万向思维

培养学子 全球视野

我的助理

高中课程标准实验教科书 配套助学用书

GaoZhong KeCheng BiaoZhun ShiYan JiaoKeShu PeiTao ZhuXue YongShu

教材知识详解

一直在寻找这样的老师

总主编｜刘增利®

高中数学 必修④

配人教A版

开明出版社

教材知识详解

高中数学 必修④

配人教A版

总主编 刘增利
本册主编 孙庆常
本册编者 孙庆常 王雪莲

参与学科审订教师：
［黄冈中学］王宪生 张 智
［武穴中学］郑齐爱
［郑州一中］孙士放
［郑州101中学］薛银周
［南阳一中］罗 东 杨要理 陈朝印
［南阳五中］闫德龙 崔建欣 张海燕 陆大勇 史山玲 袁泽馨
［南阳八中］李志国
［南召现代高中］张风英
［合肥工大附中］余树宝
［芜湖一中］徐月兵 武 湛
［铜陵一中］胡 俊
［芜湖县一中］章 立
［阜阳城郊中学］吴桃李 陈 峰
［阜阳红旗中学］刘 明
［寿光现代中学］王金兴 魏振恩 隋守春
［宿松县程集中学］徐河水

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材知识详解：人教A版. 高中数学：必修／刘增利主编. --北京：开明出版社，2011.5
ISBN 978-7-5131-0207-0

Ⅰ. ①教… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第068274号

策划设计	《教材知识详解》数学必修❹编写委员会	版式设计	李诚真
总 主 编	刘增利	出　　版	开明出版社
本册主编	孙庆常	印　　刷	陕西思维印务有限公司
责任编辑	范　英	印刷质检	高　峰
责任审读	尹继红	经　　销	各地书店
研发统筹	河　海	开　　本	890×1240　1/16
创意统筹	刘书娟	印　　张	12
校订统筹	陈宏民	字　　数	312 千字
责任录排	董　冬	版　　次	2011 年 8 月第 1 版
封面设计	柏拉图工作室	印　　次	2011 年 8 月第 1 次印刷
		定　　价	22.80 元

主编邮箱：zbwxsw@126.com　投稿邮箱：tgwxsw@126.com
最给力的学习网——啃书网：www.kbook.com.cn
图书质量监督电话：010-88817647　售后服务电话：010-82553636
图书内容咨询电话：010-82378880 转 221
通信地址：北京市海淀区王庄路 1 号清华同方科技广场 B 座 16 层（邮编 100083）
教师 QQ 交流群：8426522（欢迎一线老师加入，交流教学经验，共享教学资源）

ACADEMIC TEAM

万向思维 学术专家团


辽宁/林淑芬
中学化学 高级教师


辽宁/张福建
中学数学 高级教师


辽宁/敖兰其其格
中学英语 高级教师


广东/吴毓全
中学英语 特级教师


贵州/龙纪文
副研究员


安徽/章潼生
中学语文 高级教师


山东/韩际清
中学数学 高级教师


重庆/李开珂
中学数学 高级教师


新疆/卢萍
中学英语 高级教师


湖北/胡明道
中学语文 特级教师


湖南/周华辅
中学数学 高级教师


河南/骆传枢
中学数学 特级教师


四川/田间
中学化学 特级教师


北京/王大绩
中学语文 特级教师


北京/王乐君
中学英语 特级教师


福建/江敬润
中学语文 高级教师


陕西/张载锡
中学物理 特级教师


北京/周誉蔼
中学物理 特级教师


山西/田秀忠
中学语文 高级教师


浙江/施储
中学数学 正教授级


河北/潘鸿章
教授


江苏/齐迅
中学英语 特级教师

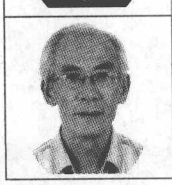

广西/邓雅学
中学语文 特级教师


甘肃/郑作慧
中学数学 特级教师


北京/张立言
中学化学 高级教师


黑龙江/武钢
中学物理 副研究员


云南/李成
中学英语 特级教师


内蒙古/陈弘法
中学英语 特级教师


江西/黄翠兰
中学英语 高级教师


吉林/王鹏伟
中学语文 高级教师

一直在寻找这样的老师

当你面对教材茫然无绪，当你面对试卷百般无措，你可能需要这样一位老师：他满腹经纶，旁征博引，点石成金；他主张分享，强调深挖，激活潜能；他记忆超强，真才实学，出口成章；他久经沙场，经验丰富，秘技超群；他机敏过人，见解独到，妙语如珠，帮你拉近教材与考试之间的距离。

1 细品教材

目标导航　深入透彻地解析教材知识学习目标和方法能力要求，让你对将要进行的学习成竹在胸。

教材知识详解　梳理教材，重点突出、详略得当；解读教材，释疑解难深入浅出；探究教材，合理拓展、点点通透。

2 精析案例

典型例题解读　紧扣考点，从基础题型到综合题型，剖析典例，点拨思路，轻松提升知识应用能力。

思维误区点击　不仅告诉你正确的解题方法，还将容易做错的原因一一呈现，明确思维误区，为你指点迷津。

高考能力提升　甄选最新高考试题，明晰对应考点要求，讲解细致入微，实时了解高考目标。

3 及时训练

知识巩固训练　基础水平训练：紧扣双基，精选各地名校期末、模块测试题，全面验收过关。
高考水平训练：针对考点要求，选编高考能力习题，与高考零距离。

4 阶段总结

知识网络回顾　全章知识方法网络化、系统化，纷杂知识一目了然。

专题完全解读　及时总结，查漏补缺，突破重点，专题突破。

方法应用解读　总结解题方法，整理解题技巧，提供最优解题方法，轻松实现高分梦想。

全章自我检测　精选涵盖学段知识和能力要求的检测题，梯度合理，难易适中，随时检测学习成果。

你想要教材原文？**我给你**！你想要教材课后答案详解？**我给你**！
你想轻松**突破**高考考点，我也给你！
课内重难点精透剖析，课外知识巧妙迁移……你还想要什么？我**通通**都给你！
我还用结构图、清单图来帮你记忆！我这么**给力**，我就要你**好成绩**！

