x<1,\\ 2+x, & x>1\end{cases}$　　B. $\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}, & x<-1,\\ x, & |x|<1,\\ \dfrac{3}{2}, & x>1\end{cases}$

C. $f(x)$的定义域为$(-\infty，+\infty)$　　D. $f\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

(10) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$，则 $f(1-\ln x)$ 的定义域为(　　).

A. $(0, +\infty)$　　B. $[e, +\infty)$　　C. $[e^{-1}, 1]$　　D. $(0, e^{-1}]$

2. 填空题：

(1) 设 $f(x)=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域为________.

(2) 求函数 $y=\arcsin\frac{1}{2}(x^2-x)$ 的定义域为________.

(3) 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为________.

(4) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)>0$，$\varphi(x)$ 的其定义域为________.

(5) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)$ 的表达式为________.

(6) 设 $f(x+1)=x^2+\sin x$，则 $f(2x)=$________.

(7) $f(x)=1+\sin x+\cos 3x$，则 $f(x)$ 的最小正周期为________.

(8) 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数，且 $f(-1)=-1$，则 $f(7)=$________.

(9) 函数 $f(x)=\begin{cases}\arccos\frac{1}{x}, & x>1,\\ \sqrt{1-x}, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的定义域为________.

(10) 设函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ 与 $g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x)=$________.

3. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

4. 函数 $y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 是否有界.

5. 判断 $y=\frac{x\cos x}{1+x^2}$ 有界性与奇偶性.

6. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2-4, & 0<x<2\end{cases}$ 的反函数.

7. 已知 $\sin\alpha=a$，$\tan\beta=b$，且 α、$\beta\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. 试用反三角函数表示 α 和 β.

8. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\sin^2(\sqrt{x+5})$,

(2) $y=\log_2\left(\tan^2\frac{1}{x}\right)$,

(3) $y=2^{\cos 2(x+1)}$,