



21世纪高等学校机械设计制造及其自动化专业系列教材

# 机械振动学

蔡敢为 陈家权 李兆军 杨旭娟 主编

廖道训 主审



华中科技大学出版社  
<http://www.hustp.com>



21世纪高等学校机械设计制造及其自动化专业系列教材

# 机械振动学

主 编 蔡敢为 陈家权 李兆军 杨旭娟  
主 审 廖道训

华中科技大学出版社  
中国·武汉

## 内 容 简 介

本书按照循序渐进的原则,深入浅出地介绍了机械振动学的基本概念、基本规律和基本方法,可使读者在较为轻松的氛围下学习和掌握机械振动学的基础知识。

本书共分四章,逐步介绍了机械振动学的概念、单自由度系统振动、两自由度系统振动、多自由度系统振动,力图使读者在较短的时间内了解机械振动学的基础知识和研究方法,为进一步深入学习、研究、应用机械振动理论和解决工程实际问题打下一定的基础。

本书可作为普通高校机械类专业本科生、研究生学习机械振动学的教材,也可作为广大工程技术人员学习机械振动理论和解决工程实际问题的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

机械振动学/蔡敢为 陈家权 李兆军 杨旭娟 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2012.1  
ISBN 978-7-5609-7460-6

I. 机… II. ①蔡… ②陈… ③李… ④杨… III. 机械振动 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 229918 号

### 机械振动学

蔡敢为 陈家权 李兆军 杨旭娟 主编

策划编辑:万亚军

责任编辑:姚同梅

封面设计:潘 群

责任校对:何 欢

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:仙桃市新华印务有限责任公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:9

字 数:192千字

版 次:2012年1月第1版第1次印刷

定 价:16.80元



华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究

21 世纪高等学校  
机械设计制造及其自动化专业系列教材  
**编 审 委 员 会**

**顾问：** 姚福生                      黄文虎                      张启先  
(工程院院士)                      (工程院院士)                      (工程院院士)

谢友柏                      宋玉泉                      艾 兴  
(工程院院士)                      (科学院院士)                      (工程院院士)

熊有伦  
(科学院院士)

**主任：** 杨叔子                      周 济                      李培根  
(科学院院士)                      (工程院院士)                      (工程院院士)

**委员：** (按姓氏笔画顺序排列)

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 于骏一 | 王安麟 | 王连弟 | 王明智 | 毛志远 |
| 左武炘 | 卢文祥 | 朱承高 | 师汉民 | 刘太林 |
| 李 斌 | 杜彦良 | 杨家军 | 吴昌林 | 吴 波 |
| 吴宗泽 | 何玉林 | 何岭松 | 陈康宁 | 陈心昭 |
| 陈 明 | 陈定方 | 张春林 | 张福润 | 张 策 |
| 张健民 | 冷增祥 | 范华汉 | 周祖德 | 洪迈生 |
| 姜 楷 | 殷国富 | 宾鸿赞 | 黄纯颖 | 童秉枢 |
| 傅水根 | 傅祥志 | 廖效果 | 黎秋萍 | 戴 同 |

**秘书：** 徐正达 万亚军

# 21 世纪高等学校 机械设计制造及其自动化专业系列教材

## 总 序

“中心藏之，何日忘之”，在新中国成立 60 周年之际，时隔“21 世纪高等学校机械设计制造及其自动化专业系列教材”出版 9 年之后，再次为此系列教材写序时，《诗经》中的这两句诗又一次涌上心头，衷心感谢作者们的辛勤写作，感谢多年来读者对这套系列教材的支持与信任，感谢为这套系列教材出版与完善作过努力的所有朋友们。

追思世纪交替之际，华中科技大学出版社在众多院士和专家的支持与指导下，根据 1998 年教育部颁布的新的普通高等学校专业目录，紧密结合“机械类专业人才培养方案体系改革的研究与实践”和“工程制图与机械基础系列课程教学内容和课程体系改革研究与实践”两个重大教学改革成果，约请全国 20 多所院校数十位长期从事教学和教学改革工作的教师，经多年辛勤劳动编写了“21 世纪高等学校机械设计制造及其自动化专业系列教材”。这套系列教材共出版了 20 多本，涵盖了机械设计制造及其自动化专业的所有主要专业基础课程和部分专业方向选修课程，是一套改革力度比较大的教材，集中反映了华中科技大学和国内众多兄弟院校在改革机械工程类人才培养模式和课程内容体系方面所取得的成果。