你的学习方法适合你吗

请你根据我们的学习方法测试表来检验一下吧！本套测试主要是对中学生的学习方法适应性的初步检测，请你根据自己学习的实际情况，做出你的选择。如所列的内容符合自己的情况，则选择“是”，不符合的选择“否”，无法确定的可选择“不确定”。

学习方法测试表

序号	测试问题	你的选择		
		是	否	不确定
1	你是否觉得学习很有趣味？			
2	你是否经常感到睡眠不足？			
3	你是否很容易就进入学习状态？			
4	你是否喜欢参加学校的集体活动？			
5	你是否觉得自己在学习上有些压抑？时常被打扰？			
6	你学习上有了困难是否能得到家长的帮助？			
7	你是否觉得自己在学习上比较轻松？			
8	你是否对不喜欢的学科就不愿意学？			
9	你是否经常与成绩好的同学进行比较？			
10	你是否学习上经常受到鼓励和表扬？			
11	你是否每天学习都有固定的时间？			
12	你是否上课时经常有些内容听不懂？			
13	你是否觉得学习主要就是上课和写作业？			
14	你是否觉得听课时总不能抓住主要的内容？			
15	你是否觉得学的知识不扎实，甚至前面学后面忘？			
16	你的作业是否都是独立完成的？			
17	你是否觉得补课没有太大的作用？			
18	你是否觉得平时学的还不错，但就是考不好？			
19	你是否只要有时间就经常看各种书？			
20	你是否会认真分析做过的试卷？			
21	你是否知道自己什么时间的记忆效果最好？			
22	你是否做过的题过段时间又不会做了？			
23	你是否觉得记单词、背课文很容易？			
24	你是否遇到学习上不懂的问题就会设法弄明白？			
25	你是否觉得有些公式定理很难记住？			
26	你是否常与同学讨论学习上的问题？			
27	你是否觉得许多不懂的问题只要多读几遍就明白了？			
28	你是否在学习上常有些应付或得过且过？			
29	你是否考虑过改进自己的学习方法？			
30	你是否经常独立思考一些问题？			

记分标准

2、5、8、12、13、14、15、18、22、25、28题选择“否”记2分，选择“是”记0分，选择“不确定”记1分；其他的题选择“是”记2分，选择“否”记0分，选择“不确定”记1分。

将各测试题分数相加，算出总分。

测试分析

60—50分：学习方法很好，学习效率比较高。多关注书中的高考专题，会使你的学习目标更明确，成绩提高更迅速。

49—30分：学习方法较好，学习效率一般。需要对书中的例题和方法点拨部分多加揣摩，理解例题所对应的知识应用策略。

29—10分：学习方法一般，学习成绩时好时坏。除了对书中的例题进行研读外，还应有针对性地选择例题对应的习题进行适时演练，达到不断巩固的目的。

10分以下：学习方法很原始，学习效率很低。有必要对书中教材详解部分逐字逐句地进行研读，尤其要对重点问题的注意事项多加关注，理解课本知识的本质。

目录

CONTENTS

金牌全解

目录

CONTENTS

第一章　三角函数

1.1　任意角和弧度制

1.1.1　任意角

1.1.2　弧度制

目标导航

1. 了解任意角(正角、负角、零角)、象限角、终边相同角的概念,掌握象限角及终边相同角的集合表示方法.
2. 了解弧度制的概念,能正确地进行弧度和角度的互化,掌握弧度制下的弧长公式和扇形面积公式.
3. 理解角的集合与实数集**R**之间建立的一一对应的关系.

旧知回顾

1. 角的概念:角可以看作是有公共端点的两条射线所组成的图形,也可以看作是平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.
2. 初中研究角的范围是$0°\sim360°$,锐角是大于$0°$小于$90°$的角,钝角是大于$90°$小于$180°$的角.
3. 半径为R,圆心角为$n°$的弧长公式为$l=\dfrac{n\pi R}{180}$,扇形面积公式为$S=\dfrac{n\pi R^2}{360}$.

Ⅰ　教材知识详解

教材全析

1. 任意角

(1)角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

(2)正角:按逆时针方向旋转形成的角叫做正角.

(3)负角:按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.

(4)零角:如果一条射线没有作任何旋转时,我们称它形成了一个零角. 这样,零角的始边与终边重合. 如果α是零角,那么$\alpha=0°$.

这样,我们就把角的概念推广到了任意角,包括正角、负角和零角.

剖析说明

(1)理解任意角的概念,应注意角的四要素:顶点、始边、终边和旋转方向,角可以是任意大小的,不再限于$0°\sim360°$.

(2)为了简单起见,在不引起混淆的前提下,"角α"或"$\angle\alpha$"可以简记为"α".

(3)要正确理解正角、负角、零角的概念的关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有旋转.

(4)在图中表示角时,应注意箭头的方向不可丢掉,因为箭头的方向代表角的正负.

剖析说明

(5)当角的始边相同,角相等时则终边相同;终边相同,而角不一定相等.

(6)确定任意角大小的关键是要抓住旋转方向及旋转圈数.

2. 直角坐标系中的角

(1)象限角:如果使角的顶点与原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,那么角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限角.

(2)非象限角:如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何一个象限.

(3)终边相同的角:设α表示任意角,所有与α终边相同的角连同角α在内,可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任意一个与角$\alpha$终边相同的角,都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

(4)象限角以及终边在坐标轴上的角的表示方法:

第一象限角:$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

第二象限角:$\{\alpha|k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

第三象限角:$\{\alpha|k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

第四象限角:$\{\alpha|k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在x轴的正半轴上的角:$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在x轴的负半轴上的角:$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在x轴上的角:$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在 y 轴的正半轴上的角：$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在 y 轴的负半轴上的角：$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在 y 轴上的角：$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(5)区分"锐角""0°～90°的角""小于90°的角"和"第一象限角".

