物理实验

上海高等工程专科学校《物理实验》编写组　编

TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济大学出版社

物理实验

上海高等工程专科学校
《物理实验》编写组

同济大学出版社

（沪）新登字204号

内 容 提 要

本书是根据国家教委颁发的《高等工程专科物理实验课程教学基本要求》，结合上海地区部分高等工程专科学校几年来教学改革的经验编写而成的。全书除绪论和附表外，共包括25个实验。每个实验后均安排了预习题和思考题，便于学生自习和巩固知识。

本书可作为工科大专院校各专业的实验教材，也可供职工大学、业余大学、函授大学等选用。

责任编辑　张平官
封面设计　王肖生

物 理 实 验
上海高等工程专科学校
《物理实验》编写组
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
上海中行印刷厂常熟分厂印刷
新华书店上海分行所发行
1994年7月第1版　1994年7月第1次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：11.25　字数：283千字
印数：1—10000　　定价：6.50元
ISBN7-5608-1407-7/O.125

前　言

1985年上海高等工程专科《物理实验》编写组编写了《物理实验》，至今已经过8年的教学实验。在此基础上，我们又根据《高等工程专科物理实验课程教学基本要求》重新编写了该书。

高等工程专科学校是专门培养工程技术应用人才的学校，必须贯彻"以应用为目的，以必需、够用为度"和"掌握概念，强化应用"的原则，使学生通过物理实验，初步掌握物理的基本思想、基本技能和基本方法、考虑到专科学校的基础和物理实验的独立性，力求做到实验原理叙述清楚，仪器介绍实用典型，实验步骤简明扼要。

在内容安排上，打破了原来的力、热、声、电、光的传统体系，按由浅入深、循序渐进的原则进行安排。我们增加了应用性的传感器实验内容：电阻温度计、电阻应变传感器、用光纤传感测溶液的浓度、光电池的特性及应用。删去了一部分验证性内容：光电效应、夫兰克-赫兹实验、密立根油滴实验。我们还适当降低了理论要求，有些内容着重讲清概念和结论，不作缜密推导和证明。

本书的绪论部分介绍了误差理论和数据处理的基本知识。误差论理以算术误差为主，适当介绍科学技术中常用的标准误差，并在一个实验中加以应用。

每个实验后均设置了填充形式的预习题，以便检查学生的预习效果。实验后的思考题有助于学生巩固和提高实验知识和技能。

本书是在上海高等教育局教学处的领导和上海高等工科院校物理协作组的关怀下，由上海七所大专院校从事物理实验的教师组成的《物理实验》编写组编写的。参加编写的有：上海轻工业高等专科学校邵汝，冯蕴道，上海化学工业高等专科学校李明和，上海冶金工业高等专科学校张建，汪惠明，上海医疗器械高等专科学校杨定国，上海纺织工业高等专科学校黄永志，上海石油化工高等专科学校龚德甫，上海机器制造高等专科学校朱克铭，上海大学（原上海工业大学）物理实验室顾敏芳等。

由于时间仓促，编写水平有限，书中难免有不少缺点错误，敬请使用本书的教师、学生提出宝贵意见。

上海高等工程专科学校
《物理实验》编写组
1993年8月

目　录

绪　论

第一节　物理实验的重要性和要求

（一）物理实验课的地位和作用

物理学是一门实验科学。物理概念的建立，物理规律的发现，物理理论的形成，都必须以大量的科学实验为基础，并为以后的科学实验所验证。

在改革开放的年代，高等工程专科的教学不仅要使学生具有一定的理论知识，更要加强实践能力的培养，以适应学生毕业后从事工业生产第一线工作及现代化建设迅速发展的需要。

物理实验课程，在高等工程专科教育中有重要地位，它是对学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修的实验基础课，是学生进入大专学习后，受到系统实验方法和实验技能训练的开端，它为学生学习后续课程的实验和进行工程实验打下必要的基础。

工程专科物理实验课的任务是:

