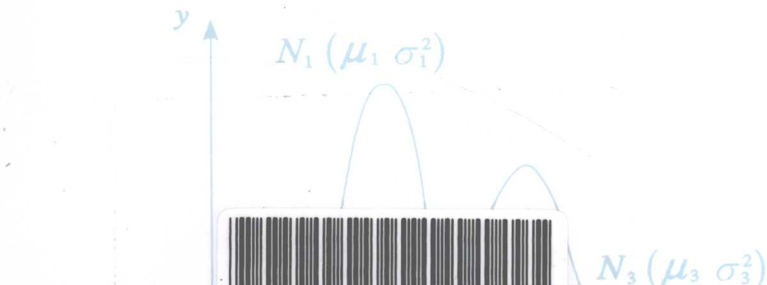
高中数学新课标

概率与统计

GAOZHONG SHUXUE XINKEBIAO GAILV YU TONGJI

唐锐光◎著



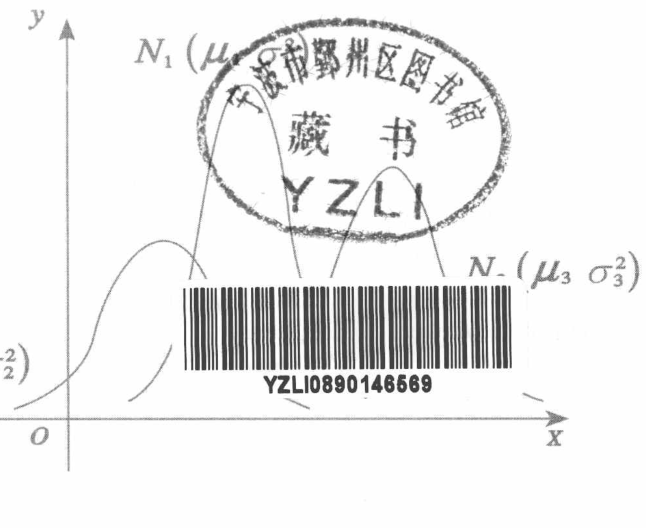
深圳出版发行集团
海 天 出 版 社

高中数学新课标

概率与统计

GAOZHONG SHUXUE XINKEBIAO GAILV YU TONGJI

唐锐光◎著



深圳出版发行集团
海天出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学新课标概率与统计 / 唐锐光著. -- 深圳 ：海天出版社，2011.12

ISBN 978-7-5507-0305-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①概率论－高中－教学参考资料②数理统计－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.663

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第232438号

高中数学新课标概率与统计

GAOZHONG SHUXUE XINKEBIAO GAILV YU TONGJI

责任编辑　侯天伦
责任技编　蔡梅琴
装帧设计　线艺设计

出版发行　海天出版社
地　　址　深圳市彩田南路海天综合大厦7-8层（518033）
网　　址　http：//www.htph.com.cn
订购电话　0755-83460137（批发）　83460397（邮购）
设计制作　深圳市线艺形象设计有限公司　Tel：0755-83460339
印　　刷　深圳市希望印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　16.25
字　　数　300千字
版　　次　2011年11月第1版
印　　次　2011年11月第1次
印　　数　1000册
定　　价　35.00元

前　言

概率与统计是研究随机现象统计规律的科学。在当今信息时代，数据是一种重要的信息，概率与统计所提供的“运用数据进行推断”的思考方法，成为现代社会一种普遍适用且强有力的思维方式。具有概率与统计的基础知识和随机与统计思想，已成为每个现代公民必备的基本素质。

在国际上，概率与统计受到各个发达国家的普遍重视。它们把随机与统计思想的培养、统计方法的运用，确定为高中数学课程的基本目标。美国把概率与统计列为核心数学的重要组成部分。

在我国高中数学新课程标准中，概率与统计的内容及课时有了较大幅度增加，其要求有所调整，已成为高中数学新课程中的重要组成部分。随着时代的发展，其比重与要求必将呈增加与提高的趋势。

概率与统计属于“不确定性”数学，它与中学数学传统的代数、几何、三角(“确定性”数学)研究的对象、方法，得到的结论都有很大差异，前者主要依靠辩证思维和归纳的方法，后者主要依赖逻辑思维和演绎的方法，这会使教师与学生在概率与统计的教与学过程中面临着思维方式转变的不适应，尤其是概率论既研究现实问题，但又不是现实问题的确切描述，有时还与生活经验和直觉相悖。这些因素使概率与统计成为高中数学新课程教与学的一个难点。在许多中学数学期刊中，教师关于概率与统计问题的困惑与争鸣一直是个热点。

