



反演控制方法与实现

FANYAN KONGZHI FANGFA YU SHIXIAN

乔继红 著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

反演控制方法与实现

乔继红 著

机械工业出版社

本书系统地介绍了反演控制方法的基本原理及其在不确定非线性系统中的应用。全书共分为6章,在介绍反演法的一般理论的基础上,重点论述了抑制参数漂移的自适应反演方法,考虑非线性干扰观测器的弱抖振滑模反演方法,针对系统模型部分未知的情况,使用模糊系统和神经网络估计系统中的未知部分,给出了基于智能系统的反演设计方法,同时本书介绍了系统状态未知情况下的反演设计方法。针对各种情况本书均给出了详细的理论设计方法和 Matlab 仿真。

本书是作者在从事控制理论与控制方法研究的基础上完成的。本书适用于从事非线性控制方法研究的工作人员和研究生参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

反演控制方法与实现/乔继红著. —北京:机械工业出版社, 2011. 12

ISBN 978-7-111-36508-2

I. ①反… II. ①乔… III. ①反演—控制方法 IV. ①0174. 51

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 238990 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:牛新国 责任编辑:牛新国 版式设计:霍永明

责任校对:张媛 封面设计:陈沛 责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm·14.25 印张·282 千字

0 001—3 000 册

标准书号:ISBN 978-7-111-36508-2

定价:38.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者购书热线:(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

很多实际控制系统，如飞机控制系统、坦克控制系统、感应电机控制系统、电液伺服系统等都是非线性系统，而非线性系统中往往存在着诸多不确定性，因此针对非线性系统的控制显得尤其复杂。反演控制方法最早是由美国学者 Kokotovic P. V. 提出的。反演法是针对具有严格反馈结构的非线性系统提出的一种控制方法。该方法的提出解决了部分非线性控制系统的结构化设计问题，具有重要的实际意义，受到越来越多的研究者的重视。

本书在介绍了反演控制方法的基本原理的基础上，针对各种实际情况进行了研究，将反演控制方法进行扩展，使其更适用于实际控制系统。全书共分为6章。第1章介绍了反演控制方法的理论基础和发展研究现状。第2章针对参数化的不确定非线性系统，当存在外界干扰或未建模动态时会出现参数漂移，自适应控制器会使系统恶化的情况，设计抑制参数漂移的自适应反演控制方法，解决了参数漂移的问题。从理论上给出了相应的证明。第3章针对系统模型中存在不确定项的情况，将滑模方法与反演法相结合，并引入非线性干扰观测器，实现了弱抖振的滑模反演控制，使得整个控制系统控制效果良好。第4章考虑了存在未建模动态的系统，采用模糊控制系统去逼近未建模动态，设计了基于模糊系统的反演控制器。第5章针对存在未建模动态的系统，采用小波神经网络去逼近未建模动态，并设计了鲁棒补偿器，使得系统的控制性能得到进一步的改善。第6章针对部分系统状态不可观测的情况，介绍了使用滑模状态观测器的反演控制系统。针对理论设计部分，全书均给出了仿真实例，以利于读者对方法的理解。

本书的出版得到北京市教委科技创新平台——信号检测与智能信息处理研究平台（项目编号：201151）的资助。在本书内容的研究过程中，得到戴亚平教授、刘金琨教授的指点和帮助，在此作者表示衷心感谢。在写作过程中，还参考和引用了一些文献的观点，在此向参考文献的作者表示衷心感谢。在书稿的出版过程中，还得到了很多人的帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于作者水平，本书难免会有不妥之处，敬请读者批评指正。

著 者

2011年10月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 研究的背景及意义	1
1.2 李雅普诺夫稳定性理论	2
1.2.1 李雅普诺夫意义下的稳定性	3
1.2.2 有界性	5
1.2.3 李雅普诺夫稳定性理论	5
1.3 微分几何理论基础	6
1.3.1 李导数和李括号	7
1.3.2 微分同胚	7
1.3.3 控制系统的相对阶	8
1.3.4 输入-状态线性化	8
1.3.5 状态反馈线性化的设计	9
1.4 反演法的基本原理	10
1.5 反演法的研究概况	13
1.5.1 自适应反演控制	13
1.5.2 鲁棒自适应反演控制	15
1.5.3 滑模反演控制	16
1.5.4 智能反演控制	16
1.5.5 其他反演控制方法	17
1.6 本书的主要研究内容	17
第 2 章 自适应反演控制方法	19
2.1 引言	19
2.2 常规自适应反演法	20
2.2.1 自适应反演法设计思路	20
2.2.2 仿真算例	23
2.3 抑制参数漂移的自适应反演控制	26
2.3.1 问题描述及预备知识	26
2.3.2 抑制参数漂移的自适应反演控制器设计	28
2.3.3 系统稳定性分析	32
2.3.4 仿真算例	34
2.4 扩展的自适应反演控制	37
2.4.1 问题描述	37