(1) 使学生掌握常用物理量的基本测量方法，学习物理实验的基本知识。

(2) 使学生学会常用物理仪器的调整及正确的使用方法。

(3) 使学生初步具备处理数据、分析结果、撰写实验报告的能力。

(4) 培养学生对待科学实验一丝不苟的严谨态度和实事求是的工作作风。

（二）物理实验课的基本程序

1. 实验前的预习

学生进入实验室前，必须进行预习。预习时，应仔细阅读教材，着重理解实验原理，明确哪些物理量是间接测量量，哪些是直接测量量，用什么方法和仪器来测定，等等。在此基础上写出预习报告，它应有下面几项内容:

(1) 实验目的。

(2) 实验原理，应写得简明扼要，如列出实验所依据的主要公式，说明式中各量的物理意义及适用条件。还应包括电路图或光路图。

(3) 实验仪器。

(4) 数据记录表格。表格应简单明了，能方便地记录直接测量的各个原始数据。并做好预习题。

2. 课堂实验

首先应该熟悉一下你将要使用的仪器、量具等的性能及正确操作规程，然后根据实验步骤和要求，认真调试，仔细观察和测量，如实记录好现象和数据。

实验完毕，应将记录交教师审阅，经教师认可后，方可收拾仪器，离开实验室。如数据不合理或错误，必须重做。

3. 完成实验报告

写实验报告是对实验全过程进行总结和深入理解的重要步骤，实验报告应独立完成。

除上述预习报告中的四部分外，实验报告内容还包括：

(1) 数据处理。将测量所得数据，按一定函数关系式求出测量结果，并计算误差，最后写出测量结果的表达式。

(2) 回答思考题。

书写实验报告时，要求学生做到字迹端正、文句通顺、数据记录整洁、计算过程清楚、结果正确、图表合格、内容简明扼要。

第二节　实验误差及数据处理

一、测量误差的基本概念

(一) 测量

在物理实验中，不仅要观察物理现象，而且要定量地测量物理量的大小。从测量方法上可将测量分为两类：

(1) 直接测量——直接用计量仪器读出待测量值的测量。例如，用游标卡尺测得长 $L=31.70\text{mm}$，用天平测得质量 $m=26.7\text{g}$ 等。这些由直接测量获得的未经任何处理的数据称作原始数据。

(2) 间接测量——需根据待测量和某几个直接测得量的函数关系求出待测量的测量。例如，用单摆测重力加速度 g 时，可以先测出摆长 L 和周期 T，再由公式 $g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot L$ 算出 g，g 的测量就是间接测量。可见，直接测量是间接测量的基础，实验中应该正确、清楚、完整地记录原始数据。物理实验中，许多量的测量是间接测量。

(二) 测量误差

测量的目的是要获得待测物理量的真值。所谓真值是指在一定条件下，某物理量客观存在的真实值。但由于测量仪器的局限，理论或测量方法的不完善，实验条件的不理想，观测者欠熟练等原因，所得到的测量值与真值之间总是存在着一定的差异，这差异称为误差。设待测量的真值为 A，测量值为 x，误差为 ε，则

$$\varepsilon = X - A \tag{1}$$

既然测量中的误差是不可避免的，真值也就成为一个理想的测不到的值，因此，测量的任务就是：

(1) 尽力消除或减小各种不利因素的影响，测出在一定条件下待测量的最可信赖值(求得最佳值)。

(2) 估计这个值的可靠程度（估算误差）。

(三) 误差的分类

根据误差的性质及其来源，可将它分为两类：

(1) 系统误差——由于偏离测量规定条件或测量方法不完善等因素，所引入的按某种确定规律出现的误差。

系统误差的特点是测量结果向某一确定的方向偏离，或按一定规律变化。其产生原因有以下几方面：仪器本身的缺陷（如刻度不准、不均匀或零点没校准等）、理论公式或测

量方法的近似性（如伏安法测电阻时没考虑电表的电阻，用单摆周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$测g的近似性）、实验者个人因素（如操作的滞后或超前，读数总是偏大或偏小）等。

由上述特点可知，在相同条件下，增加测量次数是不可能消除或减小系统误差的。但是，如果能找出产生系统误差的原因，我们就可采取适当的方法来消除或减小它的影响，并对结果进行修正。实验中一定要注意消除或减小系统误差。