①锐角是第一角限角，其可以表示为 $\{\theta|0°<\theta<90°\}$；

②0°～90°的角可能是零角，其可以表示为 $\{\theta|0°\leq\theta<90°\}$；

③小于90°的角可能是零角或负角，其可以表示为 $\{\theta|\theta<90°\}$；

④第一象限角不一定是锐角，其可以表示为 $\{\theta|k\cdot360°<\theta<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

剖析说明

(1)象限角的前提条件是：角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

(2)对于终边相同角的理解：①α 为任意角；②$k\cdot360°$ 与 α 之间用"+"连接，$k\cdot360°-\alpha$ 可看作 $k\cdot360°+(-\alpha)$；③相等的角终边一定相同；终边相同的角不一定相等，但它们相差360°的整数倍；④$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件必不可少.

(3)象限角与终边在坐标轴上的角的表示形式并不唯一，还有其他的表示形式.

3. 角度制与弧度制

(1)角度制：用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制.周角的 $\frac{1}{360}$ 为1度，记作1°.

(2)弧度制：用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制. 长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角，用符号表示为1 rad，读作1弧度. 如图1-1-1，圆 O 的半径为1，$\overset{\frown}{AB}$的长等于1，$\angle AOB$ 就是1弧度的角.

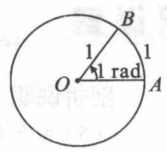


图1-1-1

(3)弧度数：一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.

(4)角度制与弧度制的比较：

①用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但数量相同(都是0)；用角度制和弧度制度量任一非零角，单位不同，数量也不同.

②以弧度为单位表示角的大小时，"弧度"两字可以省略不写. 但如果以度(°)为单位表示角的大小时，度(°)就不能省去.

③在学习了两种度量角的单位制后，不能混用.

④不管是以"弧度"还是以"度"为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的量.

剖析说明

(1)使用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求角 α 时，得出的是角 α 弧度数的绝对值的大小，其正负由角 α 终边的旋转方向决定.

(2)角 α 与所在圆的半径大小无关，它由比值 $\frac{l}{r}$ 唯一确定.

4. 角度制与弧度制的互化

(1)将角度转化为弧度

$360°=2\pi$ rad，$180°=\pi$ rad，$1°=\frac{\pi}{180}$ rad $\approx0.017\ 45$ rad.

(2)将弧度转化为角度

2π rad $=360°$，π rad $=180°$，1 rad $=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°=57°18'$.

(3)特殊角的弧度数与角度数的对应表

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
角度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

(4)角与实数的对应

角的概念推广后，在弧度制下，角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应(如图1-1-2).

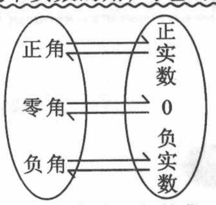


图1-1-2

剖析说明

(1)弧度制是数的进位，即十进位制，运算较为方便；角度制是60进位制.

(2)用弧度表示角时，若无精确度的要求，常常把弧度数写成多少 π 的形式，不把 π 写成近似的小数.

(3)终边相同的角的集合可以用弧度的形式进行表示 $\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. 表示角的时候，角的单位必须统一，不应出现诸如 $\frac{\pi}{6}+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 这一类的写法.

5. 弧度制下的弧长公式和扇形面积公式

在半径为 R 的圆中，弧长 l 所对的圆心角为 α，则

度量单位 / 类别	α 为角度数	α 为弧度数
扇形的弧长	$l=\frac{\alpha\pi R}{180}$	$l=\|\alpha\|\cdot R$
扇形的面积	$S=\frac{\alpha\pi R^2}{360}$	$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\|\alpha\|\cdot R^2$

剖析说明

(1)由上述公式可知,已知 α、R、l、S 中的两个量可以求出另外的两个量,即由其二知其二.

(2)运用弧度制下的公式的前提是 α 为弧度制.

(3)在运用公式时,还应熟练地掌握这两个公式的变形运用:

①$|\alpha|=\frac{l}{R}$,$R=\frac{l}{|\alpha|}$;②$|\alpha|=\frac{2S}{R^2}$.

(4)巧学巧记:

扇形面积公式可以类比三角形的面积公式来记忆,$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$,l 相当于三角形的底边,R 为该底边上的高,所以扇形面积可以利用三角形的面积公式来记忆.

知识拓展

1. $\frac{\theta}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的象限的确定

已知 θ 是第几象限角,要确定 $\frac{\theta}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 所在象限的常用方法有两种.

方法一:分类讨论. 由 θ 的范围得到 $\frac{\theta}{n}$ 的范围,然后对 n 进行讨论,从而确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在象限.

方法二:(1)$\frac{\theta}{2}$ 所在象限的问题.

如图 1-1-3,作出各个象限的角平分线,它们与坐标轴把周角等分成 8 个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标的数字是几的区域,就是 θ 为第几象限的角时,$\frac{\theta}{2}$ 的终边落在的区域,$\frac{\theta}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出来了.

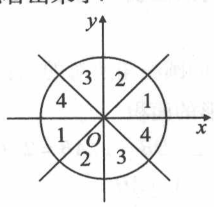


图 1-1-3

(2)$\frac{\theta}{3}$ 所在象限的问题.

如图 1-1-4,作出三等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成 12 个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 12 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标号是几的区域,就是 θ 为第几象限的角时,$\frac{\theta}{3}$ 的终边落在的区域,$\frac{\theta}{3}$ 所在的象限就可以直观地看出来了.

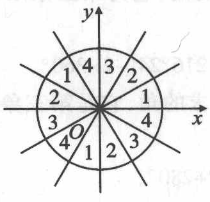


图 1-1-4

(3)$\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题.