2.4.2 参数自适应律的设计	37
2.4.3 基于动态面的扩展反演控制器设计	39
2.4.4 稳定性分析	40
2.4.5 仿真算例	43
2.5 仿真算例的 Matlab 实现	46
2.5.1 2.2.2 节仿真算例的 Matlab 实现	46
2.5.2 2.3.4 节仿真算例的 Matlab 实现	50
2.5.3 2.4.5 节仿真算例的 Matlab 实现	62
2.6 本章小结	76
第3章 不确定非线性系统的弱抖振滑模反演控制	77
3.1 引言	77
3.2 滑模控制基本原理	78
3.3 匹配不确定非线性系统的弱抖振滑模反演控制	79
3.3.1 问题描述	79
3.3.2 滑模反演控制器设计	80
3.3.3 滑模反演控制稳定性分析	81
3.3.4 自适应滑模反演控制器设计	81
3.3.5 自适应滑模反演控制稳定性分析	82
3.3.6 非线性干扰观测器	83
3.3.7 匹配不确定非线性系统的弱抖振滑模反演控制	84
3.3.8 仿真算例	86
3.4 非匹配不确定非线性系统的多滑模反演控制	92
3.4.1 问题描述	92
3.4.2 多滑模反演控制	93
3.4.3 基于非线性干扰观测器的多滑模反演控制	96
3.4.4 系统稳定性分析	96
3.4.5 仿真算例	97
3.5 仿真算例的 Matlab 实现	99
3.5.1 3.3.8 节弱抖振滑模反演控制的 Matlab 实现	99
3.5.2 3.3.8 节自适应弱抖振滑模反演控制 Matlab 实现	104
3.5.3 3.4.5 节多滑模反演控制 Matlab 实现	106
3.6 本章小结	110
第4章 基于模糊系统的非线性系统反演控制	112
4.1 引言	112
4.2 基于模糊系统的非线性系统控制	112
4.2.1 问题的提出	112
4.2.2 模糊系统描述	113
4.2.3 控制器设计	113

4.2.4 仿真算例	120
4.3 4.2.4 节 Matlab 实现	124
4.4 本章小结	140
第 5 章 基于神经网络的非线性系统反演控制	141
5.1 引言	141
5.2 非线性系统的鲁棒小波神经网络控制	141
5.2.1 问题的提出	141
5.2.2 小波神经网络结构	142
5.2.3 控制器的设计	143
5.2.4 稳定性分析	147
5.2.5 仿真	148
5.3 不确定非线性系统的鲁棒自适应渐近跟踪控制	150
5.3.1 控制目标	150
5.3.2 控制器设计	150
5.3.3 仿真算例	155
5.4 算例的 Matlab 实现	159
5.4.1 5.2.5 节算例的 Matlab 实现	159
5.4.2 5.3.3 节算例 1 的 Matlab 实现	172
5.4.3 5.3.3 节算例 2 的 Matlab 实现	184
5.5 本章小结	197
第 6 章 基于状态观测器的反演控制器设计	198
6.1 滑模观测器控制器设计	198
6.1.1 滑模观测器设计	198
6.1.2 滑模反演控制器设计	202
6.2 仿真算例	204
6.3 6.2 节仿真实例的 Matlab 实现	209
6.4 本章小结	213
参考文献	214

第 1 章 绪 论

1.1 研究的背景及意义

近二十年来,微分几何等现代数学工具的成功引用,使线性和非线性控制系统理论与应用研究取得了突破性的进展^[1]。通过利用李括号及微分同胚等基本工具研究非线性系统状态、输入和输出变量间的依赖关系,系统地建立了非线性控制系统能控、能观、能测的充要条件。特别是通过适当的非线性状态和反馈变换,非线性系统可以实现全局状态或输入输出的精确线性化,从而将复杂的非线性系统综合问题转化为线性系统的综合问题^[2-4]。这类精确线性化方法推广了线性控制系统理论,推动了非线性控制系统理论在各种复杂非线性系统控制对象中的应用与开发研究。