本书是作者2009年应教育部主管、华中师范大学主办的国家级数学期刊《数学通讯》（教师版）杂志社邀请参与撰写的《高中数学新课程新增与变动内容解析》概率与统计部分修改、拓展而成。力求结合新课标的要求，一是使读者对概率与统计的历史发展背景、理论结构体系、主导思想、基本概念与基本方法有系统而明晰的了解，在此基础上提出教学建

议；二是对易错和易混淆的概念进行点拨；三是“探究与拓展”，意在对课本虽已涉及但未深入阐述或在教学实践中有价值的问题作适当研究，以利读者开阔视野，居高临下，准确把握教材。同时，本书给读者提供了大量可直接用于教与学的素材，其中包括典例剖析、思考题、练习、高考及高考模拟题和教学设计与教学案例等，以供参考选用。

新课标教材关于概率与统计，在内容编排上是先学统计后学习概率，这个学习顺序与传统的先学概率后学统计正好相反（新课标这样安排的原因参见附录2）。其实,概率与统计密不可分，概率可看成是统计的理论基础，统计可看成是概率的应用。鉴于此，以及本书面向的读者主要是高中数学教师和已初步具备高中概率与统计知识的高中学生，本书仍采用传统的先概率后统计的顺序。

深圳市宝安中学钱江老师在百忙中为书稿作了校对工作，在此表示感谢。本书能否到您的手中，是一件随机事件，我不知道它发生的概率有多大，如果能发生，是我们的缘分。由于水平有限，存在缺点和错误，是一件必然事件，欢迎您的批评、指正。

作 者

2011年7月

目 录

第1章

概　率

概率论是研究随机现象中数量规律的科学，是统计学的理论基础。在概率理论的研究中，用到大量非随机的数学工具。概率是一种度量尺度，用来度量随机事件发生的可能性大小。这与几何图形的度量尺度类似（如线段的长度、平面图形的面积、立体图形的体积等），性质也相似。但两种度量尺度之间存在如下主要区别：

1．概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象是几何图形；

2．作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的这种度量却没有这种限制。

《普通高中数学课程标准（实验）》与原《高中数学教学大纲》相比，概率的内容删少增多，课程目标有所调整。要特别关注的变化是：降低了古典概型中计数（排列、组合）的难度，强化对随机思想和概率本身的理解。

1.1 背景概述

1.1.1 概率论的起源

公元1494年，意大利数学家帕奇欧里（*Pacioli*，1455～1514）在一本有关计算技术的教科书中，提出的一个问题是：一场赌博，胜六局才算赢，当两个赌徒一个胜五局，另一个胜两局时，终止赌博，赌金该怎样分配才合理？帕奇欧里给出的答案是按5∶2分。后来人们一直对这种分配原则表示怀疑，但没有一个人提得出更合适的办法来。

时间过去了半个世纪，另一名意大利数学家卡当（*J.Cardan*，1501～1576），潜心研究赌博不输的方法，出版了一本《赌博之书》。在书里提出了这样一个问题：掷两颗骰子，以两颗骰子的点数和作赌博，那么押几点最有利？卡当认为7最好，卡当还对帕奇欧里提出的问题进行过研究，提出过异议，指出需要分析的不是已经赌过的次数，而是剩下的次数，卡当对问题的解决，虽然有了正确的思路，但没有得到正确的答案。

时间又过了一个世纪，公元1651年法国著名数学家帕斯卡（*B.Pascal*，1623～1662）收到了法国大贵族德梅赫（*D.Mere*，1610～1685）的一封信，在信中他向帕斯卡请教分赌金的问题："两个赌徒约定谁先赢s局，就算赢得全部赌金。如果一人赢$a(a<s)$局，一人赢$b(b<s)$局时，赌博因故终止，应怎样分配赌金才算公平合理？"