一般地,要确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限,可以作出 n 等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成 $4n$ 个区域. 从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标号是几的区域,就是 θ 为第几象限的角时,$\frac{\theta}{n}$ 的终边落在的区域,$\frac{\theta}{n}$ 所在的象限就可以直观地看出来了.

2. 终边相同的角与对称等几何问题

角的终边是一条射线,在平面直角坐标系中它们可能具有对称性,这些角就有一定的关系,此类问题要先找一个适合题意的角,然后由终边相同的角的集合就可将所求角表示出来,一般地:

(1)α 与 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha+\beta=k\cdot360°$,$k\in\mathbf{Z}$;

(2)α 与 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°$,$k\in\mathbf{Z}$;

(3)α 与 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°$,$k\in\mathbf{Z}$;

(4)α 与 β 的终边在一条直线上,则 $\alpha-\beta=k\cdot180°$,$k\in\mathbf{Z}$.

3. 区间角的表示

(1)概念:从一个角到另一个角之间的所有角的集合,称为一个区间角.

(2)表示:在表示区间角时,要先把角度换算成弧度,再写出与区间角的终边相同的角的集合,最后利用不等式表示出区间角的集合,对于能合并的应当合并.

(3)常见错误:在表示图形所表示的区间角时,常会出现矛盾不等式的情况,这是由于没有弄清角的大小所致.

剖析说明

对于区间角的书写,一定要看其区间是否跨越 x 轴的正方向,若区间跨越 x 轴的正方向,则在前面的角用负角表示,后面的角用正角来表示;若区间不跨越 x 轴的正方向,则无需这样写.

Ⅱ 典型例题解读

基础题型

题型1 判断任意角所在象限(链接 A 卷第 2 题)

例1 在 0°~360°范围内,找出与下列各角终边相同的角,并判断它是第几象限角.

(1)909°;(2)−503°36′;(3)640°.

分析:将所给角 α 写成 $\alpha=k\cdot360°+\beta(0°\leqslant\beta<360°,k\in\mathbf{Z})$ 的形式,于是 β 所在的象限即为 α 所在象限.

解:(1)$\because 909°=189°+2\times360°$,

$\therefore 189°$即为所求的角,它为第三象限角,从而$909°$也是第三象限的角.

(2)$\because -503°36'=216°24'-2\times360°$,

$\therefore 216°24'$即为所求的角,它是第三象限角,故$-503°36'$也是第三象限角.

(3)$\because 640°=360°+280°$,

$\therefore 280°$即为所求的角,它是第四象限角,从而$640°$也是第四象限角.

点拨:由角α的任意性得到象限角与非象限角的表示形式并不唯一.

题型 2　终边相同角的表示(链接 A 卷第 3 题)

例 2 写出终边在坐标轴上的角的集合.

分析:终边在坐标轴上的角包括终边落在x轴上和y轴上的角两部分,可分别写出再求并集.

解:终边在x轴上的角的集合为$S_1=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$,

终边在y轴上的角的集合为$S_2=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

于是,终边在坐标轴上的角的集合

$S=S_1\cup S_2$

$=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=2n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2n+1)\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

点拨:终边在坐标轴上的角的表示方法是正确表示任意角集合的基础,有助于准确判断任意角终边所在的区域,同时是今后求三角函数定义域和值域的基础.另外,将两个集合并在一起时,特别要注意观察它们的形式.

例 3 写出终边在直线$y=\sqrt{3}x$上的角的集合S,并把S中适合不等式$-180°\leqslant\beta<360°$的元素β写出来.

分析:在直角坐标系中画出直线$y=\sqrt{3}x$,从而求得直线与x轴的夹角,再写成$\beta=k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\alpha<360°)$的形式.

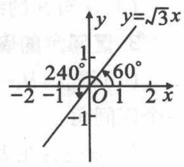


图 1-1-5

解:如图 1-1-5,在直角坐标系中画出直线$y=\sqrt{3}x$,可以发现它与x轴的夹角是$60°$.

在$0°\sim360°$范围内,终边在直线$y=\sqrt{3}x$上的角有两个:$60°$,$240°$,因此,终边在直线$y=\sqrt{3}x$上的角的集合

$S=\{\beta|\beta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=240°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=60°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$.

S中适合$-180°\leqslant\beta<360°$的元素是

$60°+(-1)\times180°=-120°$,$60°+0\times180°=60°$,$60°+1\times180°=240°$.

故S中满足不等式$-180°\leqslant\beta<360°$的元素有$-120°$,$60°$,$240°$.

点拨:(1)通过作图能够更直观地观察出直线与x轴的夹角.(2)在书写$\beta=k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$中$k\in\mathbf{Z}$这个条件不能遗漏.

题型 3　终边有约束条件的角的集合(链接 A 卷第 7、10、13 题,B 卷第 1、4 题)

例 4 如图 1-1-6,用弧度制表示顶点在原点,始边重合于x轴的正半轴,终边落在阴影部分的角的集合.

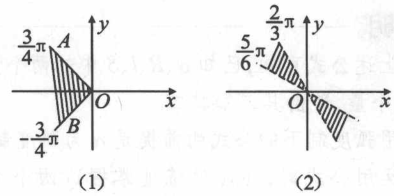


图 1-1-6

分析:把阴影部分看成一条终边逆时针旋转到另一条终边所形成的角的集合.

解:(1)将图(1)中阴影部分看成是由OA逆时针旋转到OB所形成的角的集合,以OB为终边的角$-\frac{3}{4}\pi$可以看成为$\frac{5}{4}\pi$,故满足条件的角的集合为$\left\{\alpha\left|\frac{3}{4}\pi+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{4}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2)将图(2)中x轴下方的阴影部分看成是由x轴上方的阴影部分绕着原点旋转π而得到的,所以满足条件的角的集合为$\left\{\alpha\left|\frac{2\pi}{3}+k\pi<\alpha<\frac{5}{6}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

点拨:终边落在某个扇形区域内的角的集合的表达式可以是多样的,但要注意区域的终边表达式必须依据始边的形式确定.临界线若为实线则带等号,若为虚线则不带等号.