微分几何方法用来研究非线性控制系统是现代数学发展的必然结果。Isidori 曾预见性地指出:正如 20 世纪 50 年代引入拉氏变换和传递函数,20 世纪 60 年代引入线性代数概念和方法,分别给控制理论在单输入单输出及多变量线性系统方面所带来的重大变革一样,微分几何方法引入非线性系统,将给控制理论带来突破性的进展。

严格来说,实际控制系统都是非线性系统。对于非线性程度不很严重,且仅仅在工作点附近小范围内工作的系统,可以采用近似的线性模型,并可用线性理论进行分析研究。但是对于非线性程度比较严重、输入信号变化范围较大的系统,某些元件将明显地工作在非线性范围,线性理论的方法不再适用。非线性系统有一系列区别于线性系统的特点,这正是非线性系统控制研究的难点所在^[5]:非线性系统存在有限时间逃逸现象。这种现象导致非线性系统中部分(或全部)状态可能在有限时间发散到无穷,这是非线性系统具有的主要特点,而线性系统不会出现有限时间逃逸现象。由于目前对非线性系统分析和设计可用的数学工具远远不够,因此对于非线性系统来说一般不可能求得完整解,这就使得对于非线性系统的研究只能着重在对时域响应的定性性质,如进行稳定性等方面的研究,而对线性系统一般总可以求得系统的完整解。非线性系统的工作状态及稳定性不仅取决于系统的参数,而且与输入量和初始条件有关,而线性系统的工作状态及稳定性仅仅取决于系统的结构参数。因此研究非线性系统的稳定性远比研究线性系统的稳定性复杂困难得多。

对实际对象进行控制前,往往要对其进行数学建模,数学模型不可避免地带有

未建模动态、近似参数等不确定因素。除此之外,实际系统在工作过程中还存在着外部干扰等因素,这些因素的总和构成了系统的不确定性。不确定性的存在使实际对象与所用数学模型之间有很大差别,如果仅仅根据标称系统设计控制器,会使大量工程控制问题无法获得满意结果,甚至严重影响系统性能,因此研究不确定非线性系统的控制方法更具有实际意义。

鲁棒控制^[6-8]理论是针对系统的不确定性的存在而提出来的。它在设计控制器时不仅考虑系统模型的标称参数,同时还要考虑不确定性对系统性能的最坏影响,使得所设计的控制器在不确定性对系统的品质的破坏最严重时也能够满足设计要求。在设计鲁棒控制器时,一般是假设系统的不确定性属于一个可描述集,如有界的未知参数、增益有界的未知摄动函数或未知动态过程,然后根据其上界值或界函数设计控制器,来保证整个系统对于不确定集中的任何元素都是稳定的。鲁棒控制的优点在于抑制干扰和补偿未建模动态,但是鲁棒控制没有学习的能力,是比较保守的控制策略。近年来,非线性系统的鲁棒控制取得了一系列的进展,其中滑模控制^[9]是重要的策略之一。滑模控制是研究线性系统鲁棒控制的成熟工具,将其应用于非线性系统的控制之中是近些年的研究成果^[10-19]。

对具有参数不确定性的非线性系统,可以采用自适应控制技术^[20-31]。自适应控制在控制过程中通过参数自适应律逼近参数的真实值,消除系统的参数不确定部分,因此自适应控制技术的优点就在于它具有一定的在线“学习”能力,可以根据系统的输入输出不断辨识系统的参数。在最近十几年的非线性自适应控制理论的研究中,具有里程碑意义的当数 Ioannis Kanellakopoulos 和 Kokotovic P. V. 于 1991 年提出的 Backstepping 方法^[24]。Backstepping 方法使得控制器的设计结构化、系统化,放宽了对系统的非线性增长性条件和匹配性约束的限制,该方法还能获得任意好的瞬态性能^[24]。但在实际中,由于被控对象具有未建模动态、外部干扰等远比设计时所设想的情况复杂,这些会导致自适应控制算法失稳。将鲁棒控制与自适应控制相结合是一种比较好的方法,这种控制器不仅具有学习的能力,而且具有抑制干扰、增加对不确定的鲁棒性以及保证期望的瞬态响应的能力。

