中学数理化发展智能丛书

怎样学好平面三角

周长生　常相舜
刘　坤　谢长宵　编著

中学数理化发展智能丛书

怎样学好平面三角

北京四中

刘坤　常相舜　周长生　编著

河南科学技术出版社

中学数理化发展智能丛书
怎样学好平面三角
北京四中
刘坤　常相舜　周长生　编著
责任编辑　刘　嘉
河南科学技术出版社出版
保定市满城科技印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
787×1092毫米　32开本　12.375印张　266千字
1990年2月第1版　　1990年2月第1次印刷
印数：1—8,830册
ISBN7-5349-0469-2/G·370
定价：4.70元

前 言

在初中，我们学过三角函数的初步知识，重点研究的是解三角形（解直角三角形和解斜三角形）。

在高中，我们将主要用函数的观点深入研究三角函数的多种性质，在这个基础上重点学习三角函数式的变形（又称三角变换）。这些知识对进一步学习高中和大学的数学、物理、工程等课程都是必备的基础。

为了使大家对本书的内容从逻辑上先有个粗略的整体性的认识，在下页附上了全书的逻辑关系图，在学习过程中经常参考这张图，能了解所学单元在整个知识体系中的地位、作用以及各单元之间的相互联系。

作为本书和后续课的需要，在第一章讲“向量常识”。向量是沟通几何、代数、三角的桥梁，是近代数学的非常有用的工具，及早地接触它是有益的。

三角这门课程公式甚多，它是三角变换的重要组成部分，记熟并能灵活使用这些公式是三角变换的需要。要做到这一点，必须在正确理解公式的基础上，抓特点（每个公式的功能，适用条件和形式上的特点），抓联系（公式之间的纵、横联系），抓应用（在应用中加深理解）。当然，有意识地学习

运用先进的记忆方法也是必要的。

应该说明：为了使这门课程体系结构更加清晰、合理，数学思维方法的阐述更加准确简明，本书参考了国内、外最新的三角学的研究成果，对传统的三角教材进行了改革。通过在我校高一年级试教表明，这个新体系和传统的体系相比确实优点突出，易教易学，科学素质的培养能落在实处，而且省课时，效果好。

由于我们水平有限，书中不当之处在所难免，欢迎专家们、老师们、同学们提出宝贵意见，以便再版时修订。

编　者

1988.3.

目 录

第一章　向量常①

在现实世界中，存在着两种类型的量。一类如距离、体积、质量等，它们只有数值的大小，统称**数量**（又叫标量）；另一类如速度、力、位移等，它们不但有数值大小，而且还有方向，这类量统称(**向量**又叫矢量)。向量来自物理学，但是现在已发展成独立的数学部门，在物理以及数学很多分支都有广泛的应用。

在这一章里，我们学习向量的一些基本概念和线性运算、并且只讨论平面向量。

§1—1　向量的基本概念

向量最直观的例子是位移。

我们先看点在平面上的位移。若质点从O出发，东行2cm，到达A，就说质点的位移是东2cm；若质点又从A出发，沿着北30°东方向移动3cm，到达B，就说质点新的位移是北30°东方向3cm

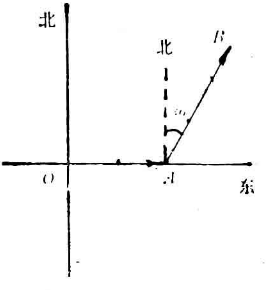

图1—1

（图1—1）．显然，位移是向量，我们用$\overrightarrow{OA}$表示第一次位移(其中第一个字母表示始点，第二个字母表示终点，箭头从始点指向终点)，读作“向量$\overrightarrow{OA}$”．线段OA的长表示位移的距离，记作$|\overrightarrow{OA}|$，读作“向量$\overrightarrow{OA}$的模”。显然向量的模是个非负实数，是标量．同样，第二次位移可以表示成$\overrightarrow{AB}$，它的模记作$|\overrightarrow{AB}|$．

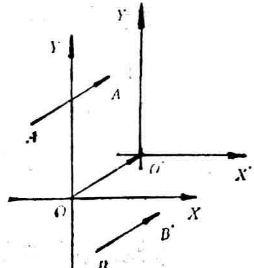

图1—2

现在我们来看平面的平移．

若平面XOY内的所有的点都在原平面内按同一方向移动相同的距离（图1—2），我们就说平面XOY在原平面内产生了一个平移．此时平面XOY上所有点的位移都是相同的，从而表示各点位移的向量都具有相同的方向和相同的模，这样的向量我们称它们是相等的，即同向且等模的两个向量称为**相等**．如图1—2中，表示点O、A、B位移的向量$\overrightarrow{OO'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$是相等的，表示成