(2) 随机误差——在同一条件下，多次测量同一物理量时，出现的绝对值和符号以不可预见方式变化着的误差。

实验中，即使已经消除了系统误差，但在同一条件下对某物理量进行多次测量时，仍存在差异，误差时大时小，时正时负，这就是因为存在随机误差的缘故。

随机误差是由于某些偶然的或不确定的因素所引起的。如实验者受到感官的限制，读数会有起伏；实验环境（温度、湿度、风、电源电压等）无规则的变化；或是测量对象自身的涨落等。这些因素的影响一般是微小的、混杂的，并且是随机的，也是无法排除的。

对某一次测量来说，随机误差的大小和符号都无法预计，完全出于偶然。但大量实验表明，在一定条件下，对某物理量进行足够多次的测量时，其随机误差就表现出了明显的规律性，即随机误差遵循统计规律，并且大量的随机误差是服从"正态分布"的。

在多次测量中，由于测量值中偏大和偏小的值总是可以相互抵消一部分，因此，增加测量次数可以减小随机误差。

实验中，常用到正确度、精密度和精确度三个不同的概念来评价测量结果。正确度高，是指测量结果与真值的符合程度高，反映了测量结果的系统误差小。精密度高，是指重复测量所得结果相互接近程度高（即离散程度小），反映了随机误差小。精确度高，是指测量数据比较集中，且逼近于真值，反映了测量的随机误差和系统误差都比较小。我们希望获得精确度高的测量结果。

至于在实验中测错数、读错数、记错数以及不正确操作等造成的测量错误（称粗差或过失误差），不是我们所讨论的测量误差。实验中应该力戒这类错误发生，并将它从原始数据中剔除。

（四）测量结果的表达

一个待测量X的测量结果，通常由最佳值、绝对误差和单位组成，这三者缺一不可，常写作如下形式：

$$X=\bar{X}\pm\Delta X(\text{单位}) \tag{2}$$

1. 测量结果的最佳值$\bar{X}$——算术平均值

为了减小随机误差，我们常要进行多次测量。设在相同条件（仪器、方法、环境、人员）下，对同一物理量X进行了n次重复测量（称等精度测量），得到一组测量值$X_1, X_2, \cdots, X_n$（称一个测量列）。

可以证明，待测量x的最佳值$\bar{x}$就是该测量列的算术平均值，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{3}$$

由上述可知，$\bar{x}$为最可信赖值，可用来代替真值。

2. 绝对误差Δx

用最佳值$\bar{x}$代替了待测量的真值后，各次测量值x_i与最佳值$\bar{x}$的"偏差"也就视为各测

量值与真值间的误差了，在初步学习中，我们不去严格区别“偏差”和“误差”了。

依据不同的问题和需要，绝对误差可以用不同的计算方式进行估算而得到。本书下面将要介绍的算术平均误差$\overline{\Delta x}$、仪器误差$\Delta_{仪}$和标准差σ都是绝对误差。这些不同的Δx表明了在$\bar{x} \pm \Delta x$范围内包含真值的不同的可能性。

3. 相对误差 E

绝对误差可以评价某一个测量的可靠程度，但若要比较两个或两个以上的不同测量结果时，它就无能为力了。这时就需要用相对误差来评价测量的优劣了。相对误差定义为

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{4}$$

例如，有两个测量结果$L_1 = 10.0 \pm 0.1\text{mm}$和$L_2 = 100.0 \pm 0.1\text{mm}$，两者的绝对误差都是0.1mm，但相对误差就不一样了。前者的误差占测量值的1.0%（$E_1 = \frac{0.1}{10.0} = 1.0\%$）。而后者仅占0.1%（$E_2 = \frac{0.1}{100.0} = 0.1\%$）。显然，相对误差小的后者的测量精密度比前者高。

若待测量有公认标准值（或理论值），还常将测量值与公认标准值（或理论值）进行比较，并用相对误差形式来表示:

$$E = \frac{|\text{测量值} - \text{公认值(或理论值)}|}{\text{公认值(或理论值)}} \times 100\% \tag{5}$$