这套系列教材出版发行 9 年来，已被全国数百所院校采用，受到了教师 and 学生的广泛欢迎。目前，已有 13 本列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材，多本获国家级、省部级奖励。其中的一些教材（如《机械控制基础》、《机电传动控制》、《机械制造技术基础》等）已成为同类教材的佼佼者。更难得的是，“21 世纪高等学校机械设计制造及其自动化专业系列教材”也已成为一个著名的丛书品牌。9 年前为这套教材作序的时候，我希望这套教材能加强各兄弟院校在教学改革方面的交流与合作，对机

机械工程类专业人才培养质量的提高起到积极的促进作用,现在看来,这一目标很好地达到了,让人倍感欣慰。

李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,人无完人,文无完文,书无完书。尽管这套系列教材取得了可喜的成绩,但毫无疑问,这套书中,某本书中,这样或那样的错误、不妥、疏漏与不足,必然会存在。何况形势总在不断地发展,更需要进一步来完善,与时俱进,奋发前进。较之9年前,机械工程学科有了很大的变化和发展,为了满足当前机械工程类专业人才培养的需要,华中科技大学出版社在教育部高等学校机械学科教学指导委员会的指导下,对这套系列教材进行了全面修订,并在原基础上进一步拓展,在全国范围内约请了一大批知名专家,力争组织最好的作者队伍,有计划地更新和丰富“21世纪机械设计制造及其自动化专业系列教材”。此次修订可谓非常必要,十分及时,修订工作也极为认真。

“得时后代超前代,识路前贤励后贤。”这套系列教材能取得今天的成绩,是众多机械工程教育工作者和出版工作者共同努力的结果。我深信,对于这次计划进行修订的教材,编写者一定能在继承已出版教材优点的基础上,结合高等教育的深入推进与本门课程的教学发展形势,广泛听取使用者的意见与建议,将教材凝练为精品;对于这次新拓展的教材,编写者也一定能吸收和发展同类教材的优点,结合自身的特色,写成高质量的教材,以适应“提高教育质量”这一要求。是的,我一贯认为我们的事业是集体的,我们深信由前贤、后贤一定能一起将我们的事业推向新的高度!

尽管这套系列教材正开始全面的修订,但真理不会穷尽,认识决无终结,进步没有止境。“嚶其鸣矣,求其友声”,我们衷心希望同行专家和读者继续不吝赐教,及时批评指正。

是为之序。

中国科学院院士

fan

2009.9.9



---

振动对机械的工作精度、疲劳寿命、动态品质等都有重要影响。在科学技术的发展、市场竞争的刺激、人们追求完美的本能等因素的驱动作用下,机械设备向高精度、高速度、轻重量、高负荷方面不断发展,而其振动性能也就愈发得到重视。掌握一定的机械振动理论知识已成为对现代机械工程领域技术人员的重要要求。在本科生中开设机械振动学课程,培养本科生对机械振动学的兴趣,使其具备一定的机械振动学基础知识,对他们参加机械工程实际工作,或者攻读研究生学位、继续深造,都是非常有益的。但是,目前机械振动学方面的教材多是针对研究生编写的,需要编写适合本科生的机械振动学简明教材。为满足这种需要,我们参考国内外许多文献,在当前机械类本科生理论课学时有限的背景下,精心挑选了机械振动学的一些基本知识,编写了这本适合本科生的机械振动学简明教材。我们希望本书介绍的内容有助于读者对工程实际中许多振动现象的理解,在完成机械设计等工作任务时,具有一定动态性能设计方面的意识,并可应用从本书中学到的机械振动学知识解决一些工程实际问题。

机械振动学具有超常性、复杂性等特点,对于本科生来说,学习掌握这门知识具有较大难度。本书在编写过程中,力求通过阐述机械振动学的实际意义来激发读者的学习兴趣和学习的动力。按照循序渐进的原则,深入浅出地介绍机械振动学的基本概念、基本规律和基本方法,使读者在较为轻松的氛围下学习和掌握机械振动学的基础知识。