随着科技的发展,人们要求对不确定非线性系统的控制更精确、更有效。但由于非线性系统的复杂性和不确定性的多样性,使得处理不确定非线性系统很困难。本书将 Backstepping 方法与鲁棒自适应控制相结合,同时吸收近年来发展的非线性控制技术和智能控制技术^[32-34]等,对不确定非线性系统提出高性能的和更有效的控制系统设计方法。

1.2 李雅普诺夫稳定性理论

对于一个控制系统来说,稳定性是一个非常重要的性能指标。只有稳定的系统

才能正常工作。这里所说的稳定性是指系统受到外界干扰,偏离了原有的平衡状态,而当外界干扰去掉以后,系统能在另一个新的平衡状态下继续工作的能力。在古典控制理论中,对于单输入、单输出的线性定常系统,可以使用劳斯准则、古尔维茨判据和奈奎斯特判据来判别系统的稳定性。但是,对于非线性系统、时变系统,这些稳定性判据就不适用了。19世纪末期俄国数学家李雅普诺夫提出的稳定性理论正好解决了非线性、时变系统的稳定性判断问题。

1.2.1 李雅普诺夫意义下的稳定性

设有一动态系统,可用如下状态方程描述:

$$\dot{X}(t) = f[X(t), t] \quad (1-1)$$

其中 $X(t)$ 为 n 维状态向量, $f(X(t), t)$ 是 n 维函数向量, 每一分量 f_i 都是状态 $X(t)$ 和时间 t 的函数。函数向量 $f: D \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$, $D = \mathbf{R}^n$ 或对某一 $h > 0$, $D = B_h$, 这里 $B_h = \{X \in \mathbf{R}^n: \|X\| < h\}$ 是一个以原点为中心, h 为半径的球。如果 $D = \mathbf{R}^n$, 则称系统动态被定义为全局的; 如果 $D = B_h$, 则称系统动态被定义为局部的。如果式(1-1)中 $f(X(t), t)$ 不明显依赖于 t , 则称该系统是自治系统, 否则称为非自治系统。如果 $f(X(t), t) = A(t)X$, 其中 $A(\cdot): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$, 则称系统是线性系统, 否则称为非线性系统。在此假设 $f(X(t), t)$ 对 t 是分段连续的, 对 X 是 Lipschitz 连续的, 即有 $\|f(X(t), t) - f(Y(t), t)\| \leq L \|X - Y\|$, $\forall X, Y$, 其中 $L \geq 0$ 为 Lipschitz 常数。

又设在给定的初始条件 $t = t_0$, $X(t_0) = X_0$ 时, 式(1-1)有唯一解, 用 $\phi(t, X_0, t_0)$ 表示其解, 即:

$$X(t) = \phi(t, X_0, t_0) \quad (1-2)$$

式(1-2)表示从初始时刻 t_0 开始, 由初始状态 X_0 为起点的在 n 维状态空间的运动轨迹。很显然, 它应该满足 $X_0 = \phi(t_0, X_0, t_0)$ 。如果某性质对于所有的 $t_0 \geq 0$ 都成立, 则称它是一致的。

1. 平衡状态

如果在方程(1-1)中存在着 X_e , 使得对所有的 t 都满足

$$\dot{X}(t) = f[X_e, t] = 0, \forall t \geq 0 \quad (1-3)$$

则称 X_e 为系统的平衡状态。若系统为线性定常系统, 即 $f(X(t), t) = AX$, 则当 A 为非奇异矩阵时, 系统只有一个平衡状态, 即 $X_e = 0$; 若 A 为奇异矩阵, 则系统有无穷多个平衡状态。对于非线性系统, 可以有一个或多个平衡状态, 这些平衡状态都是满足式(1-3)的解。Lyapunov 关于稳定性的研究都是针对平衡点而言的。

对于任意一个平衡状态, 都可以将其通过坐标变换移到坐标原点。而一般讨论的系统的稳定性, 就是研究在平衡点附近的稳定性问题。因此, 可以这样说, 一般

就是研究系统在原点处的稳定性。

2. 稳定性

如果对于任一个给定的实数 $\varepsilon > 0$ ，都存在另一个与 ε 取值有关的实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，使得下列不等式成立时，即

$$\|X_0 - X_e\| \leq \delta \quad (1-4)$$

就一定有

$$\|X_0 - X_e\| \leq \varepsilon \quad t \geq t_0 \quad (1-5)$$

则称系统(1-1)的平衡状态 X_e 在李雅普诺夫意义下是稳定的。通常 δ 的取值与 ε 和 t_0 有关。如果 δ 与 t_0 无关，则称 X_e 为系统(1-1)的一致稳定平衡态。