一般称它为百分误差。

二、随机误差的估算之一——算术误差

在以下的讨论中，我们假定测量中的系统误差已被减小到可以忽略程度或是已经补偿修正，只存在随机误差。

（一）直接测量的误差估算

1. 多次测量的算术平均误差

在等精度的多次测量中，我们将每次的测量值x_i与最佳值$\bar{x}$的差取绝对值，用Δx表示，即

$$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}|,\ \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}|, \cdots, \Delta x_n = |x_n - \bar{x}|$$

则算术平均误差定义为

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \tag{6}$$

测量结果就可写作

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x} \tag{7}$$

上式为用算术平均误差表示的测量结果。它表明待测量的最佳值是$\bar{x}$，从$\bar{x} - \overline{\Delta x}$到$\bar{x} + \overline{\Delta x}$的区间内包含真值的可能性最大。这是一种粗略的误差估算。

2. 一次测量的误差

有时，某些待测量只测一次，误差如何取呢?

对于标出了精度等级的仪器仪表，应取用其仪器误差$\Delta_{仪}$为测量误差，则测量结果表为

$$x = x_{测} \pm \Delta_{仪} \tag{8}$$

仪器误差$\Delta_{仪}$是指在正确使用仪器的条件下，测量结果的最大误差。仪器误差一般在

仪器上或说明书上标明。例如，游标卡尺的$\Delta_{仪}$取其分度值δ（如50分度的游标卡尺的$\Delta_{仪}=\delta=0.02mm$）；螺旋测微计的$\Delta_{仪}=0.004mm$；电学仪表的$\Delta_{仪}$=量程×精确度等%。实验时，应该查看仪器的铭牌，并记录可能有用的数据（如分度值、级别、量程、型号等）。

若不知仪器误差，一次测量误差常取仪器最小分度值δ的一半，则测量结果表为

$$x = x_{测} \pm \frac{\delta}{2} \tag{9}$$

3. 误差取值的宁大勿小原则

若已求出算术平均误差$\overline{\Delta x}$，又已知仪器误差$\Delta_{仪}$，这时，我们要考虑到不利的情况，以避免对误差的估计不足，所以，应从$\overline{\Delta x}$和$\Delta_{仪}$中取较大的一个作为测量结果的误差。

另外，若多次测量的值完全一样，其误差并不为零，可取$\Delta_{仪}$为其误差。

求解直接测量结果时，常用列表形式表示出它的最佳值和算术平均误差，这样，可使求解过程显得简洁明了。

例题 1 用游标卡尺（50分度）测一长度5次，数据如下：L（cm）3.564，3.560，3.558, 3.568, 3.570。试求测量结果。

解

表 1 测物体长度 $\Delta_{仪}=0.002cm$

次数 n	长 L (cm)	误差 ΔL (cm)
1	3.564	0.000
2	3.560	0.004
3	3.558	0.006
4	3.568	0.004
5	3.570	0.006
平均值	$\overline{L}=3.564$	$\overline{\Delta L}=0.004$

又 $\overline{\Delta L} = 0.004cm > \Delta_{仪}$

故测量结果为

$$L = \overline{L} \pm \overline{\Delta L} = 3.564 \pm 0.004cm$$

（二）间接测量误差的估算

设间接测量值N与各独立的直接测量值x，y，…之间有如下函数关系

$$N = f(x, y, \cdots) \tag{10}$$

计算间接测量的最佳值时，是将各直接测量的最佳值$\overline{x}, \overline{y}, \cdots$代入上式中求出的，即

$$\overline{N} = f(\overline{x}, \overline{y}, \cdots) \tag{11}$$

由于直接测量值都有误差，因此计算得到的间接测量值也必然有一定的误差，这就是误差的传递。

1. 简单函数关系的误差传递举例

a. 和与差

设 $N = x \pm y$，其中$x = \overline{x} \pm \overline{\Delta x}$，$y = \overline{y} \pm \overline{\Delta y}$