本书共分四章,逐步介绍机械振动学的概念、单自由度系统振动、两自由度系统振动、多自由度系统振动,力图使读者在较短的时间内了解机械振动学的基础知识和研究方法,为进一步深入学习、研究、应用机械振动理论和解决工程实际问题打下一定的基础。

本书的编写得到了华中科技大学廖道训教授的大力支持和帮助,廖

教授不仅详细地审阅了全部书稿,而且提出了大量的修改意见,为本书付出了许多心血,谨在此表示衷心的感谢。华中科技大学出版社万亚军老师、刘锦老师、王连弟老师也对本书的出版给予了许多支持和帮助,在此一并致谢。在编写过程中参考了大量中外文献,特对这些文献的作者致以诚挚的谢意。

鉴于作者的学识和经验有限,书中的不妥甚至错误之处在所难免,望读者不吝赐教,以便使本书得到进一步完善,更好地为读者服务。

蔡敢为

2011年6月于广西大学



---

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| <b>第 1 章 导论</b> .....       | (1)   |
| 1.1 机械振动的基本概念和分类 .....      | (2)   |
| 1.2 机械振动的一般分析过程 .....       | (6)   |
| 1.3 简谐振动及其表示方法 .....        | (9)   |
| 1.4 简谐振动的合成 .....           | (10)  |
| 1.5 简谐振动的复数表示法 .....        | (12)  |
| 1.6 谐波分析 .....              | (13)  |
| 习题 .....                    | (18)  |
| <b>第 2 章 单自由度系统振动</b> ..... | (19)  |
| 2.1 单自由度系统的自由振动 .....       | (19)  |
| 2.2 单自由度系统的受迫振动 .....       | (40)  |
| 习题 .....                    | (58)  |
| <b>第 3 章 两自由度系统振动</b> ..... | (62)  |
| 3.1 两自由度系统振动微分方程 .....      | (62)  |
| 3.2 两自由度系统的自由振动 .....       | (67)  |
| 3.3 两自由度系统的受迫振动 .....       | (74)  |
| 3.4 坐标耦合与主坐标 .....          | (78)  |
| 习题 .....                    | (81)  |
| <b>第 4 章 多自由度系统振动</b> ..... | (84)  |
| 4.1 影响系数及其矩阵表达式 .....       | (84)  |
| 4.2 多自由度系统振动微分方程 .....      | (93)  |
| 4.3 固有圆频率与主振型 .....         | (100) |
| 4.4 矩阵迭代法 .....             | (105) |
| 4.5 模态分析法 .....             | (112) |
| 4.6 多自由度系统的自由振动 .....       | (113) |
| 4.7 多自由度系统的受迫振动 .....       | (118) |
| 习题 .....                    | (124) |
| <b>习题参考答案</b> .....         | (127) |
| <b>参考文献</b> .....           | (132) |



# 导 论

机械振动是一种特殊形式的运动,在这种运动过程中,机械振动系统将在某一位置(通常是静平衡位置,简称平衡位置)附近作往复运动。振动的强弱可以通过系统的位移、速度或加速度来表征。机械振动广泛存在于机械系统中,如钟摆的摆动、汽车的颠簸以及活塞运动等,都是机械振动的例子。

对大多数机械而言,振动对其性能都会产生不良影响,如机床的振动会降低机械加工的精度、加大其表面粗糙度,汽车会因共振产生而疲劳断裂,飞机会因颤振而坠毁,铁塔会因风振而倒塌,高压输电线会因自振而断裂,等等。此外,振动还会使机器操作人员感到烦躁、厌倦和疲劳,影响操作人员健康,振动产生的噪声也是一种环境污染。

另一方面,人们可以利用机械振动原理,设计制造各种机器设备和仪器仪表,如振动筛选机、振动时效装置、振动给料机、振动破碎机、振动切割机、振动输送机、振动打桩机以及测量传感器、钟表计时器等。图 1.1 所示为部分振动机械产品。

