

经济应用数学

(一)

# 微 积 分

中央电大经济数学编写组编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学

(一)

# 微 积 分

中央电大经济数学编写组 编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学

(一)

微 积 分

中央电大经济数学编写组 编

\*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

\*

开本 $787 \times 1092$  1/32 印张16.5 千字346

1986年2月第1版 1990年2月第7次印刷

印数 677001~772000

定 价 3.25 元

ISBN 7-304-00224-7/O·18

## 前 言

本书是电大经济管理系各专业的公共必修基础理论课，也可供具有一般中学数学水平的经济管理人员学习参考。

本书主要介绍一元函数的微积分学。还介绍了级数、多元函数和微分方程的一些基本知识。编写这本教材，我们力求做到：(1)尽可能地联系经济方面的实际问题；(2)为了适合于远距离电视广播课的特点，编写得力求便于自学；因此例题和习题、应注意及说明的内容比一般同类教材增多了。由于作者水平有限，缺乏经验，编写时间又仓促，所以本书各方面都可能存在一些问题，欢迎广大读者批评指正。

本书在编写过程中得到许多省电大指导和帮助，特别是天津市电大、江苏省电大、河北省电大对此书的编写提出了许多宝贵的意见，谨在此表示感谢。

本书承蒙清华大学孙念增教授、中国人民大学胡富昌副教授认真审阅，对此书提出了宝贵的指导意见。谨在此表示衷心地感谢！

在中央电大郭星英老师的主持下，参加本书编写工作的有广东省电大的谭英仕同志(第一、二两章)、中央电大的郭星英同志(第三章和附录)、辽宁省广播电大的尹明厚同志(第四、七两章)、甘肃省电大的马芳城同志(第五、六两章)、中央电大的李毓芝同志(第八、九两章)。

编 者

1987 年 3 月

# 目 录

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| <b>第一章 函数</b> .....        | 1   |
| §1.1 常量与变量 .....           | 1   |
| §1.2 函数概念 .....            | 2   |
| §1.3 经济中常用的函数 .....        | 8   |
| §1.4 函数的特性 .....           | 14  |
| §1.5 反函数 .....             | 17  |
| §1.6 基本初等函数 .....          | 19  |
| §1.7 复合函数、初等函数 .....       | 24  |
| §1.8 初等函数图形的作法 .....       | 26  |
| 习题一 .....                  | 30  |
| <b>第二章 极限与连续</b> .....     | 35  |
| §2.1 极限概念 .....            | 35  |
| §2.2 无穷小量、无穷大量 .....       | 47  |
| §2.3 极限的四则运算 .....         | 51  |
| §2.4 极限存在准则、两个重要极限 .....   | 55  |
| §2.5 函数的连续性 .....          | 63  |
| 习题二 .....                  | 75  |
| <b>第三章 导数与微分</b> .....     | 81  |
| §3.1 引出导数概念的实例 .....       | 81  |
| §3.2 导数概念 .....            | 87  |
| §3.3 导数的基本公式与运算法则 .....    | 96  |
| §3.4 变化率的应用例题 .....        | 128 |
| §3.5 高阶导数 .....            | 133 |
| §3.6 微分 .....              | 137 |
| 习题三 .....                  | 152 |
| <b>第四章 中值定理及导数应用</b> ..... | 164 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| §4.1 中值定理 .....           | 164 |
| §4.2 罗必塔法则 .....          | 172 |
| §4.3 函数的性态与作图 .....       | 180 |
| §4.4 导数在经济分析中的应用问题 .....  | 199 |
| 习题四 .....                 | 210 |
| <b>第五章 不定积分</b> .....     | 218 |
| §5.1 原函数与不定积分的概念 .....    | 218 |
| §5.2 不定积分的性质 .....        | 222 |
| §5.3 基本积分表 .....          | 224 |
| §5.4 换元积分法与分部积分法 .....    | 228 |
| §5.5 有理函数的积分 .....        | 241 |
| §5.6 积分表的使用 .....         | 247 |
| 习题五 .....                 | 250 |
| <b>第六章 定积分</b> .....      | 255 |
| §6.1 引出定积分概念的实例 .....     | 255 |
| §6.2 定积分的定义 .....         | 259 |
| §6.3 定积分的基本性质 .....       | 264 |
| §6.4 微积分基本定理 .....        | 267 |
| §6.5 定积分换元积分法与分部积分法 ..... | 274 |
| §6.6 定积分的近似计算 .....       | 277 |
| §6.7 定积分的应用 .....         | 283 |
| §6.8 定积分在经济中的应用 .....     | 292 |
| §6.9 广义积分 .....           | 295 |
| 习题六 .....                 | 301 |
| <b>第七章 无穷级数</b> .....     | 307 |
| §7.1 无穷级数的概念及其基本性质 .....  | 307 |
| §7.2 数项级数及其判别法 .....      | 315 |
| §7.3 幂级数、泰勒级数 .....       | 330 |
| 习题七 .....                 | 353 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| <b>第八章 多元函数</b>          | 359 |
| §8.1 空间解析几何简介            | 359 |
| §8.2 二元函数的基本概念           | 369 |
| §8.3 二元函数的极限与连续性         | 373 |
| §8.4 偏导数                 | 377 |
| §8.5 全微分                 | 380 |
| §8.6 复合函数的微分法            | 385 |
| §8.7 隐函数的求导法             | 391 |
| §8.8 多元函数的极值             | 395 |
| §8.9 二重积分                | 411 |
| 习题八                      | 436 |
| <b>第九章 微分方程简介</b>        | 444 |
| §9.1 微分方程的一般概念           | 444 |
| §9.2 一阶线性微分方程            | 448 |
| *§9.3 二阶线性微分方程           | 467 |
| 习题九                      | 473 |
| <b>附录 I 集合问题</b>         | 482 |
| <b>附录 II 初等数学的重要数学公式</b> | 492 |
| <b>附录 III 简单积分表</b>      | 510 |

