北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助项目

线性代数解题方法

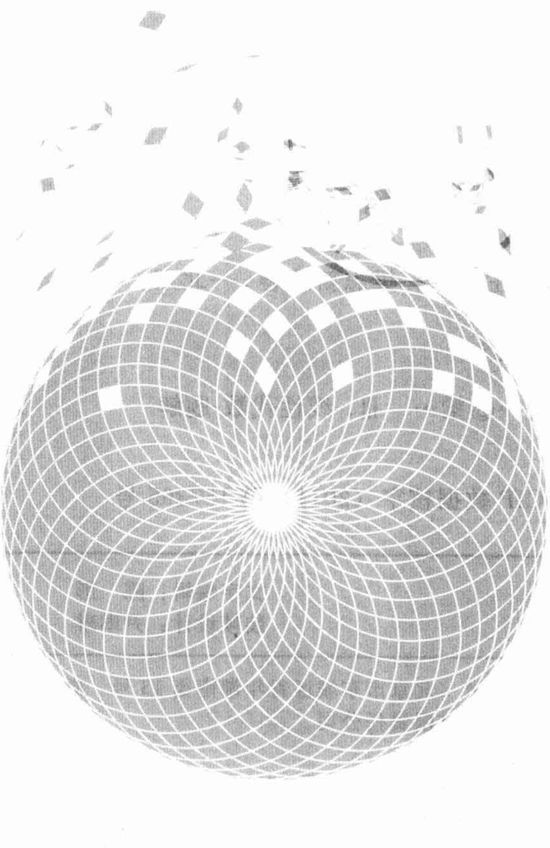
王莲花　梁志新　编著

化学工业出版社

北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助项目

线性代数解题方法

王莲花　梁志新　编著



化学工业出版社

·北　京·

本书按照行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的对角化和二次型六章内容编写，每章包含主要内容、方法与技巧、典型例题、自测题和自测题答案及提示等内容。力求做到结构合理、脉络清晰、概念准确、通俗易懂、注重实用。

该书既可作为大学本科工科、经管类专业等《线性代数》课程的教学参考用书，又可作为在校大学生同步辅导书和硕士研究生入学考试复习用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数解题方法/王莲花，梁志新编著．—北京：化学工业出版社，2011.9

ISBN 978-7-122-12055-7

Ⅰ．线…　Ⅱ．①王…②梁…　Ⅲ．线性代数-题解
Ⅳ．O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 157365 号

责任编辑：陈　蕾　　　文字编辑：陈　彤
责任校对：边　涛　　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
710mm×1000mm　1/16　印张 $14\frac{3}{4}$　字数 309 千字　2011 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.00 元

前　言

本书根据教育部“关于线性代数课程的基本要求”和“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写。该书既可作为大学本科工科、经管类专业等《线性代数》课程的教学参考用书，又可作为在校大学生同步辅导书和硕士研究生入学考试复习用书。

线性代数是高等学校理工科、经管类专业等必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的必考课程之一。然而，由于线性代数比较抽象，思维方法及解题技巧独特，运算又容易出错，部分习题难度较大，考研得分率较低。为了帮助在校大学生学好线性代数和考研人士复习之用，编者根据多年的教学经验，对本门课程的内容加以提炼总结，参阅多种书籍和文献，编写了这本配套学习教材。

本书包含两大部分内容。其中，第一部分是按照行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的对角化和二次型共六章的内容编写，每章按主要内容、方法与技巧、典型例题、自测题和自测题答案及提示五部分内容编写。其中，“主要内容”是按章节梳理、归纳和总结基本概念和基本理论；“方法与技巧”是归纳所涉及的基本题型，分析并给出解题方法，帮助读者把握解题思路，掌握解题规律，使读者能站在一个更高、更深的层次上去分析问题，达到认识和理解的新境界；“典型例题”是精选大量的具有典型性、代表性的例题，这些例题不仅是对前面讲的“方法与技巧”进一步诠释，而且还是帮助读者把握经典例题的典型处理方法，从而达到启发诱导和示范作用。最后，在每章节后面配有“自测题”，均按照填空题、单项选择题、计算题和证明题编制，供读者在学完每章后练习使用；各章的自测题均配有参考答案及提示，供读者参考。第二部分是针对由化学工业出版社 2010 年出版王莲花和梁志新编著的《线性代数》的部分习题进行的详细解答。该书第一部分内容由王莲花编写，第二部分习题解答由梁志新给出。

在成书过程中，编者参阅了诸多书籍和文献，由于篇幅所限，未能一一列出，在此向这些作者表示衷心感谢！该书的出版，还得到了北京物资学院有关领导及化学工业出版社的领导和编辑给予的大力支持和帮助，在此一并致谢！

由于编者水平有限，此书不妥之处，敬请广大读者批评指正。

本书为北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助出版的系列图书之一。

编者

2011 年 5 月

目　录

第一部分

第二部分

第一部分

第 1 章 行列式

1.1 主要内容

1.1.1 行列式的定义

（1）二阶和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

（2）余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来的顺序构成的一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**．记为 M_{ij}．则称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

（3）n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

其中 A_{1j} 是元素 $a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式.