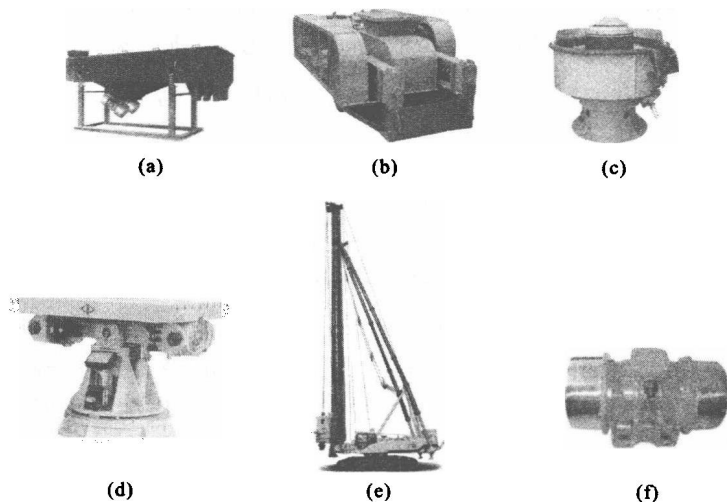


图 1.1 振动机械

(a) 振动筛选机;(b) 振动破碎机;(c) 振动研磨机;(d) 振动试验台;(e) 振动打桩机;(f) 振动电动机

随着生产技术的不断发展,现代工业对产品性能、可靠性以及噪声的要求不断提高,需要精确控制产品的振动行为,因此在设计产品时必须进行机械振动分析。学习机械振动的基础知识,掌握机械振动的分析方法,才能够为全面地评价机械产品的综合性能和设计出性能优越的机械产品打下良好的基础。

## 1.1 机械振动的基本概念和分类

### 1.1.1 机械振动的基本概念

实际的机械振动系统是非常复杂的,在振动分析中,需要将机械振动系统简化,再以简化的机械振动系统为研究对象,建立力学模型。机械振动系统通常是由三种理想化的元件组成的,即质量元件、弹性元件和阻尼元件,其中质量元件是储存和释放动能的元件,弹性元件是储存和释放势能的元件,而阻尼元件则是用于表达系统能量耗散的元件。这三种元件是机械振动系统的基本物理组成,它们决定了系统的振动特性。在振动分析中,除了这些元件外,外界作用力(或者力矩)、来自初始位移或初始速度等的激励也是需要考虑的。机械系统在振动过程中,动能和势能会不断地进行相互转化,如果系统存在阻尼,则振动的能量会有所耗散,所以想要保持系统的持续振动,就要通过外力使耗散的能量得以补偿。

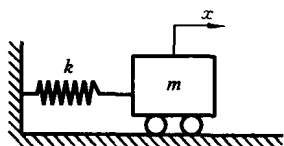


图 1.2 简单的弹簧-质量  
振动系统

考虑一个简单的弹簧-质量振动系统,如图 1.2 所示。初始时刻弹簧无变形,质量块处于静止位置,即系统处在静平衡状态。现将质量块偏离初始位置一个位移  $x$ (到达最右端)后释放,质量块将围绕静平衡位置振动。在最右端,质量块的振动速度为零,所以振动的动能为零,但对于静平衡位置,其势能为  $\frac{1}{2}kx^2$ 。由于弹簧对质量块的

弹力作用,所以质量块会从最右端运动到静平衡位置。到达静平衡位置时,质量块的势能将全部转换为动能,此时质量块的速度最大,并继续向左端运动。但在其通过静平衡位置后,由于受水平向右的弹力作用,质量块的速度会越来越小,到达最左端时速度为零。此时,质量块的全部动能都转换为势能,质量块将在弹簧弹力的作用下向静平衡位置运动,这个过程不断重复,就形成了质量块的振动。不过,由于周围介质的阻尼作用(包括空气的阻力、摩擦力等),质量块振动的幅度会越来越小,最终会停下来。如果想要维持系统的振动,则可以通过施加外界的作用力来实现。在这个振动系统中,质量块为质量元件,弹簧为弹性元件,周围介质的阻尼作用可以用阻尼元件来表示。