则 $N = \overline{N} \pm \overline{\Delta N} = (\overline{x} \pm \overline{\Delta x}) \pm (\overline{y} \pm \overline{\Delta y})$

$$= (\bar{x} \pm \bar{y}) \pm (\Delta x \pm \Delta y)$$

于是得

$$\bar{N} = \bar{x} \pm \bar{y} \tag{12}$$

$$\Delta N = \pm \Delta x \pm \Delta y$$

按误差取值的宁大勿小原则，应取

$$\Delta N = \Delta x + \Delta y \tag{13}$$

式(13)就是和与差函数的绝对误差传递公式。

b. 积

设 $N = x \cdot y$，则

$$N = \bar{N} \pm \Delta N = (\bar{x} \pm \Delta x)(\bar{y} \pm \Delta y)$$

$$= (\bar{x} \cdot \bar{y}) \pm (\pm y \cdot \Delta x \pm x \cdot \Delta y \pm \Delta x \cdot \Delta y)$$

于是得

$$\bar{N} = \bar{x} \cdot \bar{y} \tag{14}$$

略去二阶小量$\Delta x \cdot \Delta y$，并按误差取值的宁大勿小原则，有

$$\Delta N = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y \tag{15}$$

两边再除以N，得

$$E = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \tag{16}$$

式(15)和(16)就是积函数的误差传递公式。

2. 误差传递的一般公式

对函数式 $N = f(x, y, \cdots)$求全微分，得

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \cdots$$

式中 dx, dy, …, dN 为 x, y, …, N 的微小改变量，而误差都远小于测量值，我们把 dx，dy，…，dN 看作误差，并记作 Δx，Δy，…，ΔN，又依据误差取值的宁大勿小原则，各项皆取绝对值，则绝对误差可表为

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right| + \cdots \tag{17}$$

相对误差可表为

$$E = \frac{\Delta N}{N} = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{f}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{f}\right| + \cdots \tag{18}$$

对于具有积商形式的函数，可先取自然对数，再求全微分，也可以得到相对误差

$$E = \frac{\Delta N}{N} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x} \Delta x\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y} \cdot \Delta y\right| + \cdots \tag{19}$$

下面将常用函数的算术误差传递公式列入表 2 中。

由表 2 可见，对于加减函数，可方便求得绝对误差；对于乘除函数，应先求得相对误差$E = \dfrac{\Delta N}{N}$，再用式子 $\Delta N = EN$，就可求得绝对误差了。

例题 2 有一金属圆柱体，用天平测得质量 $m = 162.38 \pm 0.01$g，用游标卡尺测得长度 $L = 39.92 \pm 0.02$mm，用螺旋测微计测其直径 6 次，数据为 24.932，24.930，24.921，24.929，24.925，24.926mm，求该金属的密度 ρ。

解 直径平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{6} \times (24.932 + 24.930 + \cdots + 24.926) = 24.927\text{mm}$$

表 2　常用函数的算术误差传递公式

函数式	算术误差传递公式
$N = x \pm y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = xy \quad N = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$
$N = kx$	$\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{\Delta x}{x} \quad \Delta N = k\Delta x$
$N = x^k$	$\dfrac{\Delta N}{N} = k \cdot \dfrac{\Delta x}{x}$
$N = \dfrac{x^m \cdot y^n}{z^k}$	$\dfrac{\Delta N}{N} = m\dfrac{\Delta x}{x} + n\dfrac{\Delta y}{y} + k\dfrac{\Delta z}{z}$
$N = \ln x$	$\Delta N = \dfrac{\Delta x}{x}$
$N = \mathrm{Sin}x$	$\Delta N = \lvert\cos x\rvert \cdot \Delta x$
$N = \cos x$	$\Delta N = \lvert\sin x\rvert \cdot \Delta x$

直径的算术平均误差

$$\Delta d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|d_i - \bar{d}| = \frac{1}{6}x(\,|24.932 - 24.927| + |24.921 - 24.927| + \cdots)$$

$$= 0.002\,8 \approx 0.003\text{mm}$$

螺旋测微计　　$\Delta_{仪} = 0.004\text{mm} > \Delta d$

所以直径测量结果为

$$d = \bar{d} \pm \Delta_{仪} = 24.927 \pm 0.004\text{mm}$$

金属圆柱体的密度为

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{m}{\frac{1}{4}\pi d^2 L} = \frac{162.38}{\frac{1}{4} \times 3.141\,6 \times 24.927^2 \times 39.92} = 8.335\,1\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