# 第一章 函 数

函数是微积分中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的对象，在这一章里，我们将从分析日常和经济现象中的变量出发，给出函数的一般的定义，通过例题介绍如何利用代数和几何知识建立经济学中常见的函数，结合图形讲一些简单的函数性质，并复习一下中学里已学习过的基本初等函数，分析初等函数的结构，为学习以后各章内容打下基础。

## § 1.1 常量与变量

出现在数学问题中的量，尽管多种多样，但大体可分为两类：一类是它的值在问题的讨论中是相对地始终保持不变的；另一类是它的值是可以变动的。我们称前者为常量，后者为变量。例如，在讨论某种产品的总成本时，我们把总成本分成两部分：一部分是固定成本，它是由折旧费，车间经费及企业管理费等构成，这些费用不随产品产量的增减而变化，因此它是一个常量；另一部分是变动成本，它是由主要原材料费，直接参加生产的工人工资等构成，这些费用是随着产品产量的增减而增减的，因此它是一个变量。

我们必须注意到上述常量与变量的概念，要依赖于所讨论的问题所在的场合，同一个量在某种情况下可以认为是常量，而在别的情况下，就可能是变量。例如，商品的价格在短

期内可以看成是常量,在一个较长时间内就是一个变量。

在数学中讨论的量,无论是常量还是变量,都不管它们的实际意义,而只注意它们的数值,并用字母  $a, b, \dots$ , 或  $x, y, \dots$  等来表示。

量  $x$  的每一个值都是一个数,因而可以用数轴上的一个点来代表它。如果量  $x$  是常量,则用数轴上的一个定点来表示;如果量  $x$  是变量,则用数轴上的动点来表示。

## § 1.2 函数概念

现实世界中各种不同的变化着的量不是孤立的,而是相互联系相互制约的。因此我们不但要研究事物的量的变化,而且更重要的要研究不同的量的变化之间的相互依赖关系。这种依赖关系中一种简单而又非常重要的情况,就是数学中的所谓函数关系。先考察几个例子。