下面具体介绍组成机械振动系统的各种理想元件的特性。

## 1. 质量元件

实际上质量元件具有一定的形状、几何尺寸和质量,但在振动分析中,质量元件一般都被抽象为刚体或质点,如图 1.3 所示为机械系统中质量元件的简图。质量元件对于外力(或力矩)作用的响应表现为一定的加速度,如图 1.4 所示。根据牛顿第二运动定律,若质量元件受外力  $F_m$  作用,则此力与质量元件获得的加速度  $\ddot{x}$  的关系可表示为

$$F_m = m \ddot{x} \quad (1.1)$$

式中:  $m$  为质量元件的质量,是惯性的一种度量。

$F_i = -m \ddot{x}$  称为惯性力,其方向与加速度方向相反,如图 1.4(a)所示。

同理,对于承受矩为  $M$  的力偶作用的扭转振动系统,该力偶也可称为广义力,广义加速度为角加速度  $\ddot{\varphi}$ ,力矩与角加速度的关系符合牛顿第二定律,可表示为

$$M = J \ddot{\varphi} \quad (1.2)$$

式中:  $J$  为质量元件绕其旋转中心轴的转动惯量。转动惯量  $J$  是表示广义力(力矩)和加速度(角加速度)关系的广义质量。

$M_i = -J \ddot{\varphi}$  称为惯性力矩,又称为广义惯性力,其方向与角加速度的方向相反,如图 1.4(b)所示。

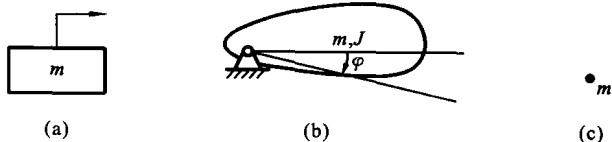


图 1.3 机械振动系统中质量元件的简图

(a) 质量为  $m$  的刚体(线性运动);(b) 具有质量  $m$  和转动惯量  $J$  的刚体(角运动);(c) 质量为  $m$  的质点

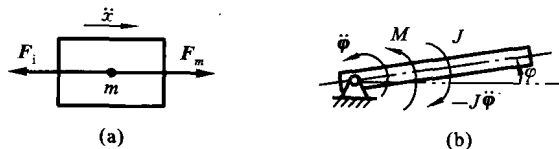


图 1.4 运动质量元件所受外力与惯性力的平衡关系

(a) 质量元件受外力作用;(b) 质量元件受力矩作用

## 2. 弹性元件

在机械振动系统中,系统的弹性行为一般被抽象为无质量而具有线弹性的弹性元件(即其因变形而产生的弹性恢复力与变形量成正比),图 1.5 所示是机械系统常用的弹性元件简图。弹性元件对外力的响应表现为一定的位移或变形。弹性元件的力学特性用刚度系数  $k$  表征,它表示作用在弹性元件上的力(或力矩)的增量与相应的位移(或角位移)增量之比。弹性元件在振动系统中提供使系统恢复到平衡位置的弹性力,又称为弹性恢复力。弹性恢复力与弹性元件的变形增量  $\Delta x$  成正比,记为

$$F_e = -k\Delta x \quad (1.3)$$

式中:负号表示弹性恢复力  $F_e$  与相对位移的方向相反; $k$  为弹性元件的刚度系数; $\Delta x$  表示弹性元件两端的位移差值。对于承受扭转变形的弹性元件,产生的是恢复力矩,位移是角度。

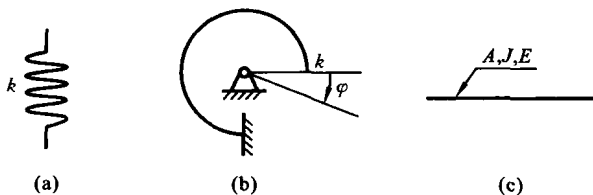


图 1.5 机械振动系统的弹性元件简图

(a) 无质量线性弹簧;(b) 无质量扭转弹簧;(c) 无质量弹性梁

### 3. 阻尼元件

阻尼是指任何机械系统在振动过程中,由于外界作用和(或)系统本身固有的因素引起的振幅逐渐减小的特性以及这一特性的量化表征。就机械振动而言,零部件之间或与外部约束的摩擦消耗系统的机械能,转化为热能,这种阻尼称为摩擦阻尼;系统引起周围质点的振动,使系统的能量逐渐向四周辐射出去,变为波的能量,这种阻尼称为辐射阻尼。总之,阻尼会消耗机械系统的能量,改变系统的运动状态。