题型 4　角度制与弧度制的互化(链接 A 卷第 12 题)

例 5 (1)把$112°30'$化为弧度(用π表示);

(2)把$-\frac{5}{12}\pi$化成角度.

解:(1)$\because 112°30'=112.5°$,$\therefore 112.5°=\left(\frac{225}{2}\right)°=\frac{225}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{8}\pi$.

(2)$-\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{12}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=-75°$.

点拨:角度与弧度互化,要牢记$\pi\ \mathrm{rad}=180°$.

题型 5　用弧度制求弧长及扇形面积(链接 A 卷第 4、8、9、12 题,B 卷第 5 题)

例 6 已知 1 弧度的圆心角所对的弦长为 2,求这个圆心角所对的弧长及所夹扇形的面积.

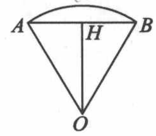


图 1-1-7

解:如图 1-1-7,$\angle AOB=1$,$AB=2$,$OH\perp AB$,则在$\mathrm{Rt}\triangle OHA$中,$\sin\frac{1}{2}=\frac{AH}{AO}$,

$\therefore OA=\frac{AH}{\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

故弧长$l=r\cdot\angle AOB=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\times1=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$,

扇形面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}}$.

题型 6　判断$\frac{\alpha}{n}$所在的象限

例 7 已知α为第三象限角,则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是(　　).

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

分析:根据角 α 的范围,求出 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围,再根据 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角. $\because \alpha$ 是第三象限角, $\therefore k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°(k\in \mathbf{Z})$, $\therefore k\cdot 180°+90°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+135°(k\in \mathbf{Z})$. 若 k 为偶数,则令 $k=2n,n\in \mathbf{Z}$,则 $n\cdot 360°+90°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+135°,n\in \mathbf{Z}$;故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角. 若 k 为奇数,则令 $k=2n+1,n\in \mathbf{Z}$,则 $n\cdot 360°+270°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+315°,n\in \mathbf{Z}$. 故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限角. 综上可知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角,故选 D.

答案:D.

点拨:由已知角所在的象限确定相关角所在的象限或范围,除了以上的分类讨论法,还可以用几何法.

综合题型

题型 1 任意角与弧度制的综合题

例 8 设角 $\alpha_1=-570°,\alpha_2=750°,\beta_1=\frac{3}{5}\pi,\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$.

(1)将 α_1、α_2 用弧度制表示出来,并指出它们各自所在的象限;

(2)将 β_1、β_2 用角度表示出来,并在 $-720°\sim 0°$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.

分析:运用弧度与角度的互化公式,用待定系数法找一个 $k(k\in \mathbf{Z})$ 和 α,使 α_1、α_2 化为 $2k\pi+\alpha$ 的形式;而 β_1、β_2 化为 $k\cdot 360°+\alpha$ 的形式.

解:(1) $\because 180°=\pi$ rad,

$\therefore -570°=-570\times\frac{\pi}{180}=-\frac{19}{6}\pi$, $\therefore \alpha_1=-\frac{19}{6}\pi=-2\times 2\pi+\frac{5}{6}\pi$.

同理 $\alpha_2=2\times 2\pi+\frac{\pi}{6}$.

$\therefore \alpha_1$ 是第二象限角, α_2 是第一象限角.

(2) $\because \beta_1=\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=108°$,

设 $\theta=k\cdot 360°+\beta_1(k\in \mathbf{Z})$,由 $-720°\leqslant\theta<0°$,

$\therefore -720°\leqslant k\cdot 360°+108°<0°$, $\therefore k=-2$ 或 $k=-1$.

$\therefore$ 在 $-720°\sim 0°$ 之间与 β_1 有相同终边的角是 $-612°$ 和 $-252°$.

同理 $\beta_2=\left(-2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=-360°-60°=-420°$,且在 $-720°\sim 0°$ 之间与 β_2 有相同的终边的角是 $-420°$ 和 $-60°$.

点拨:在某一指定范围内求具有某种特性的角,通常有两种方法:一种是化为解不等式去求对应的 k 的值;另一种是将 k 赋值然后找出相应的角.

题型 2 三角问题与平面几何问题的综合

例 9 如图 1-1-8,在扇形 AOB 中, $\angle AOB=90°$, $\overset{\frown}{AB}=l$,求此扇形的内切圆的面积.

分析:关键是弄清楚扇形的内切圆与扇形的几何关系,即内切圆与两条半径及 $\overset{\frown}{AB}$ 均相切.

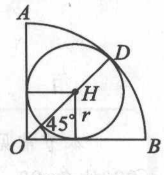


图 1-1-8

解: $\angle AOB=90°=\frac{\pi}{2}$,设扇形 AOB 的半径为 R,其内切圆半径为 r,由弧长公式有 $l=\frac{\pi}{2}R$,

$\therefore R=\frac{2l}{\pi}$. ①

又 $\because OD=R,HD=r,OH=\sqrt{2}r$,

$\therefore OD=OH+HD=(1+\sqrt{2})r=R$,

$\therefore r=\frac{R}{1+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)R$. ②

把①代入②,得 $r=(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{2l}{\pi}=\frac{2(\sqrt{2}-1)l}{\pi}$.

所以内切圆的面积 $S=\pi r^2=\pi\left[\frac{2(\sqrt{2}-1)l}{\pi}\right]^2=\frac{(12-8\sqrt{2})l^2}{\pi}$.

点拨:弄清 $OB=OD=OH+HD$,其中 $OH=\sqrt{2}r$, $HD=r$,利用此方程解出扇形内切圆的半径.