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}.$$

至此，不难理解：上述平面的平移也是一个向量，

①编写本章时，参考了《高级中学实验课本数学Ⅱ》的第一章（人民教育出版社）。

这个向量可由该平面内任一个点的位移向量表示出来，既可用$\overrightarrow{OO'}$表示，又可用$\overrightarrow{AA'}$表示，……由此，可以联想到向量可以在平面内不改变方向和大小而自由平移。如可以把$\overrightarrow{OO'}$平移到$\overrightarrow{AA'}$或$\overrightarrow{BB'}$，这样的向量称为自由向量，今后为表达上简单，也可用一个字母加箭头表示向量，如用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示向量。

点的位移和平面在原平面内的平移是向量的数学模型。以它们作直观，容易理解以下的概念：

若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是同向的或反向的，我们称它们为**平行向量**，记为$\vec{a}\parallel\vec{b}\parallel\vec{c}$（图1—3）。

两个反向且等模的向量称为是**相反向量**。$\vec{a}$的相反向量记为$-\vec{a}$（图1—4）。显然$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为相反向量，所以有

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$$

模为1的向量称为**单位向量**，常用$\vec{e}$来表示，有$|\vec{e}|=1$

模为零的向量（也就是起点与终点重合的向量）称为**零向量**，记为$\vec{0}$.零向量的方向任意，并规定零向量都相等。

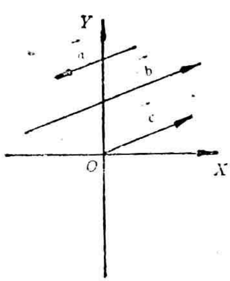

图1—3

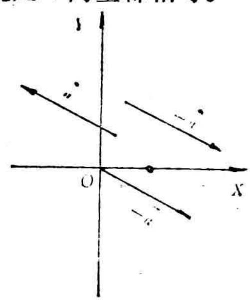

图1—4

§1-2 向量的加减法与减法

实例 某人自点A东行10km到达B，又北行10km到达C（图1—5）。这两次位移可以分别表示为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$。从物理学上我们知道，这两次位移的结果是此人自点A到达了点C，即产生了位移$\overrightarrow{AC}$，也就是说，位移$\overrightarrow{AC}$是位移$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的合成，记为

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

由此可以抽象出**向量加法**的意义和法则：

给$\vec{a}$、$\vec{b}$，把$\vec{b}$平移，使$\vec{b}$的起点与$\vec{a}$的终点重合，则以$\vec{a}$的起点为起点，以$\vec{b}$的终点为终点的向量$\vec{c}$（图1—6）称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**和**，记为

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

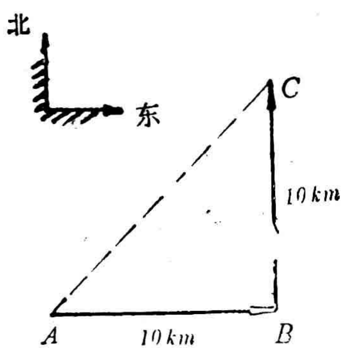

图1—5

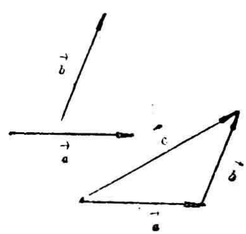

图1—6

这种求和的规则称为向量加法的三角形法则。

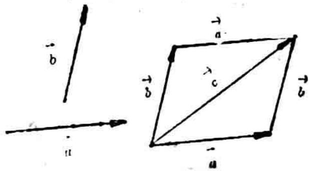

图1—7

求向量的和还可以用另一种方法。如图1—7，把$\vec{a}$、$\vec{b}$平移到同一个起点，以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边作的对角线所表出平行四边形，则以$\vec{a}$与$\vec{b}$的共同起点为起点的平行四边形示的向量，称为$\vec{a}$、$\vec{b}$的和。这种求和规则称为向量加法的平行四边形法则。