这个问题把帕斯卡给难住了，帕斯卡苦思冥想了三年才悟出了自己满意的解法，于1654年7月29日把这个问题连同解答寄给了法国数学家费马（*P.Fermat*，1601～1665）。不久，费马在回信中给出另一解法，他们两人频繁通信，深入探讨这类问题。后来荷兰数学家惠更斯（*C.Huygens*，1629～1695）也加入了对这类问题的探讨，并把对这类问题探讨的结果载

入1657年出版的《论骰子游戏中的推理》一书中，这本书引入了数学期望的概念，是概率论的第一部著作。这样，数学的一个新分支——概率论诞生了。至此，延续了一个半世纪分配赌金的疑难问题在概率论的诞生与发展中得到解决（详见［探究与拓展］）。

概率论虽然起源于赌博，但之所以能发展成为数学一个重要分支，其主要原因之一是满足人们预测未来的心理需求和“用数据说话”的理性的追求。自然界和社会中各种纷繁的事件可大致划分为两大类：一类是受因果律支配的确定性事件。如，“以卵击石”、“飞蛾扑火”、“刻舟求剑”这些事件，从事件发生的条件就可以预知结果；一类是不确定性事件。如，彩票、股票投资能否获利？男女婚配生男还是生女？地球上生物是否会毁灭？这些不确定的事件是大量存在的，而人类又有着预测未来本能的心理需求，这一方面使得求神问卜的迷信行为应运而生，另一方面也催生了研究受或然律支配，符合统计规律的随机事件（不确定性事件中一类）的新型学科——概率论的诞生。主要原因之二是满足社会发展和科学技术进步的需要。如，众所周知的保险、邮电系统发行有奖明信片的利润计算、高考录取分数线的预测甚至利用脚印长度估计犯人身高等无不需要概率知识。概率论随着社会发展和科学技术进步，在自然科学、社会科学、人文科学等各个领域，正发挥着越来越重要的作用。一位哲学家曾说过：“概率是人生的真正指南。”

在概率论的发展过程中留下了许多著名数学家的足迹，其代表人物有瑞士数学家雅各布–贝努利（*Jakob Bernoulli*，1654～1705）、法国数学家与物理学家帕斯卡、前苏联数学家科尔莫戈罗夫（*A.H.Konmorop*，1903～1987）等。

1.1.2 概率的公理化定义

在概率论的发展史上，曾有过概率的古典定义、几何定义、统计（频率）定义和主观定义，这些定义各适合一类随机现象，且存在概率本质属

性的主客观之争，甚至会涉及对上帝以及人的自由意志的看法等，这就使得概率论很长时间里无法作为一门独立的数学学科而存在。

我们知道，数学是建立在一系列假设之上的逻辑符号体系。每一门学科都有其最基本的假设，它们也是该学科最原始的出发点。从这些假设出发，再进行演绎推理，最后形成一套相对完整的符号体系，这就是数学。如何既能概括上述概率定义的共同特性，又避免各自的局限性、含混与争议之处，找到概率论的最原始的出发点，建立严谨的概率论逻辑体系呢？

概率作为事件不确定性的一种“度量尺度”或“测度”（*measure*）是没有争议的。“测度”，是我们经常在做的事。长度是线段的测度，面积是平面图形的测度，重量也是物体某种属性的测度。如果我们把概率理解为事件不确定的一种测度，那么就必须首先弄清楚“测度”应满足的最基本性质是什么。其实，不管我们在数学上和实际中如何使用测度这个概念，我们所用到的性质只有两条：

第一，非负性——测度总是非负的；

第二，可加性——由两两不相交的集合合并而成的和集或并集的测度等于每一个集合的测度之和。

这两条性质是显然的，即使没有学过作为现代数学分支的“测度论”的人，也很清楚它们的含义甚至在实际中不自觉地实践着。比如说，“曹冲称象”的故事就是很好的利用可加性的案例。由于大象的重量与一堆石块的重量相等，因此要知道大象的重量只需知道这一堆石块的重量。当时的衡器是能够称出每一小块石头的重量的，因此最后所需要做的就只是加法而已。

大部分测度是没有上界的，比如实轴的长度，第一象限的面积等都是无穷大。但是，概率是一种特殊的测度，它是有上界的。很显然这个上界就是概率是不可能大于1的，并且必然事件的概率为1。这就是所谓的规范性。