密度的误差为

$$E = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}$$
$$= \frac{0.01}{162.38} + 2 \times \frac{0.004}{24.927} + \frac{0.02}{39.92}$$
$$= 8.9 \times 10^{-4} \approx 0.09\%$$

$$\Delta\rho = E \cdot \rho = 8.9 \times 10^{-4} \times 8.3351 = 7.3 \times 10^{-3} \approx 0.008\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

所以测量结果为

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho = 8.335 \pm 0.008\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

从例题 2 的解题过程可以归纳以下几点:

(1) 首先用误差表示出各个直接测量值的结果，然后计算间接测量值及误差，最后表示间接测量值的结果。

(2) 绝对误差取一位，对于误差主要考虑的是勿估计不足，尾数只进不退；测量值的末位应与绝对误差所在位对齐，对于测量值主要考虑数值的准确性，尾数四舍五入；相对误差 $E<1\%$时，取一位，$E\geqslant 1\%$时，取两位，尾数只进不退。

在计算过程中间，以上各量皆可多保留一位数字。

(3) 若数值采用科学计数法，测量值和绝对误差应取用公共的 10 的幂指数形式。如 $L=(8.65\pm0.04)\times10^{-2}\text{m}$。

随机误差估算之二——标准误差

用算术误差估算随机误差是一种粗略的方法。根据误差理论可以得出精确估算随机误差的方法，常用的就是标准误差。

(一) 直接测量的标准误差

在一个等精度的测量列中，当测量次数 n 有限时，测量列的标准误差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{20}$$

它即是测量列中任一测量值的标准误差。若 σ 小，说明各测量值间的离散程度小，测量的精密度就高。由误差理论还可知，测量列中任一测量值的误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 区间内的可能性为 68.3%。可见，σ 是这测量列可靠性的一种评价。

那末，平均值 $\bar{x}$ 的可靠性如何呢？显然，$\bar{x}$ 的标准误差应比 σ 小。由误差理论可得平均值 $\bar{x}$ 的标准误差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{21}$$

这样，测量结果就可写作

$$X=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}} \tag{22}$$

上式为用标准误差表示的测量结果。它表明了待测量的最佳值是 $\bar{x}$，从 $\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$ 区间内包含真值的可能性为 68.3%。

标准误差的计算式是严格依据误差理论得出的，它对仪器的精确度有较高要求，在较精密实验及科学论文中皆用到它。在基础教学实验中，主要是初步建立起误差概念。本书将在指定实验中应用标准误差，以便对其有所了解。

例题 3 用钢板尺测某物长 5 次，数据如下：L (cm) 2.32, 2.34, 2.36, 2.30, 2.37。试用标准误差表示测量结果。

解 长度的平均值

$$\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i=\frac{1}{5}(2.32+2.34+2.36+2.30+2.37)=2.338\text{cm}$$

测量列的标准误差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(L_i-\bar{L})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{(2.32-2.338)^2+(2.34-2.338)+\cdots+(2.37-2.338)^2}{5-1}}$$

$$=0.029$$

平均值的标准误差为

$$\sigma_{\bar{L}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.029}{\sqrt{5}}=0.013\approx0.02\text{cm}$$

所以，测量结果为

$$L = \bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}} = 2.34 \pm 0.02\text{cm}$$

如果小型计算器具有统计功能，用它来计算标准误差是很方便的。现以 CASIO fx−180P 型计算器为例，说明标准误差的计算方法:

(1) 打开电源，将计算器置于统计功能。

按“3”键，显示“SD”;

(2) 清零。

按“INV”“AC”键，显示“0”;

(3) 逐个输入数据。

按 2.32,“DATA”2.34“DATA”, …, 2.37“DATA”, 逐次显示“2.32”,“2.34”, …,“2.37”。

(4) 输出统计量。

按“INV”“$\bar{x}$”，显示“2.338”，即为$\bar{L}$;