题型 3 任意角的实际应用(链接 B 卷第 3 题)

例 10 设时钟的时针在 2 时和 3 时之间,

(1)时针和分针什么时候会重合?

(2)何时两针在彼此的反向延长线上?

分析:解本题应明确参照点以及时针、分针旋转的方向及旋转的角度大小.

解法一:(1)设在 2 时 x 分时两针重合,此时分针相对于 0 时整转过 $6x$ 度,而时针相对于 0 时整转过 $\left(2+\frac{x}{60}\right)\times 30°$,依题意,得 $6x=\left(2+\frac{x}{60}\right)\times 30$.

解得 $x=10\frac{10}{11}$,即在 2 时 $10\frac{10}{11}$ 分时,时针与分针重合.

(2)设在 2 时 y 分时两针成一条直线(互为反向),依题意,得

$6y-180=\left(2+\frac{y}{60}\right)\times 30$,解得 $y=43\frac{7}{11}$.

即在 2 时 $43\frac{7}{11}$ 分时两针成一条直线,且互为反向延长线.

解法二:(1)从 2 时整开始分析,设分针转到“2”字后再转 x 小格,则分针走的路程为 $(10+x)$ 小格,时针所走的路程为 x 格,于是 $10+x=12x$,解得 $x=\frac{10}{11}$.

此时为 2 时 $\left(10+\frac{10}{11}\right)$ 分,即 2 时 $10\frac{10}{11}$ 分.

(2)从 2 时整开始分析,设分针超过“8”字 y 格,则时针超过“2”字 y 格,于是 $40+y=12y$,解得 $y=3\frac{7}{11}$. 此时为 2 时 $\left(40+3\frac{7}{11}\right)$ 分,即 2 时 $43\frac{7}{11}$ 分.

点拨:在解决时钟中的时针与分针的角度问题时,要注意在单位时间内它们各转了多少度.

Ⅲ 思维误区点击

本节常见的思维误区：(1)概念的混淆：角的概念推广后，应正确理解象限角、区间角的区别，如第一象限角、锐角、小于90°的角、0°~90°的角；(2)学习了弧度制以后，在同一个式子中，弧度与角度混用．在书写角时，"弧度"两个字常省略不写，但用角度表示时"度"(或"°")不能省略．

例11 下列命题中正确的是(　　).

A. 终边相同的角都相等

B. 第一象限的角比第二象限的角小

C. 第一象限的角都是锐角

D. 锐角都是第一象限内的角

错解：A、B、C.

误区分析：错选A是因为对终边相同的角的概念理解不透彻，任何一个角α的终边旋转360°的整数倍以后，都与它原来的终边重合，但它们相差360°的整数倍；错选B是因为对象限角的概念理解不清，象限角只反映角的终边的位置，而不反映角的大小．某个象限的角有无数个，其中有正角，也有负角，所以第一象限的角不一定比第二象限的角小；错选C是因为对象限角与锐角的概念理解不清．

正解：D.

例12 用弧度表示顶点在原点，始边重合于x轴的正半轴，终边落在阴影部分内的角的集合，如图1-1-9，不包括边界．

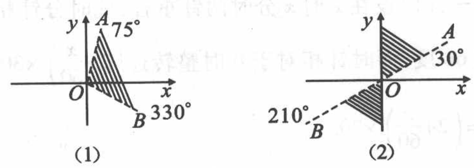


图1-1-9

错解：如图(1)，$2k\pi+330°<\theta<2k\pi+75°(k\in \mathbf{Z})$.

如图(2)，$(2k\pi+30°<\theta<2k\pi+90°)\cup(2k\pi+210°<\theta<2k\pi+270°)(k\in \mathbf{Z})$.

误区分析：一是在于回答问题没有使用统一的角的度量单位(这里应该统一使用弧度制)，二是在(1)中角的大小没有弄清楚，出现了矛盾不等式，而造成混乱．三是在(2)中表示角的集合时不等式与集合混合使用．

正解：如图(1)，以OB为终边的角330°，可以看成为-30°，化为弧度，即$-30°=-\frac{\pi}{6}$，而$75°=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$，

$\therefore \left\{\theta \left| 2k\pi-\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{5}{12}\pi, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$.

如图(2)，$\because 30°=\frac{\pi}{6}, 210°=\frac{7}{6}\pi$，

$\therefore \left\{\theta \left| 2k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}\cup$

$\left\{\theta \left| 2k\pi+\frac{7}{6}\pi<\theta<2k\pi+\frac{3}{2}\pi, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，

即$\left\{\theta \left| 2k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}\cup$

$\left\{\theta \left| (2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，

$\therefore \left\{\theta \left| k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$.

Ⅳ 高考能力提升

本节是学习三角函数的基础，高考中会涉及终边相同的角的表示、象限角的表示、弧度制的概念及弧度制下的扇形弧长公式和面积公式等，一般与三角函数定义、图象与性质或集合综合考查，单独命题较少，以选择题、填空题为主，难度中等偏下．

例13 (2010陕西模拟5分)已知集合$M=\left\{x \left| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，$P=\left\{x \left| x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，则(　　).

A. $M=P$　　　　B. $M\supsetneqq P$

C. $M\subsetneqq P$　　　　D. $M\cap P\neq\varnothing$

分析：对于集合M，当k为偶数时，它的终边落在直线$y=x$上；当k为奇数时，它的终边落在直线$y=-x$上，$\therefore$集合M表示终边落在直线$y=\pm x$上的角的集合．对于集合P，当$k=4n(n\in \mathbf{Z})$时，$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$，它的终边落在$y$轴上；当$k=4n+1(n\in \mathbf{Z})$时，$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{3}{4}\pi$，它的终边落在直线$y=-x$上；当$k=4n+2(n\in \mathbf{Z})$时，$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\pi$，它的终边落在$x$轴上；当$k=4n+3(n\in \mathbf{Z})$，$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{5}{4}\pi$，它的终边落在$y=x$上，$\therefore$集合$P$表示终边落在$y=\pm x$及两坐标轴上的角的集合．$\therefore M\subsetneqq P$.