在机械系统中,黏性阻尼是最常用的一种阻尼模型。阻尼力  $F_c$  的大小与运动质量元件的速度  $\dot{x}$  的大小成正比,方向相反,记为

$$F_c = -c\dot{x} \quad (1.4)$$

式中: $c$  为黏性阻尼系数,其数值由振动实验测定。由于黏性阻尼的数学求解简单,在工程上常将其他形式的阻尼按照它们在一个周期内能量损耗相等的原则,折算成等效黏性阻尼。物体的运动状态随着系统阻尼系数的大小而改变。图 1.6 所示为机械振动系统的阻尼元件简图。

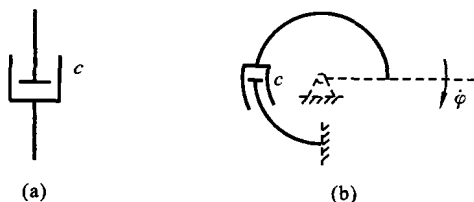


图 1.6 机械振动系统的阻尼元件简图

(a) 直线运动元件;(b) 角运动元件

## 1.1.2 机械振动的分类

机械振动的形式很多,有不同的分类方法。按产生振动的原因,机械振动可分为自由振动、受迫振动和自激振动等三类;按振动的规律,机械振动可分为简谐振动、非

简谐周期振动和随机振动等三类;按振动系统的自由度分类,机械振动可分为单自由度系统振动和多自由度系统振动等两类。按振动系统结构参数的特性,机械振动可分为线性振动和非线性振动;按振动位移的特征,机械振动可分为直线振动、扭转振动和摆振动等三类。

### 1. 按产生振动的原因分类

(1) 自由振动 自由振动是指作用于系统的激励或约束去除后产生的振动。这种振动由弹性力、惯性力和阻尼力所决定,振动的频率就是系统的固有频率。阻尼力的存在,使振动逐渐衰减,阻尼越大,衰减越快。如果系统没有阻尼,则这种振动称为无阻尼自由振动。无阻尼自由振动是一种简谐振动。

(2) 受迫振动 受迫振动是指由稳态激励产生的稳态振动,又称强迫振动。它是在激振力持续作用下,系统被迫产生的与激振力频率相同的振动。

(3) 自激振动 自激振动是在非线性机械系统内,由于非振动能量转变为振动能量而产生的振动,即机械系统由于外部能量与系统运动相耦合形成振动激励所产生的振动。当振动停止时,振动激励随之消失。振动频率接近于系统固有频率。

### 2. 按振动的规律分类

(1) 简谐振动 简谐振动是指系统运动量值随时间按正弦函数规律变化的振动。

(2) 非简谐周期振动 非简谐周期振动是指系统运动量值按一定时间间隔重复出现的非简谐振动。可以通过谐波分析,将其分解为若干个简谐振动函数之和。

(3) 随机振动 随机振动是指在未来任何一定时刻,其运动量的瞬时值不能精确预知的振动。由于运动不是时间的确定函数,只能用概率统计方法来描述系统的运动规律。

### 3. 按振动系统的自由度分类

自由度是指在任意时刻完全确定机械振动系统位置所需的独立广义坐标数。

(1) 单自由度系统振动 单自由度系统振动是指在任意时刻只需一个广义坐标就能完全确定其位置的系统的振动。

(2) 多自由度系统振动 多自由度系统振动是指在任意时刻需要两个或更多的广义坐标才能完全确定其位置的系统的振动。

此外,连续系统的振动是指具有无限个广义坐标的系统的振动。连续系统的振动通常可以简化为有限多自由度系统的振动问题来处理。

### 4. 按振动系统结构参数的特性分类

(1) 线性振动 线性振动是指响应与激励大小成正比并且满足叠加原理的系统的振动。线性振动系统的惯性力、阻尼力和弹性恢复力分别与加速度、速度和位移的一次方成正比,能用常系数线性微分方程来描述。