**例1** 大家知道,圆面积  $S$  与它的半径  $r$  之间的关系由公式

$$S = \pi r^2$$

给定。当半径  $r$  取定某一正的数值时,圆的面积  $S$  也就跟着有一个确定的数值。

**例2** 设某水泥厂每日最多能生产水泥 100 吨,固定成本为 1000 元,每生产水泥 1 吨,成本增加 20 元,则水泥厂每日的总成本  $C$  与总产量  $q$  有如下的关系:

$$C = 20q + 1000$$

当  $q$  在生产能力容许的范围内  $[0, 100]$  取定某一数值时,

总成本也随之有一个确定的数值与之对应。例如  $q=10$  (吨) 时,  $C=20 \times 10 + 1000 = 1200$  (元)。

**例 3** 为了进行市场预测, 调查了某企业 1—6 月份某种商品的销售量分别为 100、105、110、115、111、120 件。将其列成表格, 则月份  $t$  与销售量  $q$  有如下的对应关系:

| 月份 $t$  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 销售量 $q$ | 100 | 105 | 110 | 115 | 111 | 120 |

根据这个表格, 当  $t$  取定 1—6 的整数中的任一个时,  $q$  都有一个确定的数与之对应。

**例 4** 一天中气温  $T$  与时间  $t$  是两个变量。某日气温自动记录仪记录了这两者的关系如下图:

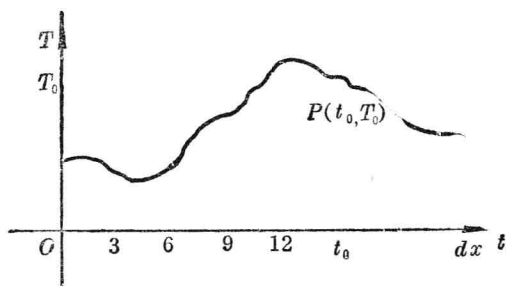


图 1.1

根据这个图形, 可以求出对应于 0—24 小时内每一时刻  $t_0$  的温度  $T_0$ 。

综合上面四个例子, 我们得到这样一个共同点: 每一个间

题都包含着两个变量和一个确定的对应关系，尽管这个对应关系的表达方式各有不同（如例 1、例 2 由公式表达，例 3 由表格表达，例 4 由图形表达），但都指明了两个变量对应关系的具体内容，根据这一对应关系，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一变量就有确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系，就是函数概念的实质。

如果抛开变量的具体意义，仅从纯数量的角度，一般地来研究这种变量之间的依赖关系时，就可以抽象出下面的定义。

**定义 1.1** 设有两个变量  $x$  和  $y$ ，变量  $x$  的变化范围为  $D$ （实数集），如果对于  $D$  中的每个  $x$  值，按照某一对应规律  $f$  都可以唯一地确定变量  $y$  相应的值，我们就说变量  $y$  是变量  $x$  的函数，记为

$$y = f(x) \quad x \in D$$

$x$  称为自变量， $y$  称为因变量， $x$  的变化范围  $D$  叫做函数的定义域。

**定义 1.2** 设函数  $y = f(x)$ ，当自变量  $x$  取定定义域中某一定值  $x_0$  时，因变量的相应值叫做当  $x = x_0$  时的函数值，记作  $f(x_0)$  或  $f(x)|_{x=x_0}$ ， $y|_{x=x_0}$ ，当  $x$  取遍定义域中每个值时，所有函数值的全体叫做函数  $y = f(x)$  的值域。

例如：设  $f(x) = 2x^2 - 5$ ，则

$$f(1) = 2 \cdot (1)^2 - 5 = -3$$

$$f(2) = 2 \cdot (2)^2 - 5 = 3$$

$$(2x^2 - 5)|_{x=-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 = -\frac{9}{2}$$