前苏联数学家科尔莫戈罗夫在此基础上把概率定义为具有非负性、可

加性和规范性的测度，进而把概率看成是集合（事件）的函数（简称“集函数”），从而在1933年提出了著名的概率公理化定义：

设Ω为一个试验样本空间，随机事件A是Ω的子集，$P(A)$是A的一个实值函数，且满足下列三条公理，则称函数$P(A)$为事件A的概率。

公理1（非负性）：对于任一事件A，有$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

公理2（规范性）：$P(\Omega) = 1$；

公理3（可加性）：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$互不相容（互斥），则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

从而概率论就在公理化定义的基础上建立了一整套无矛盾的逻辑体系。概率公理化定义刻画了概率的本质，但并没有告诉人们如何确定概率，只是规定了概率应该满足的性质。历史上在公理化定义出现之前的概率的古典定义、几何定义、统计（频率）定义和主观定义都在一定的场合下给出了各自确定概率的方法，因此在有了概率的公理化定义之后，把它们看成确定概率的方法是恰当的。

［评注］

目前概率论中确定概率的方法主要是古典方法、几何方法与统计（频率）三种方法。用主观的方法确定的概率叫主观概率，统计界的贝叶斯学派（贝叶斯，*T.Bayes*，1702～1763，英国数学家）认为：一个事件的概率是人们根据经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念。如，有学者称“神农架存在野人的概率不超过5%”，这就是主观概率。主观概率与主观臆断有本质的不同，前者具有可信性，在遇到的随机现象无法大量重复时，用主观方法决策与判断是适合的，是统计（频率）方法的补充，但目前还不是概率论研究的对象。需要指出的是，主观概率总含有客观的因素；客观概率的测定也难免含有主观的因素，因为实际数据资料很难达到大数定律的要求。

1.2 基本理论

1.2.1 随机事件的概率

随机事件的概率是用来度量随机事件发生可能性大小的量。在相同条件下做大量的重复试验，一个随机事件出现的次数n_A和总的试验次数n之比，称为这个随机事件在这n次试验中出现的频率。随着试验次数n逐渐增加，频率将稳定在一个常数附近，这个常数称为该随机事件的概率。

[评注]

（1）这里所说的随机事件，指的是可以做“重复试验”的。像“22世纪人类能否在月球居住”只是不确定事件，而不是随机事件。

（2）一个随机事件的发生既有随机性（对一次试验而言），又存在着统计规律（对大量重复试验而言）；从哲学的角度来看，这是偶然性与必然性的对立统一。频率是随机的，而概率反映的是“大量重复试验”中频率的稳定性，是频率的统计规律，是一个客观存在的常数。不能把“概率等于$\frac{1}{2}$”错误理解为“两次试验中出现一次”。又如，中奖率为$\frac{1}{1000}$的彩票，买1000张不一定中奖。还要注意不能把概率论研究的概率与主观概率混淆。如“某人此时十有八九不高兴”中“十有八九”属于主观概率，不是概率论研究的对象。

1.2.2 概率的几个基本性质

（1）任何事件A的概率$P(A) \in [0,1]$。

（2）如果A，B两个事件不能同时发生，即$A\cap B$为不可能事件（$A\cap B$也可记作AB）。则称事件A，B互斥。特殊地，若A，B两个事件不能同时发生，且在任何一次试验中有且有一个发生，即$A\cap B$为不可能事件，且$A\cup B$为必然事件（$A\cup B$也可记作$A+B$），则称事件A，B为对立事件，记$B=\overline{A}$。

若事件A，B是互斥事件，则事件$A\cup B$发生的概率$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$（互斥事件的概率加法公式）。特殊地，如果事件A，B对立，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$，所以$P(A)=1-P(B)$，即$P(A)=1-P(\overline{A})$（对立事件的概率加法公式）。

［评注］

（1）互斥事件的概率加法公式可推广到n个彼此互斥的情形，即若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$彼此互斥，那么$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$。利用此公式可“化繁为简”、“化难为易”。

（2）对立事件的概率加法公式体现了“正难（繁）则反”的逆向思维方法。

1.2.3 古典概型及其概率的计算

我们把具有以下两个特点的概率模型称为古典概型：

（1）试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；

（2）每个基本事件的发生可能性相等（等可能发生）。

对于古典概型，如果一次试验的等可能基本事件共有n个，某个事件A包含了其中m个等可能基本事件，那么事件A发生的概率$P(A)=\frac{m}{n}$。

［评注］

随机试验的形式多种多样，内容也往往千差万别，我们可以根据不同的特征建立不同的概率模型。古典概型是最简单的概率模型。需要明确的是：古典概型是一类数学模型，并非是现实生活的确切描述，有时为了使试验的基本结果是等可能发生的，我们可以把没有差异的对象看成有差异