按“INV”“x_{σ_n}”，显示“0.0286…”，即为 σ。

(5) 算$\sigma_{\bar{L}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

得出 σ 后，再按“÷” 5 “INV”“$\sqrt{\ }$”“=”，显示“0.0128…”，即得$\sigma_{\bar{L}}$，取$\sigma_{\bar{L}} = 0.02$。故结果可表示为

$$L = \bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}} = 2.34 \pm 0.02\text{cm}$$

(二) 间接测量的标准误差

可以证明，对间接测量值 $N=f(x, y, \cdots)$，标准误差的传递公式为

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \cdots} \tag{23}$$

其相对误差的传递公式为

$$E = \frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\sigma_x}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\sigma_y}{f}\right)^2 + \cdots} \tag{24}$$

常用函数的标准误差传递公式列入表 3 中。

例题 4 用单摆测重力加速度 g，已测得周期 $T = 2.007 \pm 0.002\text{s}$，摆长 $L = 100.00 \pm 0.01\text{cm}$，$T$ 与 L 的误差均为标准误差。试求测量结果。

表 3 常用函数的标准误差传递公式

函数式	算术误差传递公式
$N = x \pm y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = xy \quad N = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N = kx$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \dfrac{\sigma_x}{x} \quad \sigma_N = K \cdot \sigma_x$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\sigma_x}{x}$

函数式	算术误差传递公式
$N=\frac{x^m y^n}{z^k}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{m^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+k^2\left(\frac{\sigma_z}{Z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\cdot\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$

解 由 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$，得 $g=4\pi^2\frac{L}{T^2}$

所以

$$g=4\times3.1416^2\times\frac{100.00}{2.007^2}=980.08\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

误差为

$$E=\frac{\sigma_g}{g}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2+2^2\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.01}{100}\right)^2+4\times\left(\frac{0.002}{2.007}\right)^2}$$

$$=0.002$$

$$\sigma_g=E\cdot g=0.002\times980.08=1.96\approx2\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

故测量结果为

$$g=\bar{g}\pm\sigma_g=980\pm2\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

四、有效数字及其运算法则

在进行物理量测量时，要记录数据，这些原始数据如何正确有效地表示呢？要得出实验结果，就要计算，这些计算必须遵循什么规则呢？这些都不是随意确定的，必须按照有效数字及其运算法则来进行。

（一）有效数字一般概念

测量皆有误差。例如，测得某物体长度 $L=18.64\pm0.02$cm，由这个结果知，测量误差在$\frac{1}{100}$cm位上，其测量值在该位上的数字“4”是有误差的，即“4”这个数字是欠准的，它前面的“1”，“8”，“6”三个数字都是准确可靠的。我们把准确数和末位上的一位欠准数字合称为有效数字。$L=18.64$cm 具有 4 位有效数字。

对有效数字可作如下说明：

(1) 在数值中间的“0”和末尾的“0”，均为有效数字。例如 $a=13.08$cm，有 4 位有效数字。$b=13.080$cm 有 5 位有效数字。它表明了 a 的测量误差在$\frac{1}{100}$cm 上，而 b 的测量误差在$\frac{1}{1\,000}$cm 位上。所以这个末位上的“0”是不能随意丢弃或添加的。

(2) 作十进制单位变换时，有效数字保持不变，即有效数字与小数点位置无关。例如 12.64cm，也可写作0.126 4m或0.000 126 4km，它仍具有 4 位有效数字。注意，这里“1”

前方的“0”不是有效数字。当数值特大或特小时，常用科学记数法表示，即用有效数字乘以10的幂指数的形式表示，如0.000 126 4km = 1.264×10^{-4}km，5 893Å = 5.893×10^{-7}m。

(3) 有效数字的位数与测量仪器精确度有关。例如，测一块平板玻璃的厚度，用米尺（分度值1mm）测得2.3mm，为两位有效数字；用游标卡尺（分度值0.02mm）测得2.34mm，为三位有效数字；用螺旋测微计（分度值0.01mm）测得2.342mm，为四位有效数字。可见，测同一对象时，所用仪器精确度愈高，测得的有效数字也愈多。