$$(2x^2-5)|_{x=a}=2\cdot(a)^2-5=2a^2-5$$

为了更好地弄清函数概念的实质，下面几点说明是必要的。

### 一、确定函数的要素

函数概念反映着自变量和因变量之间的依从关系。它涉及到定义域、对应规律和值域。但是很明显，只要定义域和对应规律确定了，值域也就随之确定。因此，定义域和对应规律是确定函数的两个要素，只要两个函数的定义域和对应规律都相同，那么这两个函数就相同；只要定义域或对应规律之一不相同，那么这两个函数就不相同。例如  $y=1$  与  $y=\sin^2 x + \cos^2 x$ ，这两个函数的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ ，对应规律都是：不管  $x$  取任何值， $y$  都恒等于 1（因为有三角恒等式  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ），因此它们是相同的函数。又如， $y=\sin x$  与  $y=\cos x$ ，虽然它们的定义域都一样  $(-\infty < x < +\infty)$ ，值域也相同  $(|y| \leq 1)$ ，但对应规律不同。比如取  $x = \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，而  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，因此它们是不同的函数。又如  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  与  $y=x+1$ ，前者定义域不包含  $x=1$ ，后者不受这个限制，二者定义域不同，所以它们是不同的函数。

在这里还应当指出，在函数的定义中并未规定自变量与因变量是用什么字母表示。只要定义域及对应规律一样，不管自变量及因变量采用什么字母表示，我们都认为是相同的函数，例如  $S=\pi r^2$ ， $u=\pi v^2$ ， $y=\pi x^2$  都是相同的函数，因为只要把右边的字母都看作自变量，左边的字母看作因变量，那么

它们的定义域和对应规律都一样。

## 二、关于函数的表示

函数定义中对表示函数的方式并未加任何限制。它不一定要用公式表示，它可以通过表格(如例3)、图示(如例4)或其它方式来表示。即使用分析式表示，也并没有规定只用一个式子表示。根据实际问题变量间的具体对应关系，有时需用几个式子来表示。这类函数称为“分段函数”。例如：

$$y = \begin{cases} x-1 & -\infty < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

变量  $y$  与  $x$  之间的关系，完全满足函数的定义。

此外，在我们研究两个不同的函数时，也要用两个不同的字母来分别表示它们的对应规律。或者用同一个字母加上足标以示区别。例如圆的周长  $l$  和圆的面积  $S$  都是半径  $r$  的函数，我们可以分别用

$$l = f(r) \quad \text{与} \quad S = \varphi(r)$$

表示它们。显然  $f(r) = 2\pi r$ ， $\varphi(r) = \pi r^2$  它们表示不同的对应规律。

## 三、函数定义域的确定

除了在实际问题时，根据变量的实际变化范围来确定定义域之外，在数学中，当函数  $y = f(x)$  通过一个表达式表示时，我们规定其定义域就是使该式子有意义的自变量的值的全体。因此，在确定函数的定义域时，必须注意下面几点：

1. 函数式里如果有分式，则使分母为零的自变量的值必须除外。

2. 函数式里如果有偶次根式, 则根号里的整个式子必须大于或等于零。

3. 函数式里如果有对数记号, 则要使真数为正。

4. 函数式里如果有正切函数或余切函数, 则在正切、余切符号下的式子的值分别不能等于  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。

5. 函数式里如果有反正弦或反余弦函数, 则在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1。

6. 如果函数的表达式由若干项组合, 则它的定义域是各项定义域的公共部分。

例 5 试确定函数  $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x}$  的定义域。

解 此函数的第一项  $\sqrt{1-x^2}$  的定义域由

$$1-x^2 \geq 0$$

确定, 解此不等式得

$$|x| \leq 1$$

即

$$-1 \leq x \leq 1$$

第二项  $\sqrt{x}$  的定义域为  $x \geq 0$ , 两者的公共部分为

$$0 \leq x \leq 1$$

这就是所求的函数的定义域。

#### 四、关于单值函数与多值函数

在上述函数定义中, 规定对于每个  $x \in D$ , 有且仅有  $y$  的一个值与之对应; 若对于每个  $x \in D$ , 有  $y$  的多个值与之对应, 则不符合我们上述函数的定义。有时把这种情况称为多值函数, 而符合上述定义的函数称为单值函数。以后如果不加特