平衡状态稳定的物理意义就是，从与平衡态 X_e 距离小于等于 δ 的某邻域 $S(\delta)$ 出发的初始状态 X_0 ，其状态转移轨线 $X(t)$ 与平衡态的距离将小于给定的任一实数 ε_0 。

3. 渐近稳定性

如果系统(1-1)的平衡状态 X_e 在李雅普诺夫意义下是稳定的，而且从与平衡态 X_e 的距离小于等于 δ 的邻域 $S(\delta)$ 出发的任意一个状态转移轨线 $X(t)$ ，当 t 趋于无穷大时，都趋近于 X_e ，则称平衡态 X_e 是渐近稳定的。邻域 $S(\delta)$ 就是平衡态 X_e 的渐近稳定域，从邻域 $S(\delta)$ 外出发的状态转移轨线 $X(t)$ 将不随 t 的增大而无限趋于 X_e ，但是仍可是稳定的，即 $X(t)$ 与 X_e 的距离一定小于某一 ε 数。

如果系统(1-1)的平衡状态 X_e 是渐近稳定的，且 δ 与 t_0 无关， $X(t)$ 趋近于 X_e 的极限过程与 t_0 无关，则称系统平衡状态 X_e 是一致渐近稳定的。

如果 $\forall X_0 \in \mathbf{R}^n$ ，均有平衡状态 X_e 是渐近稳定的，则称平衡状态 X_e 是全局渐近稳定的。

4. 指数稳定性

如果存在 $\lambda > 0$ ，且对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得 $\|X_0\| \leq \delta$ ，则一定有

$$\|X(t; X_0, t_0)\| \leq \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (1-6)$$

成立，则称系统平衡点 $X_e = 0$ 是指数稳定的。常数 λ 称为收敛率。

指数稳定性意味着系统轨迹按指数规律衰减到零，是较强的稳定形式。指数稳定性意味着渐近稳定性，但渐近稳定性并不意味着指数稳定性。

5. 不稳定性

如果对于给定的实数 $\varepsilon > 0$ ，不管实数 δ 取多么小，在 X_e 的邻域 $S(\delta)$ 内总存在着起码一个初始状态 X_0 ，使得从这一状态出发的状态转移轨线 $X(t)$ 与 X_e 的距离总超过 ε_0 ，那么平衡态 X_e 就被称为是不稳定的。

6. 标量函数 $V(X)$ 的正定性

设 $V(X)$ 是以状态向量 X 的各分量作为自变量的标量函数，它的定义域为 S 。

如果只有当 $X=0$ 时, $V(X)=0$, 而当 $X \neq 0$ 时, 都有 $V(X) > 0$, 则称 $V(X)$ 为正定函数。

如果除了 $X=0$ 和某些状态使得 $V(X)=0$, S 域内的所有其他状态都使 $V(X) > 0$, 则称 $V(X)$ 为半正定函数。

如果 $-V(X)$ 是正定函数, 则 $V(X)$ 就成为负定函数。

如果 $-V(X)$ 是半正定函数, 则 $V(X)$ 就成为半负定函数。

1.2.2 有界性

如果存在一个 $\beta > 0$, 使得对所有 $t \geq t_0 > 0$ 均有 $\|X(t; X_0, t_0)\| < \beta$, 则称式 (1-1) 的解 $X(t; X_0, t_0)$ 是有界的。

如果对于任意的 $\alpha > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 存在一个不依赖于 t_0 的 $\beta(\alpha) > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_0 > 0$, 当 $\|X_0\| < \alpha$ 时, 有 $\|X(t; X_0, t_0)\| < \beta$, 则称式 (1-1) 的解 $X(t; X_0, t_0)$ 是一致有界的。

如果存在一个 $\beta > 0$, 且对于任意的 $\alpha > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 存在一个不取决于 t_0 的 $T(\alpha) > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_0 + T(\alpha)$, 当 $\|X_0\| < \alpha$ 时, 有 $\|X(t; X_0, t_0)\| < \beta$, 称式 (1-1) 的解 $X(t; X_0, t_0)$ 是一致最终有界的。