(2) 非线性振动 非线性振动是指某些参数具有非线性特征,只能用非线性微

分方程描述的系统的振动。在非线性振动系统中,惯性力、阻尼力、弹性恢复力普遍具有非线性特性,不能运用叠加原理求解。

### 5. 按振动位移的特征分类

(1) 直线振动 直线振动又分为纵向直线振动和横向直线振动等两类。纵向直线振动指振动体上的质点沿轴线方向所作的直线振动。横向直线振动指振动体上的质点沿垂直轴线方向所作的直线振动。

(2) 扭转振动 扭转振动是指振动体上垂直于轴线横截面的上质点所作的绕轴线的回转振动。

(3) 摆振动 摆振动是指振动体上的质点在同一平面上所作的绕垂直轴线的回转振动,简称摆振。

## 1.2 机械振动的一般分析过程

为了便于研究机械振动系统的基本特征,需要将此系统进行适当的简化和抽象,建立分析研究振动现象的理想化力学模型和数学模型。所选择的物理对象可能是一个零部件、一台机器,或者一个完整的工程结构,即机械振动系统。

### 1.2.1 建立振动力学模型

实际的机械结构是非常复杂的,为了对其进行振动分析,必须结合研究的目的,抓住主要因素,略去一些次要因素,将实际结构简化和抽象为振动力学模型。简化的程度取决于结构复杂程度和分析的目的。在振动研究中,一般把机械振动系统作为研究对象(如一辆汽车、一台机床),把外界对系统的作用或机器运动所产生的力作为激励或输入,把机器或结构在激励作用下产生的动态变化称为响应或输出。机械振动理论研究的就是这三者之间的关系。

在振动分析中,一般将机械振动系统抽象为由质量元件、弹簧元件和阻尼元件组成的振动系统。机械系统之所以会产生振动,是因为它本身具有质量和弹性,而阻尼则使振动受到抑制。以能量观点来看:当外界对系统做功,使质量元件获得速度时,系统便具有动能;如果使弹性元件产生变形,系统则获得变形能(弹性势能),具有使质量元件回到平衡位置的能力。这种能量的反复转换就导致系统的振动。如果没用外界不断地输入能量,由于阻尼的存在,振动现象将逐渐消失。在重力场中,质量离开平衡位置时就具有势能,同时产生恢复力,如单摆,虽然没有弹簧,但可看成等效弹簧系统。下面以一辆载有骑乘人员的自行车为例,分析该系统在竖直方向振动的动力学模型。

该机械振动系统由骑乘人员和自行车构成,自行车又可大致拆分为轮胎、车轮、车架和坐椅。在行驶的过程中,由于路面起伏不平,自行车会产生振动。这个振动系统可以简化为一个简单的单自由度振动模型,如图 1.7(a)所示,该模型由系统的等

效质量元件、等效弹性元件(弹簧)和等效阻尼元件组成。系统的等效质量  $m_{eq}$  考虑了骑乘人员的质量  $m_p$ 、车轮的质量  $m_w$  和车架的质量  $m_f$ ；系统的等效弹簧刚度系数  $k_{eq}$  考虑了坐椅的刚度系数  $k_s$ 、车架的刚度系数  $k_f$  和轮胎的刚度系数  $k_t$ ；系统的等效阻尼系数  $c_{eq}$  则考虑了坐椅的阻尼系数  $c_s$ 、车架的阻尼系数  $c_f$  和轮胎的阻尼系数  $c_t$ 。为了更真实地模拟这个振动系统,可以把骑乘人员的质量  $m_p$ 、坐椅的刚度系数  $k_s$  和阻尼系数  $c_s$  以及轮胎的刚度系数  $k_t$  和阻尼系数  $c_t$  分别表示出来,从而得到图 1.7(b)所示的两自由度系统模型。如果还考虑车架的质量  $m_f$ 、刚度系数  $k_f$  和阻尼系数  $c_f$ ,则可以得到图 1.7(c)所示的三自由度振动系统模型。实际上,振动系统的力学模型简化不止这几种形式,可以根据研究目的和实际需要合理进行简化。