答案：C.

点拨：此类问题也可以先将几个集合中的元素表示成某一统一的形式的整数倍，再比较倍数的范围．

V　知识巩固训练

A卷　基础水平训练（答案见132页）

一、选择题

1. 下列命题中正确的是(　　).
A. 第一象限角一定不是负角
B. 小于90°的角一定是锐角
C. 钝角一定是第二象限角
D. 终边相同的角一定相等

2. 已知角 $\alpha=k\cdot180°-2\ 002°,k\in\mathbf{Z}$，则符合条件的最大负角为(　　).
A. $-22°$　B. $-220°$　C. $-202°$　D. $-158°$

3. 角 α 的终边落在射线 $y=x(x\geqslant0)$ 上的角的集合是(　　).
A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$
B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-45°,k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°-45°,k\in\mathbf{Z}\}$

4. 已知2弧度的圆心角所对的弦长为2，那么这个圆心角所对的弧长为(　　).
A. 2　B. $\dfrac{2}{\sin1}$　C. $\sin2$　D. $2\sin1$

5. 若角 α、β 的终边相同，则 $\alpha-\beta$ 的终边在(　　).
A. x 轴的正半轴上
B. y 轴的正半轴上
C. x 轴的负半轴上
D. y 轴的负半轴上

二、填空题

6. 某个不大于180°的正角，此角的7倍角的终边与这个角的终边重合，那么这个角是________.

7. $A=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 A、B 的关系为________.

8. (2010潍坊高一检测)图1-1-10中公路弯道处 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长 $l\approx$________(精确到1 m).

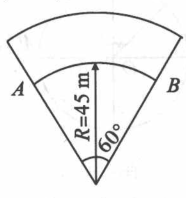


图1-1-10

9. 半径为4 cm的扇形，若它的周长等于弧所在圆的半圆周的长，则这个扇形的面积是________cm^2.

三、解答题

10. 已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|-4\leqslant\beta\leqslant4\}$，求 $A\cap B$.

11. 已知 α、β 是锐角，且 $\alpha+\beta$ 的终边与 $-280°$ 角的终边相同，$\alpha-\beta$ 的终边与670°角的终边相同，求角 α 与 β 的大小.

12. 已知扇形 OAB 的圆心角为120°，半径长为6，求：(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的长；(2)弓形 AOB 的面积.

13. (2010聊城高一检测)如图1-1-11分别写出适合下列条件的角的集合：
(1)终边落在射线 OM 上；
(2)终边落在直线 OM 上；
(3)终边落在阴影区域内(含边界).

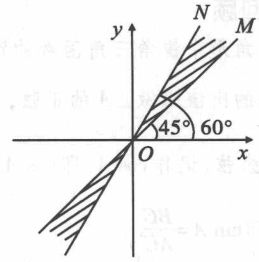


图1-1-11

B卷　高考水平训练（答案见132页）

1. (2010广东模拟5分)集合 $A=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|\beta=60°+k\cdot720°,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\gamma|\gamma=60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，那么集合 A、B、C 的关系是________.

2. (2010山东模拟5分)已知 α 是第二象限角，则 $\dfrac{\alpha}{3}$ 的终边不在第(　　)象限.
A. 一　B. 二　C. 三　D. 四

3. (综合题)已知角 θ 的终边与 $-\dfrac{\pi}{6}$ 的终边共线，且 $\theta\in(0,2\pi)$，求 θ 的弧度数.

4. (应用题)某圆的圆心与坐标系中坐标原点重合，圆上一点 A 从 x 轴正半轴上开始沿逆时针方向作匀速圆周运动，已知点 A 每分钟转过 θ 角 $(0<\theta\leqslant\pi)$，经过2 min到达第三象限，经过14 min回到原来的位置，那么 θ 是多少弧度？

5. (创新题)设半径为12 cm，弧长为 8π cm的弧所对圆心角为 α，$\alpha\in(0,2\pi)$，求出与角 α 终边相同的角的集合 A，并判断 A 是否为 $B=\left\{\theta\,\middle|\,\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 的真子集.

6. (探究题)已知扇形的面积为 S，当扇形的圆心角为多少弧度时，扇形的周长最小？并求出此最小值.

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

1.2.2 同角三角函数的基本关系

目标导航

1. 理解并掌握任意角三角函数的定义，理解三角函数是以实数为自变量的函数.
2. 掌握三种三角函数的定义域，会求三种常用的三角函数，并会判断三角函数在各象限的符号.
3. 理解单位圆和有向线段的概念，学会用与单位圆有关的有向线段将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值表示出来.
4. 理解同角三角函数的两个基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$，会用这两个基本关系式进行化简、求值和证明.

旧知回顾

1. 直角三角形中锐角三角函数的定义：如图 1-2-1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，把 $\angle A$ 的对边与斜边的比值叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$，即 $\sin A=\frac{BC}{AB}$；把 $\angle A$ 的邻边与斜边的比值叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$，即 $\cos A=\frac{AC}{AB}$；把 $\angle A$ 的对边与邻边的比值叫做 $\angle A$ 的正切，记作 $\tan A$，即 $\tan A=\frac{BC}{AC}$.

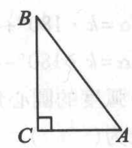


图 1-2-1

2. 象限角：如果角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角.
3. 终边相同角的表示：所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合，$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.
4. 角的度量单位制：角度制、弧度制.
5. 角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 的关系：在弧度制下，角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应的关系，每一个角都有唯一的一个实数与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角与它对应.

I 教材知识详解

教材全析

1. 任意角的三角函数

(1)坐标系中的锐角三角函数

如图 1-2-2，设锐角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边在第一象限. 在角 α 的终边上任取一点 $P(a,b)$，它与原点的距离 $r=\sqrt{a^2+b^2}>0$，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，则线段 OM 的长度为 a，线段 MP 的长度为 b.