别说明,所有函数都指单值函数。

## § 1.3 经济中常用的函数

### 一、总成本函数

前面我们已经知道,总成本是由固定成本和变动成本两部分组成。

**例1** 设某厂生产某种产品的最大生产能力为 $b$ 个单位,至少要生产 $a$ 个单位,固定费用为 $C_1$ 元,每生产1个单位产品,变动费用增加 $C_2$ 元,试求总成本函数。

**解** 设 $q$ 表示总产量,则 $q$ 只能在 $[a, b]$ 内取值,生产 $q$ 个单位的变动成本为 $C_2q$ 。所以总成本

$$C = C_1 + C_2q \quad q \in [a, b]$$

### 二、价格函数

我们已经说过,商品的价格与市场的供求情况有密切关系。一般说来,价格是销售量的函数。

**例2** 设某批发站批发一万只某种牌号手表给零售商,目前该种牌号手表的订价为70元,若批发站每次多批发3000只该牌号手表,市面上该种手表的价格就相应地降低3元,现批发站最多只能批发2万只手表给零售商,最小销量为1万只,试求价格函数(即销售量对价格的影响)。

**解** 设以 $q$ 代表手表总销售量,则 $q$ 只能在 $[10000, 20000]$ 上取值。按每多销售3000只,价格相应减少3元的比例,多销售 $q - 10000$ 只,价格相应减少了 $3 \cdot \frac{q - 10000}{3000}$ 。故价

格函数为

$$p = 70 - 3 \cdot \frac{q - 10000}{3000}$$

即

$$\begin{aligned} p &= 70 - \frac{q - 10000}{1000} \\ &= 80 - \frac{1}{1000}q \quad q \in [10000, 20000] \end{aligned}$$

### 三、需求函数

在例 2 中把价格看作是销售量(需求量)的函数。我们也可以反过来,把需求量看作是价格的函数,一般地需求量是随着价格的提高而减少的。

**例 3** 如果我们把例 2 中的条件改为:“手表的价格为 70 元时,销售量为 10000 只,若手表价格每提高 3 元,需求量就减少 3000 只”,则我们可得出需求函数为

$$q = 10000 - \frac{p - 70}{3} \cdot 3000$$

即

$$q = 1000(80 - p)$$

其实,这个关系式与例 2 的关系式是等价的。从这个关系式可以知道,手表的价格不能超过 80 元,否则没有销路。

### 四、供应函数

如果我们考虑市场供应的一方,当商品提供者能得到的商品价格增加时,我们可望供应者增加它们的产品的供应量,因此供应量也是价格的函数。

**例 4** 设手表的价格为 70 元时,手表厂可提供 10000 只手表,当价格每增加 3 元时,手表厂可多提供 300 只手表,试求供应函数。

解 设仍以  $p$  代表手表的价格,  $q$  代表手表供应量, 则依题意有

$$q = 10000 + 300 \cdot \frac{p-70}{3}$$

或

$$q = 100(30 + p)$$

如果我们把例 3 的需求函数和例 4 的供应函数作于同一个坐标系内(图 1.2) 它们的交点所对应的价格, 就是供求平衡价格(70 元) 低于这个价格则求大于供, 高于这个价格, 则供大于求。

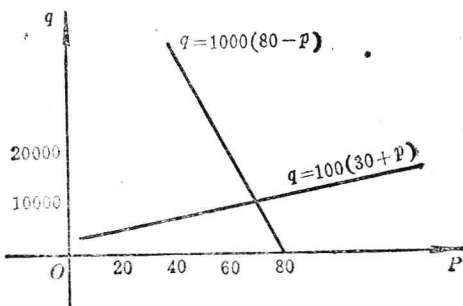


图 1.2

## 五、收益函数

收益函数就是销量与价格的乘积, 以  $q$  代表销量,  $p$  代表价格,  $R$  代表收益, 则有

$$R = q \cdot p$$

如果把  $p$  看作是  $q$  的函数  $p = p(q)$ , 则收益也是  $q$  的函数

$$R = q \cdot p(q) = R(q)$$

## 六、利润函数

收益与成本之差就是利润  $L$ :