1.1.2 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

注：把行列式 D 的各行变成相应的各列所得的行列式称为 D 的**转置行列式**. 记为 D^{T}.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号.

推论 1 行列式的某一行（列）的元素全为零，则此行列式的值为零.

推论 2 行列式某两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行（列）中的所有元素有公因子，则公因子可以提到行

列式的外边.

推论 行列式某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，那么此行列式可以写成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对列具有类似的结论.

性质 5 行列式中某一行（列）的所有元素乘以数 k 加到另一行（列）的对应元素上，所得行列式与原行列式的值相等.

性质 6 **[行列式按行（列）展开定理]** n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和．即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式的某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零．即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,\ i\neq k;$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0,\ j\neq k.$$

性质 6 和推论 4 合起来可写成如下关系式：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn} = \begin{cases} D, i=k \\ 0, i\neq k \end{cases};$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} D, j=k \\ 0, j\neq k \end{cases}.$$

1.1.3 克莱姆（Gramer）法则

如果 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

那么，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将系数行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，其余元素不变而得到的行列式.

注：① 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知数的个数相等的线性方程组；

② n 元非齐次线性方程组（1.1），当系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一解，当系数行列式 $D=0$ 时克莱姆法则失效，方程组可能有解也可能无解.

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零时，式（1.1）称为 n 元**非齐次线性方程组**；

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，即线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.2}$$

称为 n 元**齐次线性方程组**.

对于齐次线性方程组（1.2），若系数行列式 $D\neq0$，则方程组（1.2）有唯一零解；若方程组（1.2）有非零解，则系数行列式 $D=0$.

1.2 方法与技巧

1.2.1 低阶行列式的计算

低阶行列式的计算一般有两种方法：

一是根据行列式的行（列）元素的特点，利用行列式的性质化为上（下）三角行列式；

二是利用行列式按一行（列）展开定理降阶计算.

一般数字型的行列式的计算采用的方法是：

选用行列式中含零元素较多的行（列），把该行（列）元素中除去某元素外的其他元素，用行列式的性质都化为零；

再利用行列式按行（列）展开的定理降阶计算.

1.2.2 n 阶行列式的计算

n 阶行列式的计算方法很多，一般有下列方法.

（1）利用行列式的性质直接化为上（下）三角行列式.

（2）降阶法［行列式按行（列）展开定理］：

利用行列式的性质将行列式的某行（列）的元素尽可能多地化为零元素，然后再按此行（列）展开，转化为较低阶行列式进行计算.

(3) 看行和（列和），如行和（列和）相等，则均可加到第 1 列（第 1 行）上去，然后提出一数.

(4) 逐行相加（减）法.

(5) 递推公式法（注意对称性）：应用行列式的性质，把一个 n 阶行列式 D_n 表示为与原行列式具有相同结构的较低阶行列式的代数和，写出线性关系式 $D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}$ 或 $D_n=\alpha D_{n-1}+\beta$；再根据此关系式递推求得 D_n 的值.

(6) 拆分法：根据行列式的某行（列）元素的特点，将行列式适当地拆分成若干个同阶行列式的和；然后求得各行列式的值，即可得原行列式的值.

(7) 升阶（加边）法：根据行列式的特点，有时可把原行列式加上一行一列. 常用的加边方法是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n+1}.$$

注：（ⅰ）加边后的行列式必须与原行列式的值相等；

（ⅱ）升阶目的是为了降阶；

（ⅲ）根据需要，在 * 处加上适当的数，即可以简化行列式的计算.

(8) 公式法.

公式一：范德蒙（Vandermonde）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

注意：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不相同时，行列式的值不为零.

公式二：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

以上方法中，前两种是最基本的计算方法，要求熟练掌握. 需要指出的是 n 阶行列式的计算是本章的一个难点，计算一个行列式有时需要综合运用多种方法. 下面会根据行列式的特征，归纳几类行列式的计算方法.

1.2.3 按行（列）展开定理的应用

根据行列式按行（列）展开定理，n 阶行列式的计算理论上可以通过不断降价进行计算，但实际应用时此方法适用于零元素较多的行列式的计算.

反过来，有时利用公式

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{第 } i \text{ 行}$$

将某些低阶行列式（代数余子式或余子式）的计算转化为高阶行列式计算反而更简便.