1.2.3 李雅普诺夫稳定性理论

下面给出李雅普诺夫法判定系统稳定性的一些基本定理。

如果系统 (1-1) 在坐标原点 (经坐标变换后) 的平衡状态的某些邻域内存在一个正定的并且具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(X, t)$, 其导数 $\dot{V}(X, t)$ 如果是负定的, 则原点处的平衡状态是一致渐近稳定的。如果当 $\|X\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(X, t) \rightarrow \infty$ 的话, 则该平衡状态是全局一致渐近稳定的。

如果存在连续可微函数 $V(X, t)$ 及常数 c, c_1, c_2, c_3 均大于 0, 使得对 $\forall t \geq 0$ 和 $\forall X \in B_h$ 有 $c_1 \|X\|^c \leq V(X, t) \leq c_2 \|X\|^c$ 和 $\dot{V}(X, t) \leq -c_3 \|X\|^c$ 成立, 则平衡点 $X_e = 0$ 是局部指数稳定的。如果上式对于所有的 $X \in \mathbf{R}^n$ 都适用, 则平衡点 $X_e = 0$ 是全局指数稳定的。

上述定理中的标量函数 $V(X, t)$ 就称为李雅普诺夫函数 (V 函数)。只要能找到适当形式的李雅普诺夫函数, 如果它满足上述定理, 则可以判断系统是稳定的。如果一时找不到合适的李雅普诺夫函数, 则不能判定系统是否稳定。因此, 李雅普诺夫稳定性定理是判定系统稳定的充分条件。而且, 李雅普诺夫函数对一个系统而言可能不止一个。

由以上的论述可以看出, 应用李雅普诺夫方法判定系统稳定性的关键是寻找合适的正定标量函数 $V(X, t)$, 使它的导数满足上述定理中所叙述的条件, 从而判定

系统的稳定性。李雅普诺夫函数的选取,没有一般、普遍适用的方法可循。对于一般的级联线性和非线性系统,常取二次型来构造李雅普诺夫函数^[2]。而对于某些特殊的系统,也存在一些特有的方法来求得或选取李雅普诺夫函数,并判别系统的稳定性。

李雅普诺夫函数在非线性控制系统设计中具有十分重要的作用。长期以来,关于李雅普诺夫稳定性理论的研究取得了大量的成果。但是,对于如何构造李雅普诺夫函数,特别是用于系统控制设计的李雅普诺夫函数,至今缺乏系统的研究。反演控制方法就是在这样的背景下产生的设计方法。它的提出,在一定程度上解决了这一问题,为李雅普诺夫函数的构造提供一类较为简便的结构化、系统化的方法^[35]。

此外, LaSalle-Yoshizawa 定理是系统分析的有力工具,它是李雅普诺夫稳定性理论的推广。

LaSalle-Yoshizawa 定理^[5]: $X_e = 0$ 是系统 (1-1) 的平衡点, 设 $f[X(t), t]$ 是关于 $X(t)$ 局部 Lipschitz 的, 关于 t 是一致的。令 $V: R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ 是一个连续可微、正定、径向无界的函数, 使得

$$\dot{V}(X(t), t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} f(X(t), t) \leq -W(X(t)) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall X(t) \in R^n \quad (1-7)$$

式中, W 是连续函数。则系统 (1-1) 的所有解是全局一致有界的, 且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(X(t)) = 0$ 。此外, 如果 W 是正定的, 则平衡点 $X_e = 0$ 是全局一致渐近稳定的。

Barbalat 引理也常用于解决渐近稳定性问题。

Barbalat 引理^[5]: 令 $\phi: R^+ \rightarrow R$ 是一致连续函数, 假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\xi) d\xi$ 存在且是有限的, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ 。

1.3 微分几何理论基础

反馈线性化作为非线性控制设计方法引起研究者的极大关注, 其基本思想是通过坐标变换和状态反馈将非线性系统动态全部或部分变换为线性动态, 这样就可以应用线性控制理论的方法。反馈线性化不同于传统的线性化方法, 反馈线性化是通过精确的变换和反馈获得, 而传统的线性化方法是通过动态近似获得的, 两者有着本质的区别。反馈线性化方法应用于一类非线性系统, 这类非线性系统状态完全可测, 输入状态可线性化或最小相位系统。反馈线性化方法已经成功解决了诸如直升机、机器人等许多实际控制问题。微分几何理论是反馈线性化的理论基础, 下面介绍微分几何的基本概念。