应该着重理解：两个向量的和仍然是一个向量。它可以通过三角形法则或平行四边形法则求出。

通过作图容易看出：

（1）$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（图1—8，加法交换律）；

（2）$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（图1—9，加法结合律）；

（3）$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

（4）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$。

这些就是向量加法的基本算律．它说明向量的加法可以象实数加法那样去演算。

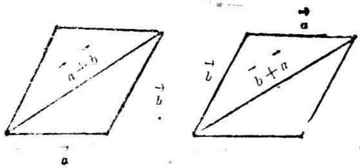

图1—8

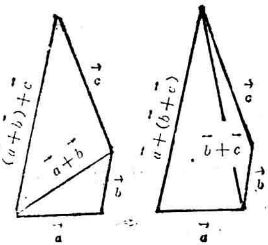

图1—9

问1 当$\vec{a}$、$\vec{b}$同向时，其和向量$\vec{c}$的方向与模和$\vec{a}$、$\vec{b}$的方向与模有什么关系？

问2 当$\vec{a}$、$\vec{b}$反向时，其和向量$\vec{c}$的方向与模和$\vec{a}$、$\vec{b}$的方向与模有什么关系？

向量的减法规定为加法的逆运算．即若$\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$，称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$．利用三角形法则，不难得到$\vec{a}-\vec{b}$（图1—10），这只要使$\vec{a}$、$\vec{b}$的起点重合，则以$\vec{b}$的终点为始点，以$\vec{a}$的终点为终点的向量就是$\vec{a}-\vec{b}$（或说成：使$\vec{a}$．$\vec{b}$的起点重合，则连接它们终点的向量就是它们的差，方向指向被减数）。

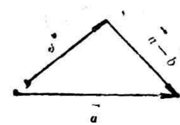

图1—10

利用相反向量，向量的减法可以转化成加法来做，如

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})。$$

这是一个很重要的思维方法．图1—11表明，$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+(-\vec{b})$是相等的．

应该注意：虽然向量加法的算律和实数加法是一样的，但是绝对不能把向量和实数混同起来．对于实数谈不到它在空间中的方向；实数可以比大小，而方向是不能比大小的．

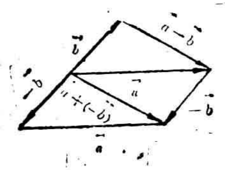

图1—11

由于向量的模是实数，所以向量的模可以比大小．关于向量的和的模，有下面的关系

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|, \qquad (*)$$

它对于任意的向量$\vec{a}$与$\vec{b}$都成立．（*）实际上反映的是三角形两边之和不小于第三边这样一个事实，因而称为三角形不等式，是一个很有用的结果．

练　习　1

1．从北京到上海这个位移与从上海到北京这个位移相同吗？为什么？

2．在直角坐标系中图示下列向量，并进行计算：

（1）$\vec{a}$：其方向是X轴正半轴逆时针旋转30°的方向，且$|\vec{a}|=4$，这样的$\vec{a}$能画多少个？

（2）$\vec{b}$：其方向是X轴正半轴，逆时针旋转300°的方向，且$|\vec{b}|=3$；

（3）上述向量$\vec{a}+\vec{b}$（应明确指出其方向与模，下同）；

（4）上述向量$\vec{a}-\vec{b}$；

（5）上述向量$\vec{b}-\vec{a}$。

3.已知$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\angle AOB=60°$，计算：

（1）$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$；　　（2）$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$；

（3）$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$。

4.求证：在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$。

5.若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$都为非零向量，那么$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$能否构成三角形？当满足什么条件时才能构成三角形？

6.当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，计算下列各式，并给以几何解释：

（1）$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$；　　（2）$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$。

7.证明：在三角形不等式中，当两个向量同向或者其中一个向量为零时，等号成立，反之亦然。

8.两向量的模为4和5，它们成多大的角才能使向量的和为6？

§1-3　实数与向量的乘积（向量的倍积）

1.数乘向量

在直线l上有一个非零位移向量$\vec{a}$。若质点在l上的位移与$\vec{a}$同向且长度是$|\vec{a}|$的5倍，我们自然把这个新的位移

向量表示成 $5\vec{a}$；若质点在l上的位移与$\vec{a}$反向且长度是$|\vec{a}|$的3倍，我们也会把这个新的位移表示成$-3\vec{a}$（图1—12）。在这种意义下，我们可以规定：

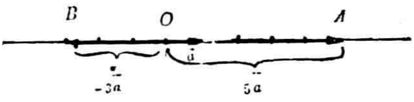

图1—12

实数λ与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个向量，其模（长度）为

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|,$$

其方向当$\lambda>0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\vec{a}$相反（图1—13），当$\lambda=0$时$\lambda\vec{a}=\vec{0}$。$\lambda\vec{a}$中的实数λ称为$\vec{a}$的系数。$\lambda\vec{a}$又称为$\vec{a}$的倍积，即把$\vec{a}$伸缩λ倍。

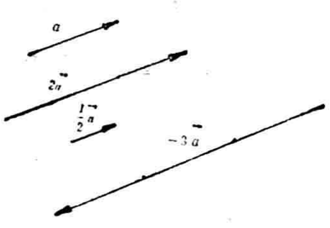

图1—13

由此，容易理解：若$\vec{a}\neq\vec{0}$，那么$\lambda\vec{a}$（$\lambda\in R$）能生成平