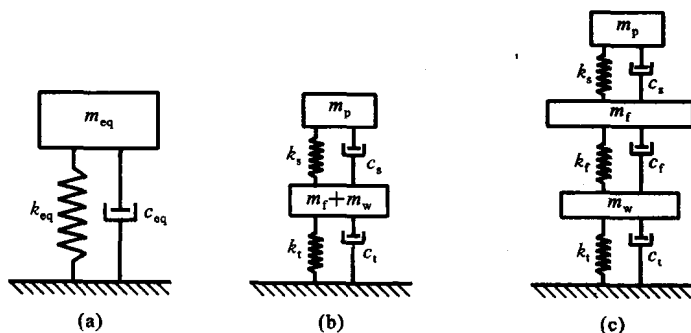


图 1.7 载人自行车的力学模型

(a) 单自由度模型; (b) 两自由度模型; (c) 三自由度模型

## 1.2.2 建立数学模型

机械振动系统的力学模型一旦建立起来,就可以应用动力学定律推导出描述机械振动特性的数学方程。常用的动力学原理有牛顿第二定律、达朗贝尔原理、能量守恒原理。通常振动问题的数学模型具有微分方程的形式,且微分方程的形式可以是线性的,也可以是非线性的。

现以图 1.7(a)所示的力学模型为例进行说明。在静止状态下,由于重力的作用,弹簧被压缩  $x_s$ ,由此产生的弹性恢复力与重力相平衡,如图 1.8 所示,即

$$k_{eq} x_s = m_{eq} g \quad (1.5)$$

假设系统的坐标原点位于静平衡状态下等效质量  $m_{eq}$  的质心位置,如图 1.8 所示。现将等效质量  $m_{eq}$  相对于平衡位置移动一位移  $x$ ,位移  $x$  向下为正、向上为负,则系统产生的弹簧弹性恢复力  $F_e$  和阻尼力  $F_d$  的大小分别为

$$F_e = -k_{eq}(x + x_s) \quad (1.6)$$

$$F_d = -c_{eq} \dot{x} \quad (1.7)$$

根据牛顿第二定律可列出系统的运动微分方程:

$$m_{eq} g - k_{eq}(x + x_s) - c_{eq} \dot{x} = m_{eq} \ddot{x} \quad (1.8)$$

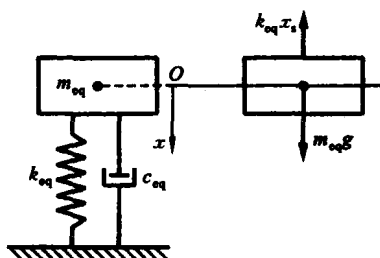


图 1.8 载人自行车的单自由度振动系统力学模型

根据式(1.5),将式(1.8)整理为

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x + c_{eq} \dot{x} = 0 \quad (1.9)$$

式(1.9)即为图 1.7(a)所示力学模型的数学模型,它反映了系统的位移、速度以及加速度之间的关系。

### 1.2.3 数学模型的求解

为了得到振动系统运动和特征参数的变化规律,需要对数学模型进行求解。通常这种数学表达式是位移的时间的函数的形式,它描述了系统运动、系统性质和激励(含初始干扰)的关系。如果数学模型没有解析解,则需应用数值计算方法求解。

现仍以图 1.7(a)所示的力学模型为例进行说明。为了计算的方便,忽略系统阻尼的影响,则系统的运动微分方程(式(1.9))表示为

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x = 0 \quad (1.10)$$

式(1.10)可整理成

$$\ddot{x} + \frac{k_{eq}}{m_{eq}} x = 0 \quad (1.11)$$

令  $\frac{k_{eq}}{m_{eq}} = \omega_0^2$  并代入式(1.11)得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.12)$$

设式(1.12)的通解为

$$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t \quad (1.13)$$

式中:  $a_1$ 、 $a_2$  为待定常数,可由系统的初始条件确定。如果在初始时刻  $t = 0$ ,位移  $x(t)$ 、速度  $\dot{x}(t)$  的值分别为  $x_0$  和  $\dot{x}_0$ ,由式(1.13)可得

$$\begin{cases} x(t=0) = a_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \omega_0 a_2 = \dot{x}_0 \end{cases}$$

解该方程组可得

$$a_1 = x_0, \quad a_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$$

于是式(1.10)的解为