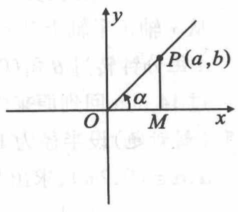


图 1-2-2

在 Rt$\triangle POM$ 中，根据直角三角形中三角函数的定义，有

$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{b}{r}$，$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{a}{r}$，$\tan\alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{b}{a}$.

(2)单位圆：在直角坐标系中，我们称以原点 O 为圆心，以单位长度为半径的圆为单位圆.

(3)任意角的三角函数

如图 1-2-3，设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，那么

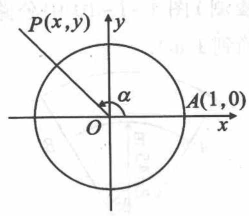


图 1-2-3

① y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=y$；

② x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=x$；

③ $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$.

通过上面可以看出，正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，我们将它们统称为三角函数.

剖析说明

(1)在任意角的三角函数的定义中,应该明确α是一个任意角.

(2)从三角函数的定义可以看出:正弦值、余弦值其实就是角α的终边与单位圆交点的纵坐标、横坐标.

(3)要注意三角函数与以前函数的不同,是以角为自变量,以比值为函数值的函数,函数值的大小取决于角的终边所在位置,而不是终边上点的坐标.

(4)角α的正弦、余弦、正切的表示符号分别是$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$,比如$\sin\alpha$是一个整体,而不是sin与α的乘积.

2. 三角函数的定义域和函数值的符号

(1)三角函数的定义域

三角函数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
定义域	**R**	**R**	$\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)三角函数值在各象限内的符号

三角函数值的符号是根据三角函数定义和各象限内的坐标符号导出的.根据三角函数的定义得知:正弦的符号取决于纵坐标y的符号;余弦的符号取决于横坐标x的符号;正切的符号取决于纵坐标y、横坐标x同号为正,异号为负.各三角函数值在每个象限内的符号如图1-2-4.

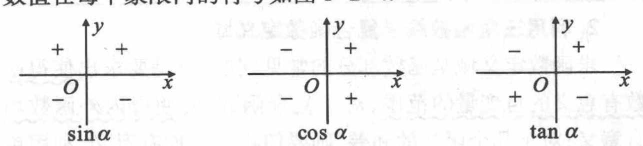


图1-2-4

(3)终边相同的角的三角函数值

三角函数值是由角的终边位置确定的,故终边相同的角的同一种三角函数的值相等,故由三角函数定义得出诱导公式一.

诱导公式一:$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$,

$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$,

$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$,其中$k\in\mathbf{Z}$.

(4)特殊角的三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0		0		0

剖析说明

(1)为了便于记忆,我们把三角函数值在各象限内的符号规律概括为下面的口诀"一全正,二正弦,三正切,四余弦".表示第一象限全是正值,第二象限正弦是正值,第三象限正切是正值,第四象限余弦是正值,其余情况均为负数.

(2)诱导公式一中的α可以是任意角,k是任意整数.

(3)在求三角函数值时,利用公式一可以将任意角转化到$[0,2\pi)$之间,但反过来,两个角的某个三角函数值相等,不一定有角的终边相同,更不一定这两个角相等.

(4)诱导公式一从代数的角度揭示了三角函数值的周期变化规律,即角的终边绕原点每转动一周,函数值是重复出现的.

(5)$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的含义是2π的整数倍,k为任意一个整数,要与$n\pi(n\in\mathbf{Z})$区分开.

3. 三角函数线

(1)有向线段:是指带有方向的线段.

(2)坐标系中有向线段方向的规定:如图1-2-5,当角α的终边不在坐标轴上时,以O为始点,M为终点,当线段OM与x轴同向时,OM的方向为正向,为正值x;当线段OM与x轴反向时,OM的方向为负向,为负值x,无论哪种情况都有$OM=x=\cos\alpha$.

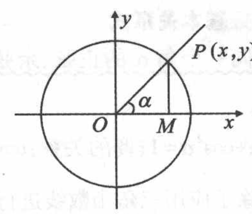


图1-2-5

当角α的终边不在坐标轴上时,以M为始点,P为终点,当线段MP与y轴同向时,MP的方向为正向,为正值y;当线段MP与y轴反向时,MP的方向为负向,为负值y,无论哪种情况都有$MP=y=\sin\alpha$.

(3)三角函数线:设角α的终边与单位圆交于P点,与过点$A(1,0)$的单位圆的切线交于T点(当终边与切线AT不相交时,取终边的反向延长线与切线AT的交点),过P作$PM\perp x$轴于M,则三条与单位圆有关的有向线段MP、OM、AT分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切线,统称为三角函数线.如图1-2-6.

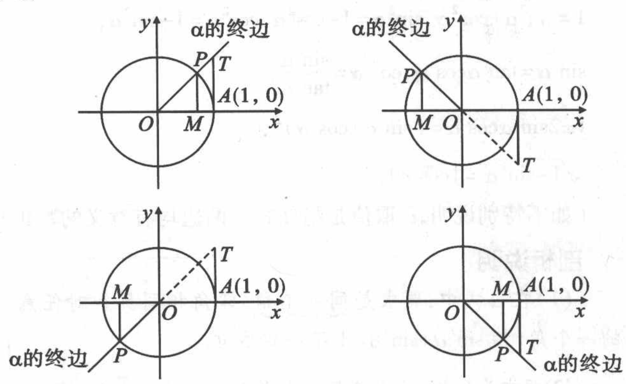


图1-2-6

剖析说明

(1)书写有向线段时,要始点在前,终点在后,比如有向线段AB,始点为A,终点为B.

(2)对有向线段方向的规定可简记为:与x轴平行的有