1.2.4 克莱姆法则的应用

n 个方程 n 个未知数的线性方程组，如果系数行列式不为零，则可以用克莱姆法则求出其唯一解.

齐次线性方程组有非零解当且仅当系数行列式等于零.

1.3 典型例题

1.3.1 低阶行列式的计算

【例 1】 计算下列行列式：

（1）$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & -204 \\ 199 & 200 & -395 \\ 301 & 300 & -600 \end{vmatrix}$；

（2）$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 （1）注意：该行列式第 1 列、第 3 列与第 2 列的整数倍接近. 把第 2 列的（−1）倍加到第 1 列，2 倍加到第 3 列即可简化得

$$D\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix} 3 & 100 & -4 \\ -1 & 200 & 5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-3c_1}100\begin{vmatrix}3&-8&-4\\-1&5&5\\1&0&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}-8&-4\\5&5\end{vmatrix}=-2000.$$

(2) 注意：该行列式第 3 行含有 0 元素，且 $a_{33}=1$. 所以，可用行列式的性质，把第 3 行的元素除 $a_{33}=1$ 外全化为零元素，再按第 3 行展开得

$$D\xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40.$$

【例 2】 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

解 注意到各行元素之和相等，可以利用行列式的性质，先把各列加到第 1 列，再提出第 1 列的公因子，使第 1 列的元素都变为 1，进而用第 1 行的 (-1) 倍加到其余各行即可简化行列式.

$$D\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,r_3-r_1}x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}0&x&-x\\x&0&-x\\0&0&-x\end{vmatrix}=x^4$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$，求方程 $f(x)=0$ 的根.

解 根据行列式的第 1，2，3，4 列元素的特点，将第 1 列的 (-1) 倍依次加到其余各列，有

$$f(x)\xlongequal[c_4-c_1]{c_2-c_1,c_3-c_1}\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}.$$

再根据公式二，有 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=5x(x-1)$.

所以 $f(x)=0$ 的两个根为 $x=0$ 和 $x=1$.

【例 4】 设 $D=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\2&3&4&5\\2&0&3&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$，求 $A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+4A_{24}$，其中 A_{2j} 为元素 $a_{2j}(j=1,2,3,4)$的代数余子式.

分析 反过来利用按行（列）展开定理，化为一个四阶行列式更为简便.

解 $A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+4A_{24}=1\cdot A_{21}+2\cdot A_{22}+3\cdot A_{23}+4\cdot A_{24}$

$$=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&2&3&4\\2&0&3&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}=0$$ （第 2 行与第 4 行对应元素相同）.

【例 5】 设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&5&0\\3&3&3&3\\0&-5&0&0\\5&3&2&-2\end{vmatrix}$，求第 4 行各元素余子式之和.

解 方法一：按余子式的定义计算.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}0&5&0\\3&3&3\\-5&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5&0\\3&3&3\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&0\\3&3&3\\0&-5&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&5\\3&3&3\\0&-5&0\end{vmatrix}$$

$$=-75+0+30-45=-90.$$

方法二：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}2&0&5&0\\3&3&3&3\\0&-5&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=-5\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&5&0\\3&3&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2+c_3]{c_1+c_3}5\begin{vmatrix}2&5&0\\6&6&3\\0&0&1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2&5\\6&6\end{vmatrix}=-90.$$

1.3.2 高阶行列式的计算

【例 6】 计算下列 n 阶行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(2) $D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$.

该类题的特征是：非零元素较少，行列式某行（列）至多有两个元素不为零．计算此类行列式一般可用按行（列）展开定理展开化为上（下）三角行列式.

解 (1) 按第 1 列展开，得

$$D=n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=(-1)^{n+1}n!$$

(2) 按第 1 列展开，得

$$D=x_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}+y_n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

$=x_1x_2\cdots x_n+(-1)^{n+1}y_1y_2\cdots y_n$.

【例 7】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.$$

该类题的特征是：行列式每行（列）元素的和相等．这时可以把第 2，3，…，n 列（行）加到第 1 列（第 1 行），提取公因子后再化简计算.

解 注意到每行的元素之和相等，可将第 2，3，…，n 列对应元素加到第 1

列，然后提出公因子.

$$D_n=\begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.$$

再将第 1 行的（—1）倍加到其余各行，得

$$D_n=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

类似常见题有 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$ 等.

【例 8】 计算下列 $n+1$ 阶行列式：

（1）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$；

（2）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_0 \end{vmatrix}$.

该类题的特征是“三线型”行列式：某一行、某一列和对角线或次对角线的元素不为零外，其余元素全为零的行列式．这种类型的行列式的主要求解方法是化为三角形行列式计算.

解 （1）将第 $i+1$（$i=1$，2，…，n）列的 $-\frac{c_i}{a_i}$ 倍加到第 1 列，得到