1.3.1 李导数和李括号

给定一个 n 维状态 X 的平滑标量函数 $h(X): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, h 的梯度记为 ∇h , 则

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial X} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \quad (1-8)$$

类似地, 给定一个 n 维状态 X 的平滑矢量场 $f(X): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, f 的雅可比矩阵记为 ∇f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

它是一个 $n \times n$ 的矩阵。

1. 定义李导数

令 $h(X): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为平滑的标量函数, $f(X): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个平滑的矢量场, 以 $L_f h(X)$ 表示的 h 关于 f 的李导数被定义为

$$L_f h(X) = \nabla h \cdot f = \frac{\partial h}{\partial X} f(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(X)}{\partial x_i} f_i(X) \quad (1-10)$$

李导数是一个标量函数, 其实质为 h 沿 f 方向的导数。多重李导数可以递归地定义为

$$L_f^i h = L(L_f^{i-1} h), i = 1, 2, \dots \quad (1-11)$$

另外定义 $L_f^0 h = h$ 。如果 g 是一矢量场, 则标量函数 $L_g L_f h = \nabla(L_f h) \cdot g$ 。

2. 定义李括号

令 f 与 g 为 $\mathbf{R}^n$ 上的两个矢量场, f 与 g 的李括号为第三个矢量场, 定义为

$$[f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \quad (1-12)$$

通常李括号 $[f, g]$ 以 $ad_f g$ 表示。

1.3.2 微分同胚

微分同胚实质上是一种坐标变换。

定义微分同胚: 称定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的某一区域 Ω 内的映射 $T(X): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是微分同胚, 如果满足以下条件:

- (1) $T(X)$ 是光滑的, 即存在任意阶导数;
- (2) $T(X)$ 是一一对应的;
- (3) $T(X)$ 的逆映射存在且光滑。

若区域 Ω 是整个空间 $\mathbf{R}^n$, 则称 $T(X)$ 是全局微分同胚的。全局微分同胚很少见, 在

工程问题中,为解决问题所采用的坐标变换往往只要求是局部微分同胚,即仅在一个给定点邻域内的坐标变换,这个邻域通常很大。给定一个非线性函数 $T(X)$,要检验它是否是一个局部的微分同胚,可以利用以下引理。

引理 1.1 令 $T(X)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的某一区域 Ω 内的一个光滑函数,如果 $T(X)$ 在 Ω 内一点 $X = X^0$ 处的雅可比矩阵

$$\left. \frac{\partial T(X)}{\partial X} \right|_{X=X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X^0} \quad (1-13)$$

是非奇异的,则在包括 X^0 点在内的 Ω 的一个子域内是一个局部的微分同胚。

1.3.3 控制系统的相对阶

考虑如下单输入单输出非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + g(X)u \\ y &= h(X) \end{aligned} \quad (1-14)$$

其中 $X \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $u \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别为系统的输入和输出, f, g 是 $\mathbf{R}^n$ 上充分光滑的向量场, h 是一个充分光滑的标量函数。如果在 $X = X^0$ 的邻域内有以下条件成立:

$$\begin{cases} L_g L_f^k h(X) = 0, k = 0, 1, \cdots, r-2 \\ L_g L_f^{r-1} h(X) \neq 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

则称系统(1-14)在 X^0 的邻域内的相对阶为 r 。

对于一般非线性系统而言,相对阶 r 意味着对系统的输出 y 求 r 阶导后,可以得到一个输出 y 与输入 u 的显式关系。在线性系统中, r 就是系统传递函数分母多项式的阶数和分子多项式的阶数之差。

1.3.4 输入-状态线性化

一般来说,控制系统的任务可以分为两类:稳定(或称调节)问题和跟踪(或称伺服)问题。稳定问题是要使得闭环系统的状态稳定在一个平衡点附近。跟踪问题是要使得闭环系统的输出跟踪一个给定的时变轨迹。对于稳定问题,系统输出的不一定要有具体的物理意义,此时可以借助输入-状态线性化方法把原非线性系统转换为线性系统,从而采用线性系统的理论解决系统的稳定问题。