的，把没有顺序的对象看成有顺序的；对于同一个问题可以用不同的古典概型来解决。如，掷一枚均匀的骰子，求“出现偶数点”的概率，可以认为有6个等可能的基本试验结果，其中有3个结果的发生出现偶数点，也可以认为有两个等可能的基本试验结果（把三个偶数点的面和三个奇数点的面分别涂上两种不同的颜色），结果是一样的。

1.2.4 几何概型及其概率的计算

如果我们将每个基本事件理解为从某个特定的几何区域内随机取一点，该区域中每一点被取到的机会都一样，则一个随机事件的发生可理解为恰好取到上述区域内的某个指定区域中的点。这里的区域可以是线段、平面图形、立体图形等。用这种方法处理随机试验得到的概率模型，称为几何概型。几何概型具有以下两个特点：

（1）试验中所有可能出现的基本事件有无限个；

（2）每个基本事件出现的可能性相等（等可能发生）。

对于几何概型，在几何区域Ω中随机取一点，记事件“该点落在其内部一个区域A”为事件A，则事件A发生的概率$P(A)=\dfrac{A\text{的长度（面积或体积）}}{\Omega\text{的长度（面积或体积）}}$。

[评注]

几何概型基本事件的“等可能性”一般表现为几何区域内点的分布“均匀性”；尽管有时候我们可以把射线或射线旋转形成的角作为几何概型的基本事件，但也可以通过构造圆将其转化为圆上的点。

1.2.5 相互独立事件

事件A，B相互独立：事件A的发生不会影响事件B的发生概率，或者

事件B的发生不会影响事件A的发生概率。

如果事件A，B相互独立，那么下列各对事件：A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都相互独立。

［评注］

（1）互斥事件与独立事件的区别：一是从定义来看，两者针对问题的角度不同，前者针对能否同时发生，后者针对有无影响；二是从试验次数来看，互斥事件是一次试验下出现的不同事件，相互独立事件是两次或两次以上试验下出现的不同事件。

（2）互斥事件与独立事件的联系：当事件A，B都不是不可能事件时，A，B互斥与A，B独立不能同时成立；当事件A，B至少有一个是不可能事件时，A，B互斥与A，B独立同时成立。（关于这个结论的证明见［探究与拓展］）

1.2.6 和事件与积事件的概率

和事件$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$表示在同一次试验中，事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$至少有一个发生。

积事件$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，表示事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生。

若事件A，B是互斥事件，则事件$A \cup B$发生的概率$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$（概率加法公式）。特殊地，如果事件$A$，$B$对立，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$。

若事件A，B是相互独立事件，则事件$A \cap B$发生的概率$P(A \cap B) = P(A)P(B)$（概率乘法公式）。

1.2.7 条件概率

设A，B是事件，在A发生的条件下，B发生的概率，称为条件概率，记

为$P(B|A)$。如果$P(A)>0$，则$P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

［评注］

（1）在A发生的条件下，B发生的概率$P(B|A)$与A，B同时发生的概率很容易混淆。条件概率中的两个事件一个是确定性事件，已发生；另一个是随前一个变化的随机事件。同时发生的事件的概率中两个事件都是随机事件，是并列共处的情况。

（2）$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$或$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$。特别地，当$P(B|A)=P(B)$或$P(A|B)=P(A)$，即A发生不影响B发生的概率或B发生不影响A发生的概率，也即A，B相互独立时，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

1.2.8 离散型随机变量的分布列

一般地，若离散型随机变量可能取的不同值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，X取每一个值$x_i(i=1,2,\cdots n)$的概率$P(X=x_i)=p_i$，则称为随机变量 的概率分布列。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

［评注］

从函数的角度来看，概率是随机变量X的函数，概率分布列相当于函数表示法中的列表法。

1.2.9 两点分布

如果随机变量X只取值0或1，分布列是$P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$，$p\in(0,1)$，就称X服从0－1分布或两点分布，记为$X\sim 0-1$分布或