(4) 有效数字的位数与测量方法有关。例如测单摆振动周期 T 时，若用分度值为0.1s的秒表，一般在启动和制动秒表时各有0.1s的误差。用该秒表测单摆一个周期 $T = 1.9$s；但如果连续测100个周期，得 $100T = 192.6$s，所以 $T = 1.926$s。前者只有两位有效数字，后者却有四位有效数字。可见，采用这种将被测对象放大的方法，能获得较多的有效数字。

(5) 有效数字的位数与待测量自身大小有关。

(6) 大体上说，有效数字位数多，相对误差较小，测量精密度较高。

(二) 测量结果有效数字的确定原则

总的原则是由绝对误差决定。在测读数据和确定结果时，都要遵从这个原则。

1. 仪器的正确测读

对简单刻度的仪器，如米尺、温度计、电表等，应在最小分度值内进行估读，通常可作$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{5}$或$\frac{1}{2}$估读。例如用米尺（分度值1mm）测长可读得12.64cm、18.00cm等。又例如电压表（如图1），分度值为$\frac{7.5\text{V}}{150\text{格}} = 0.05\text{V}/\text{格}$，而 $\Delta_{仪} = 7.5\text{V} \times 0.5\% \approx 0.04\text{V}$，故作$\frac{1}{5}$估读，表针所指处应读出4.00V和4.34V。

对于有游标装置的仪表，不必估读，因分度值一般就是其仪器误差。例如50分度的游标卡尺，分度值 $\delta = 0.02$mm，可读得32.64mm。

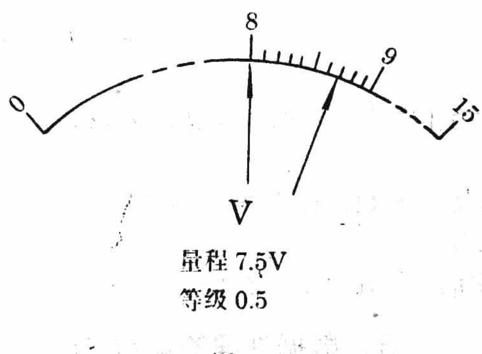

图1

2. 测量结果有效数字的确定

一次直接测量结果、多次直接测量结果及间接测量结果的有效数字皆由绝对误差决定，即这些测量结果的有效数字的末位应与绝对误差所在的一位对齐。

(三) 有效数字的运算法则

数值运算是件重要的工作，为了使求得的测量结果能保持原有的精确程度，又能避免不必要的有效数字位数过多的运算，所以，有效数字的运算必须按一定规则进行。这样，对于不要求计算误差的测量，其结果的有效数字，也可按此规则确定，一般运算法则如下：

1. 加减运算（例题中数字下加划的数为欠准数）

诸数相加减，结果的欠准数与诸数中数位最高的欠准数位置对齐。

例题 5

```
      50.6                         50.6
 +)    1.782                  +)   1.78
 ────────────   可简化为 →   ──────────
      52.382                       52.38
 应写为 52.4                  应写为 52.4
```

例题 6

```
      21.6                         21.6
 -)    2.424                  -)   2.42
 ────────────   可简化为 →   ──────────
      19.176                       19.18
 应写为 19.2                  应写为 19.2
```

2. 乘除运算

诸数相乘除，结果的有效数字位数与诸数中有效数字最少的一个相同。

例题 7

```
      2.5327                     2.533
 ×)     1.12                ×)    1.12
 ──────────   可简化为 →   ──────────
       50654                      5066
      25327                      2533
     25327                      2533
 ──────────                 ──────────
     2.836624                   2.83696
 应写 2.84                  应写为 2.84
```

3. 乘方、开方运算

乘方、开方的有效数字位数与其底的有效数字位数相同。

4. 对数运算

对数的小数部分的位数与真数的有效数字位数相同。

5. 常数 π、e 等的运算

一般可以比测量值多取一位有效数字参加运算。

五、数据处理的基本方法

数据处理是指从获得原始数据起到得出实验结果的加工过程，它包括了记录、整理、计算、作图、分析等方面的内容。它是实验报告的一个重要部分。下面介绍常用的列表法、作图法和逐差法。

（一）列表法