考虑单输入单输出系统(1-14),如果在 $\mathbf{R}^n$ 中存在一个区域 Ω , 一个微分同胚 $T(X): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, 以及一个非线性反馈控制律

$$u = \alpha(X) + \beta(X)v \quad (1-16)$$

使得新的状态变量 $Z = T(X)$ 和新的输入 v 满足线性关系

$$\dot{Z} = AZ + bv \quad (1-17)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

则称该系统是输入-状态可线性化的。新的

状态 Z 被称为线性化状态，控制律(1-16)称为线性化控制律。

下面的定理给出了系统(1-14)输入-状态可线性化的充要条件。

定理 1.1 如果只有下列条件成立：

(1) 向量场 $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g, ad_f^{n-1} g$ 在包含 X^0 的一个域 Ω 中是线性独立的；

(2) 向量场的集合 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ 在域 Ω 中是对合的。

则非线性系统(1-14)在域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上可被精确线性化为一个完全可控的线性系统(1-17)。

第一个条件可以解释为非线性系统(1-14)的可控条件。对线性系统而言，向量场 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g, ad_f^{n-1} g\}$ 成为 $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ ，因此其线性独立等价于线性系统能控矩阵可逆，对于相当广泛的实际非线性系统，是满足该条件的。

1.3.5 状态反馈线性化的设计

这里仅介绍相对阶为系统阶的单输入单输出非线性系统状态反馈精确线性化设计。当一个仿射非线性系统(1-14)在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的相对阶 r 恰好等于系统状态向量的维数 n 时，根据定义有

$$L_g L_f^i h(X) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (1-18)$$

$$\text{和 } L_g L_f^{n-1} h(X) \neq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad (1-19)$$

这等价于定理 1.1 中的条件。

选择坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= h(X) \\ z_2 &= L_f h(X) \\ &\vdots \\ z_n &= L_f^{n-1} h(X) \end{aligned} \quad (1-20)$$

根据引理 1.1，雅可比矩阵 $\frac{\partial T}{\partial X}$ 对所有的 $X \in \Omega$ 是非奇异的，从而对每一个 $X_0 \in \Omega$,

存在一个包含 X_0 在内的 Ω 的一个邻域 D , 使得邻域 D 中的 $T(X)$ 是一个局部微分同胚。可以得到如下以新坐标系 Z 描述的动态系统:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n &= a(X) + b(X)u \\ y &= z_1\end{aligned}\quad (1-21)$$

式中, $a(X) = L_f^n h(X)$, $b(X) = L_g L_f^{n-1} h(X) \neq 0$ 。

选取控制律为

$$u = -\frac{a(X)}{b(X)} + \frac{1}{b(X)}y \quad (1-22)$$

可以得到新的坐标系 Z 描述的完全可控的线性系统:

$$\dot{Z} = AZ + bv \quad (1-23)$$

$$\text{其中 } Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

至此, 可以利用线性系统的设计原理来确定 v , 从而得到状态反馈控制律 u 。

1.4 反演法的基本原理

Backstepping 法又称后推法、回推法或反演法, 它通常与 Lyapunov 型自适应律结合使用, 即综合考虑控制律和自适应律, 使整个闭环系统满足期望的动静态性能。该方法由 Ioannis Kanellakopoulos 等人于 1991 年在参考文献[24]中首先提出, 在处理线性和某些非线性系统时, 反演自适应控制在改善过渡过程品质方面表现出较大的潜力。尤其在航空航天领域, 因成功地应用于飞机和导弹的控制而备受关注^[36-45]。

非线性反演设计法与反馈线性化密切相关。反馈线性化方法删除系统中所有的非线性项, 而反演法可以利用系统有利的非线性项, 也可以增加非线性阻尼来控制不利的非线性项, 从而获得更好的鲁棒性。反演法设计的基本思想是将复杂的非线性系统分解成不超过系统阶数的子系统, 然后为每个子系统设计部分 Lyapunov 函数(简称 V 函数)和中间虚拟控制量, 一直后退到整个系统, 将它们集成起来完成整个控制律的设计。其基本设计方法是从一个高阶系统的内核开始(通常是系统输出量满足的动态方程), 设计虚拟控制律保证内核系统的某种性能, 如稳定性、无源性等; 然后对得到的虚拟控制律逐步修正算法, 但应保证 V 函数的既定性能,